МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования

«ПЕНЗЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

Факультет вычислительной техники

Кафедра «МОиПЭВМ»

Направление подготовки 09.04.02 – «Информационные системы и технологии»

Магистерская программа Проектирование, разработка и эксплуатация информационных систем

МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ

на тему

Модели и алгоритмы решения обобщенных задач о назначениях

Студент ____________ Балашова Ирина Юрьевна
(подпись, дата) (ФИО полностью)

Руководитель ____________ Безяев В.С.
(подпись, дата) (фамилия, инициалы)

Нормоконтролер ____________ Такташкин Д.В.
(подпись, дата) (фамилия, инициалы)

Рецензент ____________ Афонин А.Ю.
(подпись, дата) (фамилия, инициалы)

Работа допущена к защите (протокол заседания кафедры от ____________№______)

Заведующий кафедрой ____________________ Макарычев П.П.
(подпись) (фамилия, инициалы)

Работа защищена с отметкой _______(протокол заседания ГЭК от _______№_____)

Секретарь ГЭК ____________________ Попова Н.А.
(подпись) (фамилия, инициалы)

Пенза, 2020

Содержание

Введение

Актуальность темы исследования. Задача о назначениях является одной из фундаментальных задач математического программирования. Она широко используется в прикладной деятельности и имеет множество интерпретаций. В частности, математическая модель задачи о назначениях позволяет формально описать и провести количественный анализ таких ситуаций, как определение победителей конкурсных торгов, подбор персонала на вакантные должности, прикрепление транспорта к одному из маршрутов, распределение работ между механизмами, распределение целей между средствами поражения и т.д. Существуют стандартные алгоритмы поиска оптимального решения задачи о назначениях с простейшей линейной моделью, позволяющие получить точное решение за полиномиальное время. К таким алгоритмам относятся венгерский метод и метод Мака.

Как правило, формулировка большинства прикладных задач о назначениях не удовлетворяет простейшей линейной модели и требует ее обобщения. Результатом обобщения является задача с нелинейной целевой функцией (Misevicius A., Burkard R. E., Каширина И. Л., Лагздин А. Ю.), многокритериальная задача (Scarelli A, Cela E., Кочкаров Р. А., Ларичев О. И.), интервальная и нечеткая задачи (Salehi K., Kumar A., Леденева Т. М., Попов В. П., Майорова И. В.), многоиндексная задача (Pusztaszeri J. F., Rensing P. E., Гимади Э. Х., Афраймович Л. Г.) и пр. Такое многообразие математических моделей задач о назначениях, обусловленное их прикладной направленностью, порождает огромное число алгоритмов их решения. Большое количество исследований связано с разработкой алгоритмов решения на графах (Гимади Э. Х., Айран Н. М., Сердюков А. И., Коркишко Н. М., Кордюков Р. Ю., Допира Р. В., Иванова А. В.), разработкой алгоритмов, основанных на модификации метода динамического программирования (Martello S., Burkard R., Лагздин А. Ю., Забудский Г. Г.), модификации метода ветвей и границ (Burkard R., Balas E., Magos D., Афраймович Л. Г., Тюнтяев А. С.), построением генетических алгоритмов решения (Fleurent C., Holland J. H., Ramadoss S. K., Каширина И. Л., Семенов Б. А., Гуляницкий Л. Ф.), созданием алгоритмов решения, основанных на использовании двойственных методов (Goldfarb D., Медведева О. А., Чернышова Г. Д., Малюгина О. А.). Часто предложенные алгоритмы характеризуются громоздкостью используемого математического аппарата, а также не гарантируют нахождения оптимального решения в общем случае, что может привести к значительным экономическим потерям в контексте многих прикладных задач. При этом недостаточно внимания уделяется вопросам эквивалентных преобразований, с помощью которых можно существенно упростить исходную математическую модель задачи и привести ее к виду, для которого уже разработан эффективный алгоритм решения. Известны лишь отдельные примеры задач о назначениях, для нахождения оптимального решения которых используются эквивалентные преобразования – это задача с целевой функцией на максимум (Butkovic P., Burkard R., Богданова Е. Л., Соловейчик К. А.), открытая задача (Абу-Абед Ф.Н., Медведева О. А., Иванова А. В., Муха В. С.), задача с матрицей затрат, элементы которой произвольного знака (Лелякова Л. В., Харитонова А. Г., Чернышова Г. Д.) задача с запретами на отдельные назначения (Эддоус М., Стэнсфилд Р., Медведева О. А.). В связи с этим задача описания эквивалентных преобразований задачи о назначениях и разработки алгоритма приведения обобщенной модели к эквивалентной форме, позволяющей использовать существующие стандартные алгоритмы решения, является актуальной.

Целью магистерской диссертации является построение математических моделей линейных обобщенных задач о назначениях и разработка алгоритмов решения, основанных на эквивалентных преобразованиях математических моделей.

Задачи исследования. Для достижения указанной цели необходимо решить следующие задачи:

- выделить особенности математической модели простейшей линейной задачи о назначениях и провести анализ стандартных алгоритмов ее решения;

- сформулировать эквивалентные преобразования моделей задач о назначениях;
- описать подмножество задач о назначениях, математическая модель которых эквивалентна простейшей линейной;
- разработать алгоритмы решения обобщенных задач о назначениях, основанные на эквивалентных преобразованиях математических моделей;
- разработать комплекс программ, реализующих разработанные алгоритмы.

Методы исследования. Для решения поставленных задач использовались методы линейного программирования, целочисленного программирования, многокритериальной оптимизации, системного анализа.

Научная новизна работы заключается в следующем:

- разработаны эквивалентные преобразования в простейшую линейную модель комбинации недопустимых назначений, порядка назначений, приоритетных назначений;
- разработаны математические модели однокритериальных обобщенных задач о назначениях, отличительной особенностью которых является их эквивалентность простейшей линейной модели;
- разработаны математические модели многокритериальных обобщенных задач о назначениях, отличительной особенностью которых является их эквивалентность многокритериальной простейшей линейной модели;
- разработаны алгоритмы решения однокритериальных и многокритериальных обобщенных задач о назначениях, которые, в отличие от известных, основаны на эквивалентных преобразованиях математических моделей, что позволяет использовать для нахождения оптимального решения стандартные алгоритмы;
- разработан комплекс программ, использование которых позволяет найти точное решение обобщенной задачи о назначениях с

помощью эквивалентных преобразований и с использованием стандартных алгоритмов.

Практическая значимость исследований. Предложенные в работе математические модели обобщенных задач о назначениях и алгоритмы их решения могут быть применены как в теоретических исследованиях обобщений задачи о назначениях, так и при решении прикладных задач оптимизации, составив алгоритмическую основу информационно-управляющей системы.

Основные положения, выносимые на защиту:

- математические модели обобщенных задач о назначениях, эквивалентные простейшей линейной однокритериальной задаче;
- математические задач о назначениях, эквивалентные простейшей линейной многокритериальной задаче;
- алгоритмы решения однокритериальных и многокритериальных обобщенных задач о назначениях, основанные на эквивалентных преобразованиях математических моделей;
- комплекс программ поиска решения обобщенной задачи о назначениях с помощью эквивалентных преобразований и с использованием специальных алгоритмов решения линейной задачи о назначениях.

Апробация работы. Основные положения и результаты диссертационной работы докладывались и обсуждались на конференции:

- VII Ежегодная всероссийская межвузовская научно-практическая конференция «Информационные технологии в науке и образовании. Проблемы и перспективы» (г. Пенза, 2020).

Публикации. Основные результаты работы опубликованы в 1 печатном издании.

Структура и объем работы. Работа состоит из введения, трех тематических глав, заключения, списка литературы и приложений. Общий объем основного текста – 83 страница, включая 20 рисунков. Список литературы изложен на 8 страницах и содержит 73 наименования.

1 Анализ задачи о назначениях и алгоритмов ее решения

1.1 Модели задач линейного программирования

Рассмотрим множество

$$X = \left\{ \mathbf{x} \mid g_i(\mathbf{x}) \le 0, i = \overline{1, m} \right\},$$

где $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}$ – вектор-столбец;

$g_i(\mathbf{x}),\ i = \overline{1,m}$ – заданные скалярные функции.

Пусть на множестве X определена скалярная функция $f(\mathbf{x})$. Задачу максимизации функции $f(\mathbf{x})$ на множестве X называют основной задачей математического программирования. Запись

$$f(\mathbf{x}) \to \max, \quad \mathbf{x} \in X$$

означает, что ставится задача:

- либо найти оптимальную точку $\mathbf{x}^* \in X$: $f(\mathbf{x}^*) = \max_{\mathbf{x}\in X} f(\mathbf{x})$;
- либо если не существует такая точка $\mathbf{x}^*$, то найти $f^* = \sup_{\mathbf{x}\in X} f(\mathbf{x})$;
- либо убедиться, что $f(\mathbf{x})$ не ограничена сверху на множестве X;
- либо убедиться в том, что $X = \varnothing$.

Множество X называют множеством допустимых решений, неравенства $g_i(\mathbf{x}) \le 0$, определяющие допустимое множество – ограничениями, функцию $f(\mathbf{x})$ – целевой функцией. Точку $\mathbf{x}^* = \arg\max\{f(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in X\}$ называют оптимальным решением.

Большое число практических задач сводится к линейным математическим моделям, в которых целевая функция линейна, а множество, на котором ищется экстремум целевой функции, задается системой линейных уравнений и неравенств.

Общая модель задачи линейного программирования имеет вид:

$$f(\mathbf{x}) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \max(\min),$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \\ a_{m+1,1}x_1 + a_{m+1,2}x_2 + \ldots + a_{m+1,n}x_n \le b_{m+1}, \\ \ldots \\ a_{m+k,1}x_1 + a_{m+k,2}x_2 + \ldots + a_{m+k,n}x_n \le b_{m+k}, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0, \quad (j = \overline{1, l}, \ l \le n).$$

Без ограничения общности можно считать, что в системе ограничений первые m условий являются уравнениями, а последующие k – неравенствами. Очевидно, этого всегда можно добиться за счет переупорядочения условий. Неравенства системы ограничений можно полагать одного знака, так как неравенства противоположного смысла можно всегда привести к данным путем умножения обеих частей на (–1).

Частными случаями общей модели задачи линейного программирования являются симметричная модель:

$$f(\mathbf{x}) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \max,$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2, \\ \ldots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots + a_{kn}x_n \le b_k, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0 \quad (j = \overline{1, n}),$$

и каноническая модель:

$$f(\mathbf{x}) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \max,$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1, n}).$$

Задача линейного программирования, имеющая любую из данных моделей, с помощью некоторых преобразований может быть приведена к любой другой модели.

1.2 Эквивалентные преобразования моделей задач линейного программирования

Преобразования модели задачи линейного программирования называют эквивалентными, если они не влекут изменения оптимального решения задачи. Эквивалентные преобразования моделей задачи линейного программирования состоят в следующем [1]:

- смена направления целевой функции при изменении ее знака:

$$f_{\max}(\mathbf{x}) \Leftrightarrow -f_{\min}(\mathbf{x})\,;$$

- преобразование i -го ограничения-неравенства в ограничение-равенство путем введения дополнительных неотрицательных неизвестных:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \le b_i \Leftrightarrow a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n + s_i \le b_i\,, \quad s_i \ge 0;$$

- замена в целевой функции и во всех ограничениях неизвестной, не подчиненной условию неотрицательности, разностью двух новых неотрицательных неизвестных:

$$x_j \ge\le 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_j = x_q - x_p\,, \\ x_q \ge 0, \\ x_p \ge 0. \end{cases}$$

Вычислительный аппарат линейного программирования основан на эквивалентных преобразованиях моделей задач. Две модели полагают эквивалентными, если одна получена из другой с помощью эквивалентных преобразований. Задачи линейного программирования, модели которых получены с помощью эквивалентных преобразований, имеют одно и то же оптимальное решение либо обе не ограничены. Это означает, что если существует алгоритм нахождения оптимального решения одной из задач, то он может быть применен для решения эквивалентной ей.

1.3 Простейшая линейная модель задачи о назначениях и ее особенности

Задача о назначениях является частным случаем транспортной задачи, которая, в свою очередь, является задачей линейного программирования. В простейшей постановке задача о назначениях формулируется следующим образом. Имеется n работ, каждую из которых может выполнить любой из n исполнителей. Известны трудовые затраты c_{ij} на выполнение i-м исполнителем j-й работы, $c_{ij} \geq 0$ $(i = \overline{1, n},\ j = \overline{1, n})$, Каждому исполнителю может быть назначена только одна работа, и каждая работа может быть выполнена только одним исполнителем. Нужно распределить работы так, чтобы они были исполнены с минимальными затратами.

Математическая модель простейшей линейной задачи о назначениях имеет вид:

$$f(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to \min, \tag{1}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad j = \overline{1, n}, \tag{2}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad i = \overline{1, n}, \tag{3}$$

$$x_{ij} \in \{0,1\}, \quad i, j = \overline{1, n}, \tag{4}$$

где $\mathbf{X} = (x_{ij})$ – матрица бинарного отношения R, описывающего назначение исполнителю работы:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ если } (i, j) \in R, \\ 0, \text{ если } (i, j) \notin R. \end{cases}$$

Простейшей линейной модели задачи о назначениях присущи следующие особенности:

- целевая функция стремится к минимуму;
- модель закрытая, т.е. количество работ равно количеству исполнителей;

- матрица $\mathbf{X} = (x_{ij})$ бинарного отношения R, называемая матрицей назначений, обладает тем свойством, что в каждой строке и в каждом столбце этой матрицы имеется ровно одна единица, остальные элементы матрицы являются нулями;
- все элементы матрицы затрат $\mathbf{C} = (c_{ij})$ неотрицательны;
- ограничения задачи описываются только уравнениями;
- свободные члены всех уравнений равны единице.

1.4 Анализ алгоритмов решения простейшей линейной задачи о назначениях

Задача о назначениях, описываемая простейшей линейной моделью, относится к классу целочисленных задач линейного программирования, поэтому для ее решения можно использовать универсальные алгоритмы линейного и целочисленного программирования.

К универсальным алгоритмам линейного программирования относится симплекс-метод. Вычислительная процедура симплекс-метода основана на элементарных преобразования систем линейных уравнений и представляет собой последовательный перебор допустимых базисных решений. Существуют различные модификации симплекс-метода. В частности, симплексный метод с искусственным базисом применяется, когда затруднительно построить начальное допустимое базисное решение. В этом случае в базис вводят искусственные переменные, причем для дальнейшего удаления их из базиса последние вводятся в целевую функцию с достаточно большими по модулю отрицательными коэффициентами, которые имеют смысл штрафа за введение искусственных переменных. Двойственный симплекс-метод применяется, когда начальное базисное решение не удовлетворяет критерию допустимости в части неотрицательности значений неизвестных. Простейшая линейная задача о назначениях может быть решена с использованием алгоритмов решения транспортной задачи, частным случаем которой она является, например, метода потенциалов, который также является модификацией симплекс-метода.

Для нахождения решения простейшей линейной задачи о назначениях также могут быть использованы алгоритмы целочисленного программирования, в частности, метод ветвей и границ. Суть данного метода заключается в последовательном разбиении множества допустимых решений на подмножества, для каждого из которых определенным образом устанавливается оценка достижения экстремума. Поиск решения продолжается каждый раз в том подмножестве (по той ветке), в котором потенциально может лежать лучшее решение.

Описанные выше фундаментальные алгоритмы позволяют получить точное решение за конечное число итераций. Однако ввиду особой структуры задачи о назначениях применение данных алгоритмов требует значительных временных затрат для задач большой размерности. Поэтому для нахождения оптимального решения задачи с простейшей линейной моделью обычно применяют стандартные алгоритмы, учитывающие специфику ее ограничений и целевой функции, например, венгерский метод и метод Мака.

Стандартные алгоритмы поиска оптимального решения задачи о назначениях базируются на ряде теорем.

Теорема 1. Оптимальное решение задачи о назначениях не изменится, если к любой строке или столбцу матрицы затрат **C** прибавить (или вычесть) постоянную величину.

Теорема 2. Пусть все элементы матрицы затрат **C** неотрицательны. Если с помощью эквивалентных преобразований матрицы затрат **C** можно построить новую матрицу с нулевыми элементами и эти нулевые элементы соответствуют допустимому решению, то такое решение будет оптимальным.

Сущность венгерского метода заключается в эквивалентных преобразованиях матрицы затрат, установленных теоремой 1, до тех пор, пока все подлежащие распределению назначения не попадут в клетки с нулевыми затратами (теорема 2). Венгерский метод – это эффективный полиномиальный метод решения. Вместе с тем венгерский метод основан на довольно трудных и нетривиальных комбинаторных свойствах матриц (проведение минимального числа прямых, вычеркивающих нулевые элементы, само по себе является сложной оптимизационной задачей), в связи с чем его довольно трудно программировать.

Метод Мака имеет преимущество более простого интуитивного обоснования и предполагает в качестве начального допустимого базисного решения рассматривать минимальные элементы в каждой строке. Эквивалентные преобразования, установленные теоремой 1, используются, чтобы распределить минимальные элементы строк по разным столбцам, образуя оптимальный выбор [2]. Метод Мака чаще используется при решении задач о назначениях большой размерности, поскольку позволяет устранить проблемы, возникающие при реализации венгерского метода.

Разработана программа поиска решения простейшей линейной задачи о назначениях средствами математического пакета «Mathcad» (листинг 1).

Листинг 1 – Алгоритм поиска оптимального решения простейшей линейной задачи о назначениях

```
ORIGIN := 1

n := 5                                  / количество исполнителей и работ

C := | for  i ∈ 1 .. n                  / матрица затрат
     |   for  j ∈ 1 .. n
     |     C[i,j] ← round(rnd(100))
     | C

e(i, j) := 1
a := matrix(n, 1, e)
b := matrix(n, 1, e)
```

$$f(X) := \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left(C_{i,j} \cdot X_{i,j}\right) \qquad \text{/ целевая функция}$$

```
X[n,n] := 0

Given                                   / блок решения
  X·a = b                               / ограничения
  X^T·a = b
  X ≥ 0
  X := Minimize(f, X)                   / оптимальное решение
```

Решение простейшей линейной задачи о назначениях в пакете «Mathcad» осуществляется с помощью встроенной функции «Minimize», возвращающей матрицу искомых значений неизвестных, при которых исследуемая целевая функция имеет минимальное значение. При использовании функции «Minimize» автоматически определяется тип задачи математического программирования (линейная или нелинейная) и подбирается подходящий алгоритм оптимизации из группы доступных методов. Если задача линейная, как в приведенном случае, то применяется симплекс-метод. Результаты работы программы приведены на рисунке 1:

Матрица затрат: $$C = \begin{pmatrix} 49 & 74 & 62 & 80 & 58 \\ 91 & 73 & 67 & 32 & 31 \\ 11 & 85 & 15 & 8 & 64 \\ 55 & 41 & 47 & 15 & 74 \\ 83 & 87 & 30 & 13 & 78 \end{pmatrix}$$

Оптимальное решение: $$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Оптимальное значение целевой функции: $f(X) = 149$

Рисунок 1 – Исходные данные и решение простейшей линейной задачи о назначениях

Достоинствами приведенного способа решения простейшей линейной задачи о назначениях является наглядность и несложность программирования при увеличении размерности задачи.

1.5 Анализ моделей и алгоритмов решения задач о назначениях

Как правило, большинство модификаций и обобщений простейшей линейной задачи о назначениях вытекают из практических нужд. Следствием прикладной направленности задачи является многообразие ее моделей. Различные виды моделей задач о назначениях можно классифицировать по ряду признаков (рисунок 2).

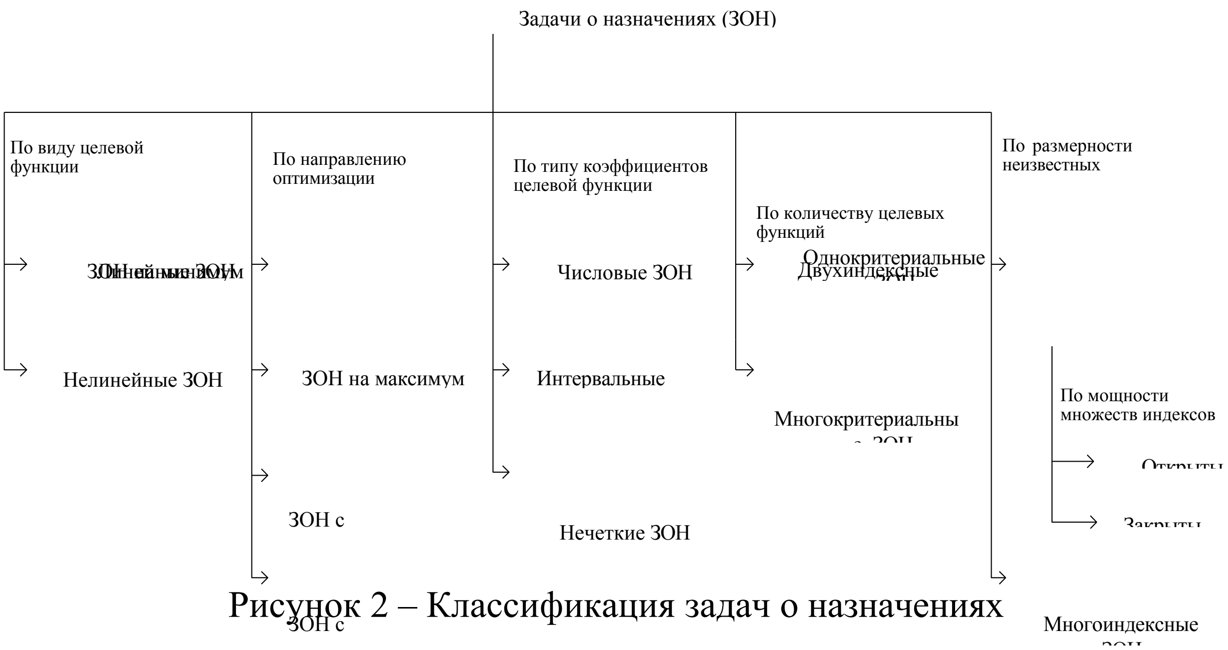

Рисунок 2 – Классификация задач о назначениях

По виду целевой функции можно выделить два основных класса задач:

– линейные задачи о назначениях;

– нелинейные задачи о назначениях.

Задача о назначениях с линейной целевой функцией широко применяется во многих областях практической деятельности и имеет множество интерпретаций: подбор кадрового персонала и трудоустройство населения [3, 4], отбор контрагентов на конкурсной основе [5, 6], распределение продавцов по торговым точкам [7], назначение транспорта на маршруты [8] и пр. Наиболее изученной является простейшая линейная задача, определяемая соотношениями (1) – (4), для которой разработаны многочисленные точные алгоритмы решения.

Среди нелинейных задач весьма широкие области приложения имеет класс задач с квадратичной целевой функцией. В одной из частых постановок она рассматривается как задача о размещении производственных объектов по локациям [9]. Для каждой пары локаций задано расстояние, для каждой пары производственных объектов задан вес или поток (например, количество продукции, перевозимой между двумя производствами). Требуется расставить производства по локациям таким образом, что сумма расстояний, умноженных на соответствующие потоки, будет минимальной, при этом два производства нельзя размещать в одном месте. Задачи о назначениях с квадратичной целевой функцией возникают при проектировании и оптимизации логистической системы предприятий, размещении вычислительных задач в узлах распределенной вычислительной среды, проектировании генеральных планов предприятий, расчете оптимального расположения технологического оборудования в цехах и т.д.

Квадратичная задача о назначениях относится к классу NP-полных задач. Для точного решения задачи применяются модифицированные методы комбинаторного анализа и целочисленного программирования [10, 11, 12]. Разработан ряд эвристических алгоритмов, позволяющих найти субоптимальное решение, например, алгоритм «табу-поиска» [13, 14], итеративный локальный поиск [15, 16, 17], Для поиска решения часто используются генетические алгоритмы [18, 19, 20], муравьиный алгоритм [21, 22], алгоритмы на основе нейронных сетей [23]. Многие исследования связаны с разработкой алгоритмов решения квадратичной задачи о назначениях на графах и сетях. Постановка в терминах теории графов удобна, когда специфика прикладной задачи предполагает наличие специальных структур связей между объектами [24]. Показано, что если графы связей и расстояний являются изоморфными деревьями, то квадратичная задача о назначениях разрешима за полиномиальное время алгоритмом динамического программирования [10]. В [25] предложен алгоритм локальной оптимизации для задачи о назначениях на двудольных графах. В [26, 27] предложен ряд полиномиальных алгоритмов решения квадратичной задачи о назначениях для специальных видов графов и сетей. В частности, рассматривается размещение цепи и цикла на древовидной взвешенной сети. В [24] предложен параллельный алгоритм динамического программирования решения квадратичной задачи о назначениях с минисуммным критерием для графа связей общей структуры с произвольными весами ребер на древовидной сети с равными весами. Дальнейшее обобщение вида целевых функций приводит к кубическим и биквадратным (четвертые степени) задачам о назначениях [28, 29].

По направлению оптимизации можно выделить следующие классы задач:

- задачи о назначениях с целевой функцией на минимум;
- задачи о назначениях с целевой функцией на максимум;
- задача о назначениях с минимаксным критерием;
- задача о назначениях с максиминным критерием.

Направление оптимизации целевой функции зависит от того, что понимается под эффективностью выполнения работ в той или иной задаче. Во многих случаях, в том числе и в простейшей линейной постановке, задача о назначениях заключается в распределении работ по исполнителям с целью минимизации суммарных затрат. Если же эффективность выполнения работ оценивается приносимой прибылью, то за целевую функцию принимается суммарная прибыль, которую следует максимизировать. Обычно решение такой задачи основывается на переходе к матрице, эквивалентной исходной, коэффициенты которой имеют смысл потерь прибыли от максимально возможной и дальнейшей минимизации потери прибыли [30, 31].

Минимаксный критерий возникает, когда важно минимизировать максимальное из значений потерь [10]. Алгоритм решения минимаксной задачи, описанный в [32], представляет собой модификацию алгоритма Дейкстры. В [33] предложен алгоритм решения минимаксной задачи о назначениях на графах, который в случае открытой минимаксной задачи о назначениях является полиномиальным. В [34] описан алгоритм решения минимаксной задачи высокой размерности, результатом применения которого является получение множества решений, оптимальных по Парето. В [35] предложены использующие многокритериальные схемы компромисса алгоритмы решения максиминной задачи о назначениях.

По типу коэффициентов целевой функции можно выделить следующие классы задач:

– детерминированные задачи о назначениях, в которых коэффициенты целевой функции являются числами;

– интервальные задачи о назначениях, в которых коэффициенты целевой функции заданы числовыми интервалами;

– нечеткие задачи о назначениях, в которых коэффициенты целевой функции являются нечетким числами (интервалами).

Подавляющее большинство задач о назначениях содержат целевую функцию с числовыми коэффициентами. Между тем, на практике встречаются такие задачи, коэффициенты целевых функции которых известны лишь с той или иной степенью неопределенности. Здесь возникают интервальные и нечеткие задачи о назначениях. В связи с естественной множественностью неточно поставленных целей, для таких задач нет единого подхода в определении понятия оптимальности решения, что обусловливает многообразие алгоритмов решения [36 – 42]. При этом наиболее часто используется детерминизационный подход к оптимизации интервальных или нечетко определенных функций.

По количеству целевых функций можно выделить:

– однокритериальные задачи о назначениях;

– многокритериальные задачи о назначениях.

Многокритериальность часто возникает при формализации различных прикладных проблем. Так, в [43] описана многокритериальная постановка задачи о назначениях на предфрактальном графе, формализующая задачу конкурсного отбора проектов со сложными связями между заказчиками и исполнителями, и предложен алгоритм выделения совершенного паросочетания. В [44] задача составления расписания учебных занятий с учетом дополнительных требований рассматривается как многокритериальная задача о назначениях. Для поиска решения такой задачи используется генетический алгоритм. В [45] представлена двухкритериальная модель задачи о назначениях с формализованным дополнительным требованием учета предпочтений соискателя вакансии при подборе места работы. Алгоритм решения такой задачи основан на использовании метода гарантированного результата с последующим переходом к двойственной задаче и применением алгоритма Удзавы.

Многие работы посвящены обоснованию используемой схемы компромисса [35, 46, 47, 48, 49]. Например, в [50] для определения назначений при оперативном планировании в редакционном отделе крупного издательства с учетом интересов членов коллектива в качестве критерия решения задачи рассматривается выбор наиболее близких по своим векторным характеристикам пар «объект – субъект». Также известны работы, связанные с проблемой нормирования критериев [51].

По размерности неизвестных можно выделить следующие классы задач:

– двухиндексные задачи о назначениях;

– многоиндексные задачи о назначениях.

Типичной является постановка двухиндексной задачи о назначениях, решением которой является матрица. Двухиндексные задачи, в свою очередь, можно подразделить на закрытые и открытые. В закрытых моделях количество работ равно количеству исполнителей, в открытых моделях – не равно. Открытые модели часто моделируют наличие конкуренции [5, 52, 53] и легко сводятся к закрытым путем дополнения матрицы затрат нулями до квадратной, что соответствует правилам приведения открытой модели транспортной задачи к закрытой.

Многоиндексные задачи о назначениях возникают при оптимизации работы последовательно-параллельной системы обслуживания [54], в области технического анализа данных при сопровождении объектов в многосенсорных системах [55], при назначении целей для нанесения максимального поражения противнику [56] и др.

К настоящему моменту более изучен подкласс трехиндексных задачи о назначениях. В зависимости от вида ограничений выделяют аксиальные и планарные трехиндексные задачи. Трѐхиндексная аксиальная задача о назначениях состоит в таком выборе n элементов кубической матрицы c_{ijk} порядка n (по одному в каждом сечении), чтобы сумма выбранных элементов была минимальна. В классической трѐхиндексной планарной задаче о назначениях требуется выбрать n^2 элементов указанной матрицы так, чтобы в каждом её сечении было выбрано ровно n элементов и при этом сумма выбранных элементов минимальна [57].

И аксиальные и планарные трехиндексные задачи являются NP-трудными. Исследованы свойства многогранника ограничений этих задач, ставшие основой для разработки алгоритмов локального поиска и частичного перебора типа метода ветвей и границ [10, 58, 59, 60]. Известны эвристические алгоритмы решения [61, 62, 63], многие из которых являются модификациями точных методов, примененных как приближенные. В [64, 65] представлен асимптотически точный подход к построению алгоритмов решения аксиальных многоиндексных задач большой размерности на случайных входах. В [66] предложен адаптивный алгоритм решения трѐхиндексной аксиальной задачи о назначениях, основанный на переходе к задачи в вероятностной постановке. В [67] описан асимптотически точный алгоритм решения модифицированной трѐхиндексной планарной задачи о назначениях. В [68] рассмотрена многокритериальная трехиндексная планарная задача о назначениях, для которой предложен и обоснован полиномиальный алгоритм нахождения асимптотически идеального решения, векторная оценка которого стремится (в смысле относительной погрешности) к идеальной точке.

Таким образом, многообразие математических моделей задач о назначениях, обусловленное их прикладной направленностью, порождает огромное число алгоритмов их решения. Активно исследуются новые постановки задачи, развиваются точные и приближенные алгоритмы их решения, выделяются полиномиально разрешимые случаи.

1.6 Анализ эквивалентных преобразований моделей задач о назначениях

Отдельным направлением исследований является разработка алгоритмов решения, основанных на эквивалентных преобразованиях, специфических для задачи о назначениях. Подобный подход использован при нахождении оптимального решения задачи с целевой функцией на максимум [7, 10, 30], открытой задачи [5, 48, 53], задачи матрицей затрат, на элементы которой не накладывается условие неотрицательности [69], задачи с запретами на отдельные назначения [7, 45, 48]. Анализ этих задач позволяет сформулировать эквивалентные преобразования, специфические для задачи о назначениях, а также построить обобщенные линейные задачи, модели которых эквивалентны простейшей линейной модели.

Рассмотрим задачу о назначениях, целевая функция которой стремится к максимуму. Пусть математическая модель задачи имеет вид:

$$f(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to \max, \qquad (5)$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad j = \overline{1, n}, \qquad (6)$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad i = \overline{1, n}, \qquad (7)$$

$$x_{ij} \in \{0,1\}, \quad i, j = \overline{1, n}\,. \qquad (8)$$

Эквивалентное преобразование направления целевой функции формулируется так:

1) в каждой строке матрицы $\mathbf{C}$ найти наибольший элемент

$$\max_i = \max_j c_{ij}, \qquad j = \overline{1, n};$$

2) перейти к матрице затрат $\mathbf{Q}$, построенной по правилу:

$$q_{ij} = \max_i - c_{ij}, \qquad i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, n}\,.$$

Результатом применения данного преобразования является переход к модели вида:

$$\varphi(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} q_{ij} x_{ij} \to \min, \qquad (9)$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad j = \overline{1, n}, \qquad (10)$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad i = \overline{1, n}, \qquad (11)$$

$$x_{ij} \in \{0,1\}, \quad i,j = \overline{1,n}\,. \tag{12}$$

Модели (5) – (8) и (9) – (12) эквивалентны друг другу, при этом модель (9) – (12) является простейшей линейной. Отсюда можно сформулировать алгоритм решения задачи о назначениях (5) – (8).

1. Применить к модели (5) – (8) эквивалентное преобразование направления целевой функции. Результатом является получение эквивалентной модели (9) – (10).

2. Решить задачу, описываемую соотношениями (9) – (10), венгерским методом или методом Мака.

Средствами математического пакета «Mathcad» разработана программа поиска решения задачи о назначениях с целевой функцией на максимум (листинг 2).

Листинг 2 – Поиск решения задачи о назначениях с целевой функцией на максимум

```
ORIGIN := 1
n := 5
C := | for i ∈ 1..n
     |   for j ∈ 1..n
     |     C[i,j] ← round(rnd(100))
     | C

Max := | for i ∈ 1..n                          / нахождение наибольших элементов каждой строки
       |   Max[i] ← max[(C^T)^<i>]                исходной матрицы затрат
       | Max

Q := | for i ∈ 1..n                            / преобразование матрицы затрат
     |   for j ∈ 1..n
     |     Q[i,j] ← Max[i] − C[i,j]
     | Q

e(i,j) := 1      a := matrix(n,1,e)      b := matrix(n,1,e)
```

$$\varphi(X) := \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left(Q_{i,j} \cdot X_{i,j}\right)$$

```
X[n,n] := 0
Given
    X·a = b
    X^T·a = b
    X ≥ 0
    X := Minimize(φ,X)
```

С помощью предложенного алгоритма найдено оптимальное решение задачи о назначениях.

Матрица затрат исходной задачи:

$$C = \begin{pmatrix} 78 & 100 & 61 & 27 & 84 \\ 38 & 68 & 1 & 28 & 59 \\ 84 & 48 & 74 & 46 & 74 \\ 60 & 74 & 57 & 15 & 43 \\ 52 & 75 & 17 & 49 & 70 \end{pmatrix}$$

Матрица затрат, полученная в результате эквивалентного преобразования:

$$Q = \begin{pmatrix} 22 & 0 & 39 & 73 & 16 \\ 30 & 0 & 67 & 40 & 9 \\ 0 & 36 & 10 & 38 & 10 \\ 14 & 0 & 17 & 59 & 31 \\ 23 & 0 & 58 & 26 & 5 \end{pmatrix}$$

Оптимальное решение преобразованной задачи:

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Рисунок 3 – Оптимальное решение задачи о назначениях на максимум

Найденное решение совпадает с решением задачи (5) – (8) симплекс-методом, оптимальные значения целевых функций также совпадают (рисунок 4).

$$f(Y) := \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left(C_{i,j} \cdot Y_{i,j}\right)$$

$$Y_{n,n} := 0$$

Given

$$Y \cdot a = b$$

$$Y^T \cdot a = b$$

$$Y \geq 0$$

$$Y := \mathrm{Maximize}(f, Y)$$

Оптимальное решение исходной задачи:

$$Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Оптимальное значение целевой функции исходной задачи: $f(Y) = 393$

Оптимальное значение целевой функции преобразованной задачи: $f(X) = 393$

Рисунок 4 – Решение исходной задачи

Рассмотрим открытую задачу о назначениях. Такая задача предполагает, что матрица затрат $\mathbf{C} = (c_{ij})_{m\times n}$ не является квадратной, т.е. $m \neq n$. Для определенности положим $m > n$, что содержательно описывает наличие конкуренции. Тогда математическая модель открытой задачи о назначениях имеет следующий вид:

$$f(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to \min, \tag{13}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = 1,\ j = \overline{1, n}, \tag{14}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le 1,\ i = \overline{1, m}, \tag{15}$$

$$x_{ij} \in \{0,1\},\quad i = \overline{1, m},\ j = \overline{1, n}. \tag{16}$$

Знак неравенства во втором ограничении обусловлен тем, что в условиях конкуренции работа будет найдена не для всех исполнителей.

Эквивалентное преобразование прямоугольной матрицы затрат в квадратную соответствует правилам приведения открытой модели транспортной задачи, частным случаем которой является задача о назначениях, к закрытой модели и формулируется так:

1) определить порядок матрицы затрат $\mathbf{C}$ в закрытой модели

$$p = \max\{m, n\};$$

2) перейти к матрице затрат $\mathbf{Q} = (q_{ij})_{p\times p}$, построенной по правилу:

$$q_{ij} = \begin{cases} c_{ij}, & i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}; \\ 0, & i = \overline{1, p}, j = \overline{n+1, p}, \quad \text{если } m > n; \\ 0, & i = \overline{m+1, p}, \quad j = \overline{1, p}, \quad \text{если } m < n. \end{cases}$$

Результатом применения преобразования является переход к простейшей линейной модели вида:

$$\varphi(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{p} q_{ij}x_{ij} \to \min, \tag{17}$$

$$\sum_{i=1}^{p} x_{ij} = 1, \quad j = \overline{1,p}, \tag{18}$$

$$\sum_{j=1}^{p} x_{ij} = 1, \quad i = \overline{1,p}, \tag{19}$$

$$x_{ij} \in \{0,1\}, \quad i,j = \overline{1,p}. \tag{20}$$

Модели (13) – (16) и (17) – (20) эквивалентны друг другу. Отсюда можно сформулировать алгоритм решения задачи о назначениях (13) – (16).

1. Применить к модели (13) – (16) эквивалентное преобразование прямоугольной матрицы затрат в квадратную. Результатом является получение эквивалентной модели (17) – (20).

2. Решить задачу, описываемую соотношениями (17) – (20), венгерским методом или методом Мака.

3. В полученном решении выделить подматрицу (x_{ij}), $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$. Данная подматрица является оптимальным решением открытой задачи о назначениях.

Текст программы для нахождения решения открытой задачи о назначениях средствами математического пакета «Mathcad» представлен в Приложении А. Результаты работы программы представлены на рисунке 5.

Исходная матрица затрат:

$$C = \begin{pmatrix} 73 & 28 & 68 \\ 72 & 12 & 83 \\ 52 & 43 & 95 \\ 55 & 47 & 85 \\ 46 & 98 & 74 \\ 20 & 84 & 50 \end{pmatrix}$$

Матрица затрат, полученная в результате эквивалентного преобразования:

$$Q = \begin{pmatrix} 73 & 28 & 68 & 0 & 0 & 0 \\ 72 & 12 & 83 & 0 & 0 & 0 \\ 52 & 43 & 95 & 0 & 0 & 0 \\ 55 & 47 & 85 & 0 & 0 & 0 \\ 46 & 98 & 74 & 0 & 0 & 0 \\ 20 & 84 & 50 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Оптимальное решение исходной задачи:

$$Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Оптимальное решение преобразованной задачи:

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Оптимальное значение целевой функции исходной задачи:

$f(Y) = 100$

Оптимальное значение целевой функции преобразованной задачи:

$\varphi(X) = 100$

Рисунок 5 – Результаты поиска решения открытой задачи о назначениях

Рассмотрим задачу о назначениях, в которой элементы матрицы **C** могут быть произвольного знака. Это отвечает ситуации, когда практический смысл этих элементов заключается, например, в перерасходе ресурсов (денежных, временных и пр.). В этом случае отрицательные элементы матрицы **C** будут означать экономию ресурсов.

Пусть математическая модель задачи о назначениях с элементами матрицы затрат произвольного знака имеет вид:

$$f(\mathbf{X}) = \sum_{i=1} \sum_{j=1} c_{ij} x_{ij} \to \min, \tag{21}$$

$$\sum_{i=1} x_{ij} = 1, \quad j = \overline{1, n}, \tag{22}$$

$$\sum_{j=1} x_{ij} = 1, \quad i = \overline{1, n}, \tag{23}$$

$$x_{ij} \in \{0,1\}, \quad i, j = \overline{1, n}, \tag{24}$$

где $c_{ij} \geq\leq 0$.

Эквивалентное преобразование матрицы затрат с элементами произвольного знака в матрицу затрат с неотрицательными элементами основано на теореме 1 и формулируется так:

1) найти минимальный элемент матрицы $\mathbf{C}$:

$$\min = \min_{ij} c_{ij}, \quad i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, n}.$$

2) перейти к матрице затрат $\mathbf{Q}$, построенной по правилу:

$$q_{ij} = c_{ij} - \min, \quad i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, n}.$$

Результатом применения данного преобразования является переход к простейшей линейной модели вида:

$$f(\mathbf{X}) = \sum^{n} \sum^{n} q_{ij} x_{ij} \to \min, \tag{25}$$

$$\sum^{n} x_{ij} = 1, \quad j = \overline{1, n}, \tag{26}$$

$i = 1$

$$\sum_{j=1} x_{ij} = 1, \quad i = \overline{1, n}, \tag{27}$$

$$x_{ij} \in \{0,1\}, \quad i, j = \overline{1, n}, \tag{28}$$

где $q_{ij} \geq 0$.

Модели (25) – (28) и (21) – (24) эквивалентны друг другу. Отсюда можно описать алгоритм решения задачи о назначениях (21) – (24).

1. Применить к модели (21) – (24) эквивалентное преобразование матрицы затрат с элементами произвольного знака в матрицу затрат с неотрицательными элементами. Результатом является получение эквивалентной модели (25) – (28).

2. Решить задачу, описываемую соотношениями (25) – (28), венгерским методом или методом Мака.

Текст программы для нахождения решения задачи о назначениях с элементами матрицы затрат произвольного знака средствами математического пакета Mathcad представлен в Приложении Б. Результаты работы программы представлены на рисунке 6.

Исходная матрица затрат:

$$C = \begin{pmatrix} -22 & 35 & 46 & 67 & -31 \\ 35 & 29 & 15 & 16 & -27 \\ -23 & -32 & 55 & -55 & -54 \\ -67 & -63 & -58 & -40 & 60 \\ 32 & -52 & 8 & 39 & 24 \end{pmatrix}$$

Минимальный элемент исходной матрицы:

$$\mathrm{Min} = -67$$

Преобразованная матрица затрат:

$$Q = \begin{pmatrix} 45 & 102 & 113 & 134 & 36 \\ 102 & 96 & 82 & 83 & 40 \\ 44 & 35 & 122 & 12 & 13 \\ 0 & 4 & 9 & 27 & 127 \\ 99 & 15 & 75 & 106 & 91 \end{pmatrix}$$

Оптимальное решение:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Оптимальное значение целевой функции:

$$f(X) = 121$$

Рисунок 6 – Результаты поиска оптимального решения задачи о назначениях с элементами матрицы затрат произвольного знака

Рассмотрим задачу с недопустимыми назначениями. Пусть имеется n работ и n исполнителей. Положим, что в силу определенных обстоятельств некоторые назначения являются недопустимыми, например, в силу конфликта интересов в сфере закупок.

Обозначим через $I = \{1,2,.., n\}$ множество индексов исполнителей и работ. На множестве I установим бинарное отношение допустимых назначений

$$R_{д.\,н.} = \{(i, j) \mid \text{назначение } (i, j) \text{ допустимо}\},$$

и наложим на неизвестные x_{ij}, представляющие назначение исполнителя i на работу j, дополнительное ограничение:

$$x_{ij} = 0, \text{ если } (i, j) \notin R_{д.\,н.},$$

где $i = 1,..., n$, $j = 1,..., n$.

Тогда математическая модель задачи с недопустимыми назначениями принимает вид:

$$f(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to \min, \tag{29}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \ j = \overline{1, n}, \tag{30}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \ i = \overline{1, n}, \tag{31}$$

$$x_{ij} = 0, \ (i, j) \notin R_{д.\,н.}, \tag{32}$$

$$x_{ij} \in \{0,1\}, \ (i, j) \in R_{д.\,н.}. \tag{33}$$

Сформулированная модель отличается от простейшей линейной тем, что её неизвестные, отвечающие парам индексов $(i, j) \notin R_{д.\,н.}$, заранее полагаются равными нулю. В [48] показано, что для перехода к простейшей линейной модели достаточно перейти к матрице затрат $\mathbf{Q}_{n\times n}$, связанной с отношением

$R_{д.\,н.}$ таким образом:

$$q_{ij} = \begin{cases} c_{ij}, \text{ если } (i,j) \in R_{д.\,н.}, \\ M, \text{ если } (i,j) \notin R_{д.\,н.}, \end{cases}$$

где M – достаточно большое положительное число.

Введение матрицы $\mathbf{Q}$ имеет следующий смысл. Неизвестная x_{ij}, такая, что $(i,j) \notin R_{д.\,н.}$, будет «штрафоваться» путем ввода в целевую функцию выражения Mx_{ij}. Вследствие этого штрафа процесс оптимизации приведет к нулевому значению неизвестной x_{ij}, $(i,j) \notin R_{д.\,н.}$. Теоретически применение штрафа требует, чтобы $M \to \infty$. Однако с точки зрения практических вычислений величина M должна быть конечной и, вместе с тем, достаточно большой, но при этом не слишком большой, чтобы не уменьшить точность вычислений. В [48] показано, что в качестве штрафа можно взять число $M > n \max\limits_{\forall (i,j) \in R} c_{ij}$. Для определенности будем полагать, что $M = 2n \max\limits_{\forall (i,j) \in R} c_{ij}$.

Тогда эквивалентное преобразование недопустимых назначений формулируется так:

1) найти размер штрафа $M = 2n \max\limits_{\forall (i,j) \in R} c_{ij}$;

2) перейти к матрице затрат $\mathbf{Q}$, построенной по правилу:

$$q_{ij} = \begin{cases} c_{ij}, \text{ если } (i,j) \in R_{д.\,н.}, \\ M, \text{ если } (i,j) \notin R_{д.\,н.}. \end{cases}$$

Результатом применения преобразования является переход к простейшей линейной модели вида:

$$\varphi(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} q_{ij} x_{ij} \to \min, \qquad (34)$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \ j = \overline{1,n}, \qquad (35)$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \ i = \overline{1,n}, \qquad (36)$$

$$x_{ij} \in \{0,1\}, \ i,j = \overline{1,n}. \qquad (37)$$

Модели (29) – (33) и (34) – (37) эквивалентны друг другу. Можно сформулировать алгоритм решения задачи о назначениях (29) – (33) :

1. Применить к модели (29) – (33) эквивалентное преобразование недопустимых назначений. Результатом является получение эквивалентной модели (34) – (37).

2. Решить задачу, описываемую соотношениями (34) – (37), венгерским методом или методом Мака.

Текст программы для нахождения решения задачи с недопустимыми назначениями средствами математического пакета «Mathcad» представлен в приложении В. Результаты работы программы представлены на рисунке 7.

Матрица бинарного отношения "допустимые назначения"

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Исходная матрица затрат:

$$C = \begin{pmatrix} 59 & 84 & 48 & 74 & 0 \\ 74 & 60 & 0 & 57 & 15 \\ 43 & 52 & 75 & 17 & 0 \\ 0 & 15 & 14 & 69 & 43 \\ 97 & 15 & 82 & 19 & 0 \end{pmatrix}$$

Размер штрафа:

$$M = 970$$

Преобразованная матрица затрат:

$$Q = \begin{pmatrix} 59 & 84 & 48 & 74 & 970 \\ 74 & 60 & 970 & 57 & 15 \\ 43 & 52 & 75 & 17 & 970 \\ 970 & 15 & 14 & 69 & 43 \\ 97 & 15 & 82 & 19 & 970 \end{pmatrix}$$

Оптимальное решение:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Оптимальное значение целевой функции:

$$\varphi(X) = 120$$

Рисунок 7 – Результаты поиска оптимального решения задачи с недопустимыми назначениями

Подводя итоги анализа, важно отметить, что применение выделенных эквивалентных преобразований позволяет расширить подмножество задач о назначениях, для решения которых можно применять эффективные стандартные алгоритмы.

Выводы

Задача о назначениях широко используется в прикладной деятельности и имеет множество интерпретаций. Следствием прикладной направленности задачи является многообразие описывающих ее математических моделей, многие из которых носят нетривиальный характер.

Существуют стандартные алгоритмы поиска оптимального решения задачи о назначениях с простейшей линейной моделью, позволяющие получить точное решение за полиномиальное время, например, венгерский метод и метод Мака. Однако формулировка большинства прикладных задач о назначениях не удовлетворяет простейшей линейной модели, требует ее обобщения, введения дополнительных ограничений. Часто предложенные алгоритмы решения обобщенных задач о назначениях характеризуются громоздкостью используемого математического аппарата, а также не всегда гарантируют нахождения оптимального решения, что может привести к значительным экономическим потерям в контексте многих прикладных задач.

Математические модели задач о назначениях можно упростить с помощью эквивалентных преобразований. Некоторые задачи о назначениях (задача с целевой функцией на максимум, открытая задача, задача с матрицей затрат, на элементы которой не накладывается условие неотрицательности, задачи с запретами на отдельные назначения) с помощью эквивалентных преобразований можно привести к простейшему линейному виду и решить уже существующими полиномиальными алгоритмами, например, венгерским или методом Мака.

Выделение эквивалентных преобразований, специфических для задачи о назначениях, и математическое описание подмножества задач о назначениях, математическая модель которых эквивалентна простейшей линейной, позволит расширить класс задач, которые можно решить уже существующими эффективными полиномиальными алгоритмами, например, венгерским или методом Мака.

2 Модели и алгоритмы решения однокритериальных обобщенных линейных задач о назначениях

2.1 Модель и алгоритм решения задачи с недопустимыми комбинациями назначений

Обобщим задачу, описываемую соотношениями (29) – (33). Будем полагать, что вследствие некоторых условий, например, ввиду защиты конкуренции или особенностей технологии производства, запрещены некоторые комбинации назначений.

Пусть имеется n работ и n исполнителей. Известны трудовые затраты c_{ij} на выполнение i-м исполнителем j-й работы ($i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,n}$). Каждый исполнитель может быть назначен только на одну работу, каждая работа может быть выполнена только одним исполнителем, при этом некоторые назначения одновременно невозможны. Требуется распределить работы так, чтобы они были исполнены с минимальными затратами.

Совокупность одновременно невозможных назначений назовем недопустимой комбинацией. Формально каждой такой комбинации соответствует бинарное отношение $R^{н.к.}_k = \{(i, j)\}$ на множестве индексов $I = \{1,2,.., n\}$, представляющее собой совокупность пар (i, j), на которые не разрешено одновременно делать назначения, $R^{н.к.}_k \subset I \times I$. Совокупность комбинаций недопустимых назначений обозначим через $R^{н.к.}$, $R^{н.к.} = \{R^{н.к.}_k \mid k = \overline{1, K}\}$.

В допустимом решении не могут присутствовать назначения, составляющие комбинации $R^{н.к.}_k \in R^{н.к.}$. Данное требование можно записать так:

$$\sum_{(i,j)\in R^{н.к.}_k} x_{ij} \le \left| R^{н.к.}_k \right| - 1, \quad k = \overline{1, K}.$$

Эти ограничения гарантируют отсутствие в искомом решении недопустимых комбинаций. Тогда математическая модель задачи с недопустимыми комбинациями назначений принимает вид:

$$f(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to \min, \tag{38}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \; j = \overline{1, n}, \tag{39}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \; i = \overline{1, n}, \tag{40}$$

$$\sum_{(i,j)\in R_k^{н.к.}} xij \le \left| R_k^{н.к.} \right| - 1, \quad k = \overline{1, K}, \tag{41}$$

$$x_{ij} \in \{0,1\}, \; i, j = \overline{1, n}. \tag{42}$$

Данная задача представляет собой совокупность L задач с недопустимыми назначениями. Каждую отдельную задачу можно представить в виде простейшей линейной модели:

$$\varphi_l(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} q^l_{ij} x_{ij} \to \min,$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad j = \overline{1, n},$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad i = \overline{1, n},$$

$$x_{ij} \in \{0,1\}, \; i, j = \overline{1, n},$$

где

$\mathbf{Q}^l = (q^l_{ij})$ – матрица затрат l-й задачи с недопустимыми назначениями, $l = \overline{1, L}$.

Матрица затрат $\mathbf{Q}^l$ получается из исходной матрицы $\mathbf{C}$ следующим образом:

– в каждой комбинации $R_k^{н.к.}$, $k = \overline{1, K}$, фиксируется пара индексов, обозначим ее как $(i, j)^*$;

– в матрице затрат на данное место ставится штраф, в качестве которого можно взять число $M > n \cdot \max cij$.

Для определенности будем полагать $M = 2n \cdot \max cij$. В результате получаем

$$q^l = \begin{cases} M, \text{ если } (i, j) \in R_k^{н.к.}, & (i, j) = (i, j)^*_k, \ k = \overline{1, K}; \\ c_{ij} \text{ иначе.} \end{cases}$$

Определим количество L полученных задач. Зафиксировать пару индексов в комбинации $_1^{н.к.}$ можно $\left| _1^{н.к.} \right|$ способами, зафиксировать пару индексов в комбинации $_2^{н.к.}$ можно $\left| _2^{н.к.} \right|$ способами и т.д. По основному правилу комбинаторики получаем

$$L = | R_1^{н.к.} | \cdot | R_2^{н.к.} | \cdot \ldots \cdot | R_K^{н.к.} | .$$

Каждую из полученных задач можно решить венгерским методом или методом Мака. Оптимальным решением является та матрица назначений, которой соответствует минимальное значение целевой функции $\varphi_l(\mathbf{X})$, $l = \overline{1, L}$.

Эквивалентное преобразование задачи с недопустимыми комбинациями в совокупность L простейших линейных задач с формулируется так:

1) найти размер штрафа $M = 2n \cdot \max cij$;

2) последовательно фиксируя в каждой комбинации $_k^{н.к.}$ пару индексов $(i, j)^*$, построить L простейших линейных задач

$$\varphi_l(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} q_{ij}^l x_{ij} \to \min, \tag{43}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \ j = \overline{1, n}, \tag{44}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \ i = \overline{1, n}, \tag{45}$$

$$x_{ij} \in \{0,1\},\ i,j = \overline{1,n}, \tag{46}$$

$$l = \overline{1,L}, \tag{47}$$

где $L = |R_1^{н.к.}| \cdot |R_2^{н.к.}| \cdot \ldots \cdot |R_K^{н.к.}|$;

$$\varphi_{ij}^{k} = \begin{cases} M, & \text{если } (i,j) \in (i,j) = (i,j)_k^*,\ k = \overline{1,K}; \\ c_{ij} & \text{иначе.} \end{cases}$$

Тогда алгоритм решения задачи о назначениях (38) – (42) имеет вид.

1. Применить к модели (38) – (42) эквивалентное преобразование задачи с недопустимыми комбинациями. Результатом является получение L простейших линейных задач вида (43) – (47).

2. Решить L задач, описываемых соотношениями (43) – (47), венгерским методом или методом Мака.

3. Найти $\min\limits_{l=\overline{1,L}} \varphi l(\mathbf{X})$. Матрица назначений $\mathbf{X}$, соответствующая $\min\limits_{l=\overline{1,L}} \varphi l(\mathbf{X})$, является оптимальным решением задачи с недопустимыми комбинациями назначений.

Разработана программа для нахождения решения задачи с недопустимыми комбинациями назначений средствами математического пакета Mathcad. Рассмотрим работу программы на исходных данных, представленных на рисунке 8.

Исходная матрица затрат:

$$C = \begin{pmatrix} 88 & 87 & 93 & 4 & 86 & 75 & 56 \\ 64 & 24 & 96 & 50 & 80 & 88 & 12 \\ 10 & 97 & 75 & 14 & 72 & 51 & 27 \\ 38 & 80 & 14 & 31 & 38 & 70 & 100 \\ 77 & 24 & 12 & 32 & 82 & 61 & 9 \\ 81 & 72 & 37 & 65 & 49 & 31 & 82 \\ 16 & 36 & 11 & 61 & 17 & 52 & 4 \end{pmatrix}$$

Матрицы бинарных отношений "k-я недопустимая комбинация":

$$R1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad R2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Рисунок 8 – Исходные данные задачи с недопустимыми комбинациями назначений

Применяя описанный выше алгоритм, находим оптимальное решение (рисунок 9).

Число задач, на которые разбивается исходная: $L = 4$

Размер штрафа: $M = 1.4 \times 10^3$

Преобразованные матрицы затрат:

$$Q1 = \begin{pmatrix} 88 & 87 & 93 & 1.4 \times 10^3 & 86 & 75 & 56 \\ 64 & 24 & 96 & 50 & 80 & 88 & 12 \\ 1.4 \times 10^3 & 97 & 75 & 14 & 72 & 51 & 27 \\ 38 & 80 & 14 & 31 & 38 & 70 & 100 \\ 77 & 24 & 12 & 32 & 82 & 61 & 9 \\ 81 & 72 & 37 & 65 & 49 & 31 & 82 \\ 16 & 36 & 11 & 61 & 17 & 52 & 4 \end{pmatrix} \quad Q2 = \begin{pmatrix} 88 & 87 & 93 & 1.4 \times 10^3 & 86 & 75 & 56 \\ 64 & 24 & 96 & 50 & 80 & 88 & 12 \\ 10 & 97 & 75 & 14 & 72 & 51 & 27 \\ 38 & 80 & 14 & 31 & 38 & 70 & 100 \\ 77 & 24 & 12 & 32 & 82 & 61 & 1.4 \times 10^3 \\ 81 & 72 & 37 & 65 & 49 & 31 & 82 \\ 16 & 36 & 11 & 61 & 17 & 52 & 4 \end{pmatrix}$$

$$Q3 = \begin{pmatrix} 88 & 87 & 93 & 4 & 86 & 75 & 56 \\ 64 & 24 & 96 & 50 & 80 & 88 & 12 \\ 1.4 \times 10^3 & 97 & 75 & 14 & 72 & 51 & 27 \\ 38 & 80 & 14 & 31 & 1.4 \times 10^3 & 70 & 100 \\ 77 & 24 & 12 & 32 & 82 & 61 & 9 \\ 81 & 72 & 37 & 65 & 49 & 31 & 82 \\ 16 & 36 & 11 & 61 & 17 & 52 & 4 \end{pmatrix} \quad Q4 = \begin{pmatrix} 88 & 87 & 93 & 4 & 86 & 75 & 56 \\ 64 & 24 & 96 & 50 & 80 & 88 & 12 \\ 10 & 97 & 75 & 14 & 72 & 51 & 27 \\ 38 & 80 & 14 & 31 & 1.4 \times 10^3 & 70 & 100 \\ 77 & 24 & 12 & 32 & 82 & 61 & 1.4 \times 10^3 \\ 81 & 72 & 37 & 65 & 49 & 31 & 82 \\ 16 & 36 & 11 & 61 & 17 & 52 & 4 \end{pmatrix}$$

Оптимальные значения целевых функций простейших линейных задач, на которые разбивается исходная: $\varphi1(X1) = 191$ $\varphi2(X2) = 181$ $\varphi3(X3) = 153$ $\varphi4(X4) = 112$

Оптимальное значение целевой функции исходной задачи: $\mathrm{Min}\varphi = 112$

Оптимальное решение исходной задачи:

$$Xopt = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Рисунок 9 – Результаты поиска оптимального решения задачи с недопустимыми комбинациями назначений

При заданных матрице затрат и множестве недопустимых комбинаций целевая функция задачи с недопустимыми комбинациями назначений достигает минимального значения, равного 112.

Важно отметить, что в общем случае учет недопустимых комбинаций назначений ведет к увеличению значение целевой функции. На рисунке 10 приведено решение простейшей линейной задачи о назначениях, матрица затрат **C** которой совпадает с матрицей затрат задачи с недопустимыми комбинациями назначений:

$$f(X) := \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left(c_{i,j} \cdot X_{i,j}\right)$$

$X_{n,n} := 0$

Given

$X \cdot a = b$

$X^T \cdot a = b$

$X \geq 0$

$X := \text{Minimize}(f, X)$

Оптимальное решение:

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Оптимальное значение целевой функции:

$f(X) = 109$

Рисунок 10 – Результаты поиска оптимального решения простейшей линейной задачи с матрицей затрат **C**

Как видно из рисунка, при одинаковой матрице затрат минимальное значение целевой функции простейшей линейной задачи о назначениях меньше минимального значения целевой функции задачи с недопустимыми комбинациями назначений.

Наложим на задачу (38) – (42) дополнительное ограничение. Будем считать, что в искомом решении может присутствовать не более одного назначения из каждой недопустимой комбинации. Эквивалентное преобразование будет иметь отличие лишь в части правила размещения штрафов в матрицах $\mathbf{Q}^l$:

$$q^l_{ij} = \begin{cases} M, \text{ если } (i,j) \in R^{н.к.}_k, \ (i,j) \neq (i,j)^*_k, \ k = \overline{1,K}; \\ c_{ij} \text{ иначе.} \end{cases}$$

где $l = \overline{1,L}$, $L = |R^{н.к.}_1| \cdot |R^{н.к.}_2| \cdot \ldots \cdot |R^{н.к.}_K|$.

Такой способ построения матриц затрат позволит исключить из искомого решения все назначения из недопустимой комбинации, кроме одного. В общем случае, полагая, что в искомом решении может присутствовать h назначений из каждой недопустимой комбинации, $h < \min\left\{ |R_1^{н.к.}|, |R_2^{н.к.}|, ..., |R_K^{н.к.}| \right\}$., штрафы будут последовательно накладываться на размещения из h элементов комбинации $R_k^{н.к.}$.

2.2 Модель и алгоритм решения задачи с порядком назначений

Добавим к простейшей линейной задаче (1) – (4) дополнительное требование. Будем полагать, что на некоторые работы в силу, например, их важности или срочности, необходимо сделать назначения в первую очередь, и только потом распределять другие работы.

Пусть имеется n работ и n исполнителей. Известны трудовые затраты c_{ij} на выполнение i-м исполнителем j-й работы ($i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,n}$). Каждый исполнитель может быть назначен только на одну работу, каждая работа может быть выполнена только одним исполнителем. Установлен порядок назначений, состоящий в том, сначала делаются назначения на выделенные работы, затем на остальные. Требуется распределить работы так, чтобы они были исполнены с минимальными затратами и с учетом порядка назначений.

Рассмотрим множество $I = \{1,2,.., n\}$ индексов работ. Пусть $P \subset I$ – подмножество индексов работ, распределяемых в первую очередь, $|P| = k$. Без ограничения общности можно полагать, что $P = \{1,2,.., k\}$. Очевидно, этого всегда можно добиться переупорядочиванием столбцов. Пары (i, j) такие, что $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,k}$, подлежат распределению назначений в первую очередь. Обозначим отношение порядка распределения назначений через $\overset{пр.}{<}$. Тогда математическая модель задачи с порядком назначений принимает вид:

$$f(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \rightarrow$$

$$, \quad j = \overline{1, n}$$

$$\sum_{i=1} x_{ij} = 1$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1,\ i = \overline{1, n}, \tag{50}$$

$$xij \in \{0,1\},\quad i = \overline{1, n},\quad j = \overline{1, n}, \tag{51}$$

$$(i, j) \overset{пр.}{<} (i, j^*)\ ,\quad i = \overline{1, n},\quad j = \overline{k+1, n},\quad j^* = \overline{1, k}. \tag{52}$$

Представим данную задачу в виде совокупности двух последовательно решаемых задач – о назначениях на работы из множества P и о назначениях на работы из множества $I \setminus P$. Очевидно, что первая задача представляет собой открытую задачу о назначениях, математическая модель которой имеет вид:

$$\varphi_1(\mathbf{Y}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k} c_{ij}\, y_{ij} \to \min,$$

$$\sum_{i=1}^{n} y_{ij} = 1,\ j = \overline{1, k},$$

$$\sum_{j=1}^{k} y_{ij} \le 1,\ i = \overline{1, n},$$

$$yij \in \{0,1\},\quad i = \overline{1, n}\ ,\ j = \overline{1, k}\ ,$$

где $\mathbf{Y} = (y_{ij})$ – матрица бинарного отношения, описывающего назначение исполнителю работы из множества P .

Используя эквивалентное преобразование прямоугольной матрицы затрат в квадратную, эту модель можно привести к простейшей линейной модели вида:

$$\tilde{\varphi_1}(\mathbf{Y}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} q_{ij}^{1}\, y_{ij} \to \min, \tag{53}$$

$$\sum_{i=1}^{n} y_{ij} = 1,\quad j = \overline{1, n}, \tag{54}$$

$$\sum_{j=1}^{y} y_{ij} = 1,\ i = \overline{1, n}, \tag{55}$$

$$x_{ij} \in \{0,1\},\quad i, j = \overline{1, n}\ , \tag{56}$$

где $$q_{ij} = \begin{cases} c_{ij}, \ i = \overline{1, n}, j = \overline{1, k}; \\ 0, \ i = \overline{1, n}, j = \overline{k+1, n}. \end{cases}$$

Оптимальное решение задачи (53) – (56) можно найти венгерским методом или методом Мака. Обозначим оптимальное решение задачи (53) – (56) через $\mathbf{Y}^* = (y_{ij}^*)$.

Теперь надо сделать назначения по оставшиеся работы. Очевидно, что нельзя назначать тех исполнителей, которые уже заняты на работах из множества P, также нельзя делать назначения на работы из множества P.

Таким образом, задача назначений на работы из множества $I \setminus P$ представляет собой задачу с недопустимыми назначениями.

Обозначим через $I_{н.} \subset I$ подмножество индексов строк, на которые сделаны назначения, $I_{н.} = \{i \mid y_{ij} = 1\}$. На множестве I установим бинарное отношение допустимых назначений

$$R_{д.\,н.} = \{(i, j) \mid i \notin I_{н.}, j \notin P\},$$

и наложим на неизвестные z_{ij}, представляющие назначение исполнителя i на работу j из множества $I \setminus P$, дополнительное ограничение:

$$z_{ij} = 0, \text{ если } (i, j) \notin R_{д.\,н.},$$

где $i = 1,..., n$, $j = 1,..., n$.

Тем самым математическая модель задачи о назначениях на работы из множества $I \setminus P$ принимает вид:

$$\varphi_2(\mathbf{Z}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} z_{ij} \to \min,$$

$$\sum_{i=1}^{n} z_{ij} = 1, \ j = \overline{1, n},$$

$$\sum_{j=1}^{n} z_{ij} = 1, \ i = \overline{1, n},$$

$$z_{ij} = 0\,,\ \ (i,j) \notin R_{д.\,н.},$$

$$z_{ij} \in \{0,1\},\ (i,j) \in R_{д.\,н.},$$

где $\mathbf{Z} = (z_{ij})$ – матрица бинарного отношения, описывающего назначение исполнителю работы из множества $I \setminus P$.

Применив эквивалентное преобразование недопустимых назначений, данную модель можно привести к простейшей линейной вида:

$$\tilde{\varphi}_2(\mathbf{Z}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} q_{ij}^2 z_{ij} \to \min, \tag{57}$$

$$\sum_{i=1}^{n} z_{ij} = 1, \; j = \overline{1, n}, \tag{58}$$

$$\sum_{j=1}^{n} z_{ij} = 1, \; i = \overline{1, n}, \tag{59}$$

$$z_{ij} \in \{0,1\}, \; i, j = \overline{1, n}, \tag{60}$$

где $q_{ij}^2 = \begin{cases} c_{ij}, \text{ если } (i, j) \in R_{д.н.}, \\ M, \text{ если } (i, j) \notin R_{д.н.}; \end{cases}$

$M = 2n \cdot \max\limits_{i,j=\overline{1,n}} c_{ij}$.

Задача (57) – (60) – простейшая линейная. Значит, ее оптимальное решение можно найти венгерским методом или методом Мака. Обозначим оптимальное решение задачи (57) – (60) через $\mathbf{Z}^* = (z_{ij}^*)$.

Зная оптимальное решение $\mathbf{Y}^* = (y_{ij}^*)$ задачи (53) – (56) и оптимальное решение $\mathbf{Z}^* = (z_{ij}^*)$ задачи (57) – (60), можно найти оптимальное решение X^* задачи (48) – (52):

$$x_{ij}^* = \begin{cases} y_{ij}^*, \; i = \overline{1, n}, j = \overline{1, k}; \\ z_{ij}^*, \; i = \overline{1, n}, j = \overline{k+1, n}. \end{cases}$$

Таким образом, задачи с порядком назначений (48) – (52) эквивалентна совокупности двух последовательно решаемых задач – открытой задаче и задаче с недопустимыми назначениями. Для каждой из этих задач существует эквивалентная простейшая модель. Следовательно, задача с порядком назначений (48) – (52) эквивалентна совокупности двух последовательно решаемых простейших линейных задач – задаче (53) – (56) и задаче (57) – (60).

Эквивалентное преобразование задачи с порядком назначений в совокупность двух последовательно решаемых простейших линейных задач формулируется так:

1) построить задачу (53) – (56);

2) решить задачу (53) – (56) венгерским методом или методом Мака, найти оптимальное решение $\mathbf{Y}^* = (y^*_{ij})$;

3) построить задачу (57) – (60).

Таким образом, можно сформулировать алгоритм решения задачи о назначениях (48) – (52) .

1. Применить эквивалентное преобразование задачи с порядком назначений в совокупность двух последовательно решаемых простейших линейных задач.

2. Решить задачу (57) – (60) венгерским методом или методом Мака. Найти оптимальное решение $\mathbf{Z}^* = (z^*_{ij})$.

3. Найти оптимальное решение $\mathbf{X}^*$ задачи (48) – (52):

$$x^*_{ij} = \begin{cases} y^*_{ij}, & i = \overline{1, n}, \ j = \overline{1, k}; \\ z^*_{ij}, & i = \overline{1, n}, \ j = \overline{k+1, n}. \end{cases}$$

Разработана программа поиска оптимального решения задачи с порядком назначений средствами математического пакета «Mathcad» (приложение Г). Исходные данные задачи (рисунок 11) формируются случайным образом.

Исходная матрица затрат:

$$C = \begin{pmatrix} 12 & 83 & 52 & 43 & 95 & 55 & 47 & 85 \\ 46 & 98 & 74 & 20 & 84 & 50 & 3 & 57 \\ 53 & 84 & 66 & 84 & 11 & 31 & 29 & 14 \\ 83 & 60 & 25 & 0 & 81 & 21 & 55 & 11 \\ 75 & 54 & 44 & 70 & 44 & 58 & 63 & 50 \\ 70 & 19 & 18 & 46 & 10 & 9 & 93 & 89 \\ 23 & 41 & 63 & 45 & 60 & 85 & 62 & 57 \\ 18 & 56 & 24 & 60 & 58 & 49 & 74 & 62 \end{pmatrix}$$

Номера работ распределяемых в перую очередь:

$$P = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Рисунок 11 – Исходные данные задачи с порядком назначений

На рисунке 12 представлены результаты работы программы.

Матрица затрат, эквивалентная матрице затрат открытой задачи о назначениях:

$$Q1 = \begin{pmatrix} 12 & 83 & 52 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 46 & 98 & 74 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 53 & 84 & 66 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 83 & 60 & 25 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 75 & 54 & 44 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 70 & 19 & 18 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 23 & 41 & 63 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 18 & 56 & 24 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Оптимальное решение открытой задачи о назначениях:

$$Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Вектор индексов исполнителей, назаченных на работы из множества P:

$$In = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Матрица затрат, эквивалентная матрице затрат задачи с недопустимыми назначениями:

$$Q2 = \begin{pmatrix} 1568 & 1568 & 1568 & 1568 & 1568 & 1568 & 1568 & 1568 \\ 1568 & 1568 & 1568 & 20 & 84 & 50 & 3 & 57 \\ 1568 & 1568 & 1568 & 84 & 11 & 31 & 29 & 14 \\ 1568 & 1568 & 1568 & 0 & 81 & 21 & 55 & 11 \\ 1568 & 1568 & 1568 & 70 & 44 & 58 & 63 & 50 \\ 1568 & 1568 & 1568 & 1568 & 1568 & 1568 & 1568 & 1568 \\ 1568 & 1568 & 1568 & 45 & 60 & 85 & 62 & 57 \\ 1568 & 1568 & 1568 & 1568 & 1568 & 1568 & 1568 & 1568 \end{pmatrix}$$

Оптимальное решение задачи с недопустимыми назначениями:

$$Z = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Оптимальное решение задачи с порядком назначений

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Оптимальное значение целевой функции:

$$f(X) = 182$$

Рисунок 12 – Результаты поиска оптимального решения задачи с порядком назначений

При заданной матрице затрат и установленном порядке назначений целевая функция задачи достигает минимального значения, равного 128.

Следует отметить, что необходимость учета порядка назначений в общем случае приводит к росту значений целевой функции. Ниже представлено решение простейшей линейной задачи о назначениях, матрица затрат **C** которой совпадает с матрицей затрат задачи с порядком назначений (рисунок 13).

$$f(X) := \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left(c_{i,j} \cdot X_{i,j}\right)$$

$$X_{n,n} := 0$$

Given

$$X \cdot a = b$$

$$X^{T} \cdot a = b$$

$$X \geq 0$$

$$X := \mathrm{Minimize}(f, X)$$

Оптимальное решение:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Оптимальное значение целевой функции:

$$f(X) = 147$$

Рисунок 13 – Результаты поиска оптимального решения простейшей линейной задачи с матрицей затрат **C**

Как видно, при одинаковой матрице затрат минимальное значение целевой функции простейшей линейной задачи о назначениях меньше минимального значения целевой функции задачи порядком назначений.

2.3 Модель и алгоритм решения задачи с приоритетными назначениями

Добавим к простейшей линейной задаче (1) – (4) дополнительное требование. Будем полагать, что некоторые назначения имеют приоритет перед другими. Данная ситуация имеет место, когда для некоторых работ выделен предпочтительный состав исполнителей. Примером также является случай, когда исполнители имеют свои предпочтения по выбору работы, которые желательно учесть [70].

Пусть имеется n работ и n исполнителей. Известны трудовые затраты c_{ij} на выполнение i-м исполнителем j-й работы ($i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,n}$). Каждый исполнитель может быть назначен только на одну работу, каждая работа может быть выполнена только одним исполнителем, при этом некоторые назначения имеют приоритет перед другими. Требуется распределить работы так, чтобы они были исполнены с минимальными затратами и с учетом приоритетности назначений.

На множестве $I = \{1,2,.., n\}$ индексов установим бинарное отношение приоритета

$$R_{пр.} = \{(i, j) \mid \text{назначение } (i, j) \text{ имеет приоритет}\}.$$

Пары $(i, j) \in R_{пр.}$ подлежат распределению назначений в первую очередь. Обозначим отношение порядка распределения назначений через $\overset{пр.}{<}$. Тогда математическая модель задачи с недопустимыми комбинациями назначений принимает вид:

$$f(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to \min, \tag{61}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \ j = \overline{1, n}, \tag{62}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \ i = \overline{1, n}, \tag{63}$$

$$xij \in \{0,1\}, \ \ i = \overline{1, n}, \ \ j = 1, n, \tag{64}$$

$$(i, j) \overset{пр.}{<} (i^*, j^*) \ , \quad (i^*, j^*) \in R_{пр.} \tag{65}$$

Введем в рассмотрение матрицу затрат $\mathbf{Q}_{n \times n}$, связанную с отношением $R_{пр.}$ таким образом:

$$q_{ij} = \begin{cases} c_{ij}, \text{ если } (i, j) \in R_{пр.}, \\ c_{ij} + M, \text{ если } (i, j) \notin R_{пр.}, \end{cases}$$

где M – штраф.

Введение матрицы $\mathbf{Q}$ обосновано следующими соображениями. Классические методы решения задачи о назначениях основаны на идее выбора в каждой строке матрицы затрат минимального элемента. Неизвестная x_{ij}, такая, что $(i, j) \notin R_{пр.}$, будет «штрафоваться» путем ввода в целевую функцию выражения $(c_{ij} + M)x_{ij}$, что обеспечит учет приоритетности выделенных назначений. Вместе с тем очевидно, что положения оптимального выбора среди назначений, не имеющих приоритета, не изменятся, если к каждому элементу матрицы затрат добавить одно и то же число. Для определенности будем полагать $M = 2n \cdot \max cij$.

Эквивалентное преобразование задачи с приоритетными назначениями в простейшую линейную задачу формулируется так:

1) найти размер штрафа $M = 2n \cdot \max cij$;

2) перейти к матрице затрат **Q** такой, что

$$q_{ij} = \begin{cases} c_{ij}, \text{ если } (i, j) \in R_{пр.}, \\ c_{ij} + M, \text{ если } (i, j) \notin R_{пр.}. \end{cases}$$

Результатом применения преобразования является переход к простейшей линейной модели вида:

$$f(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} q_{ij} x_{ij} \to \min, \qquad (66)$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \ j = \overline{1, n}, \qquad (67)$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \ i = \overline{1, n}, \qquad (68)$$

$$x_{ij} \in \{0,1\}, \ i, j = \overline{1, n}, \qquad (69)$$

где $q_{ij} = \begin{cases} c_{ij}, \text{ если } (i, j) \in R_{пр.}, \\ c_{ij} + M, \text{ если } (i, j) \notin R_{пр.}; \end{cases}$

$M = 2n \cdot \max c_{ij}$.

Модели (61) – (65) и (66) – (69) эквивалентны друг другу. Отсюда можно описать алгоритм решения задачи о назначениях (61) – (65).

1. Применить к модели (61) – (65) эквивалентное преобразование приоритетных назначений. Результатом является получение эквивалентной модели (66) – (69).

2. Решить задачу, описываемую соотношениями (66) – (69), венгерским методом или методом Мака.

Разработана программа поиска оптимального решения задачи с приоритетными назначениями. Результаты работы программы представлены на рисунке 14.

Исходная матрица затрат:

$$C = \begin{pmatrix} 89 & 23 & 41 & 63 & 45 & 60 & 85 \\ 62 & 57 & 18 & 56 & 24 & 60 & 58 \\ 49 & 74 & 62 & 80 & 58 & 91 & 73 \\ 67 & 32 & 31 & 11 & 85 & 15 & 8 \\ 64 & 55 & 41 & 47 & 15 & 74 & 83 \\ 87 & 30 & 13 & 78 & 61 & 7 & 65 \\ 10 & 23 & 92 & 66 & 49 & 50 & 51 \end{pmatrix}$$

Матрица бинарного отношения "приоритетные назначения":

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Оптимальное решение:

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Оптимальное значение целевой функции:

$$f(X) = 258$$

Рисунок 14 – Результаты поиска оптимального решения задачи с приоритетными назначениями

Необходимость учета приоритета назначений в общем случае влечет рост значения целевой функции (рисунок 15).

$$f(X) := \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left(C_{i,j} \cdot X_{i,j}\right)$$

$$X_{n,n} := 0$$

Given

$$X \cdot a = b$$

$$X^{T} \cdot a = b$$

$$X \geq 0$$

$$X := \mathrm{Minimize}(f, X)$$

Оптимальное решение:

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Оптимальное значение целевой функции:

$$f(X) = 157$$

Рисунок 15 – Результаты поиска оптимального решения простейшей линейной задачи с матрицей затрат **C**

Как видно, минимальное значение целевой функции линейной задачи о назначениях существенно меньше минимального значения целевой функции задачи с приоритетными назначениями при одной и той же матрице затрат.

Выводы

Предложено обобщение задачи с недопустимыми назначениями, заключающееся в том, что недопустимыми считаются некоторые комбинации назначений. Построена математическая модель задачи с недопустимыми комбинациями назначений. Показано, что задача с недопустимыми комбинациями назначений эквивалентна совокупности задач с недопустимыми назначениями. Сформулировано эквивалентное преобразование задачи с недопустимыми комбинациями в совокупность простейших линейных задач. Предложен алгоритм поиска оптимального решения, основанный на эквивалентном преобразовании задачи с недопустимыми комбинациями назначений и ее последующей оптимизации с использованием венгерского метода или метода Мака.

Предложено обобщение простейшей линейной задачи, заключающееся в установлении порядка назначений. Построена математическая модель задачи с порядком назначений. Показано, что задача с порядком назначений эквивалентна совокупности двух последовательно решаемых задач – открытой задаче и задаче с недопустимыми назначениями. Сформулировано эквивалентное преобразование задачи порядком назначений в совокупность двух последовательно решаемых простейших линейных задач. Предложен алгоритм поиска оптимального решения, основанный на эквивалентном преобразовании задачи с порядком назначений и ее последующей оптимизации с использованием венгерского метода или метода Мака.

Предложено обобщение простейшей линейной задачи, заключающееся в предположении того, что некоторые назначения имеют приоритет перед другими. Построена математическая модель задачи с приоритетными назначениями. Показано, что задача с приоритетными назначениями эквивалентна задаче с недопустимыми назначениями. Сформулировано эквивалентное преобразование задачи с приоритетными назначениями. Предложен алгоритм поиска оптимального решения, основанный на эквивалентном преобразовании задачи с приоритетными назначениями в простейшую линейную задачу и ее последующей оптимизации с использованием венгерского метода или метода Мака.

Рассмотренные задачи расширяют множество задач о назначениях, эквивалентных простейшей линейной задаче, и позволяют применить для их решения стандартные алгоритмы. Необходимость учета дополнительных требований в общем случае приводит к росту значений целевой функции.

3 Модели многокритериальных задач о назначениях и алгоритмы их решения

3.1 Модель простейшей линейной многокритериальной задачи о назначениях

Однокритериальная задача о назначениях редко встречается на практике. Как правило, в реальной постановке эта задача является многокритериальной. Например, при выборе программного продукта показателями оценки являются, с одной стороны, его функциональные возможности, надежность, эргономичность, а с другой стороны, стоимость, расходы на внедрение и др. При подборе персонала важнейшими критериями оценки являются квалификация, опыт работы, возраст, размер заработной платы и т.п. Модель простейшей линейной многокритериальной задачи о назначениях представляется в виде:

$$f_1(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}^1 x_{ij} \to \min, \tag{70}$$

$$f_2(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}^2 x_{ij} \to \min, \tag{71}$$

$$\ldots$$

$$f_k(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}^k x_{ij} \to \min, \tag{72}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad j = \overline{1, n}, \tag{73}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad i = \overline{1, n}, \tag{74}$$

$$x_{ij} \in \{0,1\}, \quad i, j = \overline{1, n}, \tag{75}$$

где $f_1(\mathbf{X}), f_2(\mathbf{X}), \ldots, f_k(\mathbf{X})$ – скалярные целевые функции (частные критерии).

Обозначим через D множество допустимых решений простейшей многокритериальной линейной задачи о назначениях, $\mathbf{X} \in D$. Набор значений целевых функций $(f_1(\mathbf{X}), f_2(\mathbf{X}), ..., f_k(\mathbf{X}))$ является вектором k-мерного векторного пространства R^k, называемого критериальным пространством. Векторы этого пространства называют критериальными векторами. Каждому фиксированному решению $\mathbf{X}_0 \in D$ можно поставить в соответствие критериальный вектор $(f_1(\mathbf{X}_0), f_2(\mathbf{X}_0), ..., f_k(\mathbf{X}_0))$, компонентами которого являются значения целевых функций при данном $\mathbf{X}_0 \in D$. Тогда задачу (70) – (75) можно записать как

$$F(\mathbf{X}) \to \min,$$

$$\sum_{i=1} x_{ij} = 1, \quad j = \overline{1, n},$$

$$\sum_{j=1} x_{ij} = 1, \quad i = \overline{1, n},$$

$$x_{ij} \in \{0,1\}, \quad i, j = \overline{1, n},$$

где $F(\mathbf{X}) = (f_1(\mathbf{X}), f_2(\mathbf{X}), ..., f_k(\mathbf{X}))$ – вектор-функция, $\mathbf{X} \in D$.

В большинстве случаев целевые функции $f_1(\mathbf{X}), f_2(\mathbf{X}), ..., f_k(\mathbf{X})$ многокритериальной задачи о назначениях взаимно конфликтуют в том смысле, что улучшения значений одних функций можно добиться только за счет ухудшения значений других. Например, высокая функциональность и надежность информационной системы обеспечивается увеличением затрат на производство и эксплуатацию. В результате одно решение может превосходить другое по одним частным критериям, уступая при этом ему по другим.

Для сравнения критериальных векторов в многокритериальных задачах вводят отношение доминирования. Задача о назначениях в классической постановке является задачей минимизации. В случае задачи минимизации говорят, что критериальный вектор $F(\mathbf{X}_1) = (f_1(\mathbf{X}_1), f_2(\mathbf{X}_1), ..., f_k(\mathbf{X}_1))$

доминирует по Парето вектор $F(\mathbf{X}_2) = (f_1(\mathbf{X}_2), f_2(\mathbf{X}_2),..., f_k(\mathbf{X}_2))$ и обозначают $F(\mathbf{X}_1) \overset{p}{\succ} F(\mathbf{X}_2)$, если $f_l(\mathbf{X}_1) \le f_l(\mathbf{X}_2)$ для всех $l = \overline{1, k}$, при этом хотя бы для одного индекса l выполняется $f_l(\mathbf{X}_1) < f_l(\mathbf{X}_2)$. Критериальный вектор $F(\mathbf{X}_0)$ называется оптимальным по Парето, если $\{F(\mathbf{X}) \mid F(\mathbf{X}) \overset{p}{\succ} F(\mathbf{X}_0),\ \mathbf{X} \in D\} = \varnothing$. Такой вектор называется также недоминируемым по Парето. Множество критериальных векторов, оптимальных по Парето, называют множеством Парето в критериальном пространстве или фронтом Парето и обозначают $F(P)$.

Доминирование по Парето, определенное для пар критериальных векторов, порождает соответствующее отношение на множестве допустимых решений D многокритериальной задачи о назначениях. Пусть $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2 \in D$, тогда

$$\mathbf{X}_1 \overset{p}{\succ} \mathbf{X}_2 \Leftrightarrow F(\mathbf{X}_1) \overset{p}{\succ} F(\mathbf{X}_2).$$

Решение $\mathbf{X}_0 \in D$ называется оптимальным по Парето, если $\{\mathbf{X} \in D \mid F(\mathbf{X}) \overset{p}{\succ} F(\mathbf{X}_0)\} = \varnothing$. Таким образом, решение оптимально по Парето тогда и только тогда, когда оно является прообразом недоминируемого критериального вектора. Множество всех оптимальных по Парето решений
задачи называют множеством Парето и обозначают $P(D)$.

Решением многокритериальной задачи обычно считают либо единственный оптимальный по Парето вектор, либо приближение множества Парето конечным числом векторов. Первую постановку принято называть локальной многокритериальной задачей, вторую – глобальной. Выбор окончательного решения осуществляется, как правило, лицом, принимающим решения (ЛПР).

3.2 Алгоритм решения простейшей линейной многокритериальной задачи о назначениях

Многообразие многокритериальных задач в сочетании с отсутствием единого принципа оптимальности порождает огромное число методов их решению. Использование того или иного подхода к решению конкретной задачи может оказать существенное влияние на трудоемкость вычислений. Это относится особенно к специальным классам задач, для которых при скалярном критерии качества разработаны эффективные алгоритмы, использующие специфику ограничений и критериальной функции. Одной из таких задач является задача о назначениях.

В основе подавляющего большинства методов решения многокритериальных задач лежит понятие веса критерия, характеризующего его сравнительную важность. Наиболее распространенные методы решения многокритериальных задач основаны на свертке набора исходных целевых функций (с учетом их веса) в один обобщенный скалярный критерий [71]. Такой подход позволяет получить оптимальное по Парето решение и при этом характеризуется вычислительной эффективностью. Использование свертки обеспечивает возможность применения для решения многокритериальной задачи о назначениях специально разработанные для однокритериального случая методы – венгерский и метод Мака.

Свертка частных критериев разного смыслового содержания не позволяет интерпретировать значение взвешенного обобщенного критерия, поэтому в общем случае использование операторов свертки требует предварительного нормирования матриц затрат $\mathbf{C}^l$, $l = \overline{1, k}$, т.е. приведения их к единой безразмерной шкале. Часто используемый способ нормирования – минимакс-нормализация.

Предлагается следующий алгоритм решения простейшей многокритериальной линейной задачи о назначениях (70) – (75).

1. Нормировать матрицы затрат $\mathbf{C}^l$, $l = \overline{1, k}$:

$$\tilde{c}_{ij}^{\,l} = \frac{c_{ij}^l - c_{\min}^l}{c_{\max}^l - c_{\min}^l}.$$

2. Составить целевые функции $\tilde{f}_1(\mathbf{X}), \tilde{f}_2(\mathbf{X}), ..., \tilde{f}_k(\mathbf{X})$ с безразмерными коэффициентами:

$$\tilde{f}_l(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \tilde{c}_{ij}^{\,l} x_{ij}, \; l = \overline{1, k}$$

3. Составить вектор $\Lambda = (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k)$ весовых коэффициентов относительной важности целевых функций $f_1(\mathbf{X}), f_2(\mathbf{X}), ..., f_k(\mathbf{X})$,

$\lambda_l > 0$,

$l = \overline{1.k}$, $\sum_{l=1} \lambda_l = 1$. В том случае, если все критерии имеют одинаковую важность, $\lambda_l = 1,\ l = \overline{1.k}$.

4. Составить скалярную целевую функция (обобщенный критерий)

$$g(\mathbf{X}) = \Delta(f_1(\mathbf{X}), f_2(\mathbf{X}),..., f_k(\mathbf{X}), \Lambda),$$

где Δ – оператор свертки.

5. Перейти к однокритериальной задаче о назначениях вида

$$g(\mathbf{X}) \to \min, \tag{76}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad j = \overline{1, n}, \tag{77}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad i = \overline{1, n}, \tag{78}$$

$$x_{ij} \in \{0,1\}, \quad i, j = \overline{1, n}. \tag{79}$$

6. Решить задачу (76) – (79) венгерским методом или методом Мака. Результатом является получение решения, оптимального по Парето. Решая задачу многократно и с изменением весовых коэффициентов, можно получить множество Парето-оптимальных решений.

Вид свертки в каждом конкретном случае отражает приемлемую для ЛПР форму компромисса между частными критериями. Наиболее часто используемыми свертками являются линейная свертка, мультипликативная свертка и свертка на основе отклонения от идеальной точки.

3.3 Решение простейшей линейной многокритериальной задачи о назначениях с использованием линейной свертки

Обобщенный критерий, построенный с использованием оператора линейной свертки, имеет вид:

$$g(\mathbf{X}) = \sum_{i=1} \lambda_l \tilde{f}_l(\mathbf{X}),$$

где $\tilde{f}_i(\mathbf{X})$ – целевые функции с нормированными коэффициентами, $l = \overline{1.k}$;

λ_l – весовые коэффициенты,

$l = 1.k$.

По своему смыслу линейная свертка представляет собой среднее взвешенное частных критериев и именно с этих позиций во многих случаях ее использование в многокритериальных задачах о назначениях представляется обоснованным. Результатом применения линейной свертки является получение решения, оптимального по Парето. Текст программы для нахождения решения простейшей многокритериальной линейной задачи о назначениях методом линейной свертки критериев в среде «Mathcad» приведен в листинге 3.

Листинг 3 – Решение многокритериальной линейной задачи о назначениях с использованием линейной свертки

$ORIGIN := 1$

$n := 5$ / Размерность матриц затрат

$k := 3$ / Количество целевых функций

$$C(k) := \left| \begin{array}{l} \text{for } i \in 1..n \\ \quad \text{for } j \in 1..n \\ \quad\quad Q_{i,j} \leftarrow \text{round}(\text{rnd}(100)+1) \\ Q \end{array} \right.$$

/ Задание k матриц затрат. Элементы матриц формируются случайным образом

$$f(l,X) := \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left[\left(C(l)_{i,j} \right) \cdot X_{i,j} \right]$$

/ Задание k целевых функций

$$fnorm(l,X) := \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left[\left(\frac{C(l)_{i,j} - \min(C(l))}{\max(C(l)) - \min(C(l))} \right) \cdot X_{i,j} \right]$$

/ Нормализация целевых функций

$$\lambda := \left| \begin{array}{l} s \leftarrow 0 \\ \text{for } i \in 1..k \\ \quad \left| \begin{array}{l} \lambda_i \leftarrow \text{rnd}(10) + 1 \\ s \leftarrow s + \lambda_i \end{array} \right. \\ \text{for } i \in 1..k \\ \quad \lambda_i \leftarrow \text{round}\left(\frac{\lambda_i}{s}, 2 \right) \\ \lambda \end{array} \right.$$

/ Задание весовых коэффициентов

$$g(X) := \sum_{l=1}^{k} \left(\lambda_l \cdot fnorm(l,X) \right)$$

/ Задание обобщенного критерия

$w(i,j) := 1$ / Решение линейной однокритериальной задачи о назначениях

$a := matrix(n,1,w)$

$b := matrix(n,1,w)$

$X_{n,n} := 0$

Given

$X \cdot a = b$

$X^T \cdot a = b$

$X \geq 0$

$X := Minimize(g,X)$

Пусть дана многокритериальная задача о назначениях вида (70) – (75). Матрицы затрат задачи и вектор весовых коэффициентов относительной важности целевых функций представлены на рисунке 16:

$$C(1) = \begin{pmatrix} 58 & 1 & 26 & 55 & 13 \\ 65 & 6 & 61 & 82 & 40 \\ 73 & 52 & 64 & 2 & 52 \\ 29 & 49 & 53 & 58 & 55 \\ 89 & 80 & 56 & 33 & 30 \end{pmatrix} \quad C(2) = \begin{pmatrix} 58 & 71 & 52 & 16 & 34 \\ 68 & 94 & 39 & 59 & 96 \\ 100 & 72 & 94 & 88 & 5 \\ 45 & 66 & 29 & 31 & 98 \\ 98 & 83 & 44 & 86 & 97 \end{pmatrix} \quad C(3) = \begin{pmatrix} 86 & 72 & 56 & 2 & 98 \\ 88 & 80 & 99 & 17 & 53 \\ 49 & 96 & 65 & 24 & 39 \\ 58 & 18 & 20 & 27 & 13 \\ 21 & 60 & 80 & 10 & 44 \end{pmatrix} \quad \lambda = \begin{pmatrix} 0.3 \\ 0.6 \\ 0.1 \end{pmatrix}$$

Рисунок 16 – Исходные данные простейшей линейной многокритериальной задачи о назначениях

Программа находит оптимальное по Парето решение, а также значения соответствующего ему критериального вектора (рисунок 17):

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} f(1,X) &= 261 \\ f(2,X) &= 239 \\ f(3,X) &= 232 \end{aligned}$$

Рисунок 17 – Результаты решения многокритериальной задачи о назначениях с использованием линейной свертки

Решая задачу многократно с изменением весовых коэффициентов, можно сгенерировать множество точек, оптимальных по Парето (рисунок 18):

$$\lambda = \begin{pmatrix} 0.43 \\ 0.32 \\ 0.25 \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} f(1,X) &= 146 \\ f(2,X) &= 282 \\ f(3,X) &= 243 \end{aligned}$$

$$\lambda = \begin{pmatrix} 0.7 \\ 0.1 \\ 0.2 \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} f(1,X) &= 93 \\ f(2,X) &= 376 \\ f(3,X) &= 262 \end{aligned}$$

$$\lambda = \begin{pmatrix} 0.42 \\ 0.37 \\ 0.21 \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} f(1,X) &= 198 \\ f(2,X) &= 204 \\ f(3,X) &= 259 \end{aligned}$$

Рисунок 18 – Результаты решения многокритериальной задачи о назначениях с различными векторами весовых коэффициентов

Оптимизации многокритериальной задачи о назначениях с использованием оператора линейной свертки присущ ряд недостатков:

- субъективный характер выбора весовых коэффициентов и общая, как следствие, субъективность получаемых решений;
- низкие значения одних целевым функциям (вплоть до нулевого) могут компенсироваться высокими значениями других целевым функциям, поэтому полученное решение, оптимальное в смысле обобщенного критерия, может характеризоваться низкими значениями по ряду частных критериев и быть по этой причине неприемлемым для ЛПР;
- чувствительность решения к изменению параметров исходной модели (например, малым приращениям весовых коэффициентов могут соответствовать большие приращения значений целевых функций).

Следует отметить, что вышеперечисленные недостатки могут быть скорректированы ЛПР.

3.4 Решение простейшей линейной многокритериальной задачи о назначениях с использованием мультипликативной свертки

Обобщенный критерий, построенный с использованием оператора мультипликативной свертки, имеет вид:

$$g(\mathbf{X}) = \prod_{l=1}^{k} \left(\tilde{f}_i(\mathbf{X})\right)^{\lambda_l}.$$

где $\tilde{f}_i(\mathbf{X})$ – целевые функции с нормированными коэффициентами, $l = \overline{1.k}$;

λ_l – весовые коэффициенты, $l = \overline{1.k}$.

Выбор между линейной и мультипликативной сверткми определяется предпочтительностью ЛПР абсолютных или относительных компенсаций изменений значений частных критериев. Мультипликативная свертка используется в случае, когда целесообразной считается относительная компенсация изменения значений целевых функций**.** В этом случае полагают справедливым такой компромисс, при котором суммарный уровень относительного снижения значений одного или нескольких частных критериев не превышает суммарного уровня относительного увеличения значений других частных критериев [72].

Текст программы для нахождения решения простейшей многокритериальной линейной задачи о назначениях методом мультипликативной свертки критериев в пакете «Mathcad» приведен в листинге 4.

Листинг 4 – Решение линейной многокритериальной задачи о назначениях с использованием мультипликативной свертки

$ORIGIN := 1$

$n := 5$ / Размерность матриц затрат

$k := 3$ / Количество целевых функций

$$C(k) := \left| \begin{array}{l} \text{for } i \in 1..n \\ \quad \text{for } j \in 1..n \\ \quad\quad Q_{i,j} \leftarrow \text{round}(\text{rnd}(100)+1) \\ Q \end{array} \right.$$

/ Задание k матриц затрат. Элементы матриц формируются случайным образом

$$f(l,X) := \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left[\left(C(l)_{i,j} \right) \cdot X_{i,j} \right]$$

/ Задание k целевых функций

$$fnorm(l,X) := \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left[\left(\frac{C(l)_{i,j} - \min(C(l))}{\max(C(l)) - \min(C(l))} \right) \cdot X_{i,j} \right]$$

/ Нормализация целевых функций

$$\lambda := \left| \begin{array}{l} s \leftarrow 0 \\ \text{for } i \in 1..k \\ \quad \left| \begin{array}{l} \lambda_i \leftarrow \text{rnd}(10)+1 \\ s \leftarrow s + \lambda_i \end{array} \right. \\ \text{for } i \in 1..k \\ \quad \lambda_i \leftarrow \text{round}\left(\frac{\lambda_i}{s}, 2 \right) \\ \lambda \end{array} \right.$$

/ Задание весовых коэффициентов

$$g(X) := \prod_{l=1}^{k} \left(fnorm(l,X) \right)^{\lambda_l}$$

/ Задание обобщенного критерия с помощью мультипликативной свертки

$w(i,j) := 1$ / Решение линейной однокритериальной задачи о назначениях

$a := matrix(n,1,w)$

$b := matrix(n,1,w)$

$X_{n,n} := 0$

Given

$X \cdot a = b$

$X^T \cdot a = b$

$X \geq 0$

$X := Minimize(g,X)$

Для любого допустимого вектора весов $\Lambda = (\lambda_1, \lambda_2,..., \lambda_k)$ результатом применения мультипликативной свертки является получение решения, оптимального по Парето. На рисунке 19 приведены результаты применения мультипликативной свертки к многокритериальной задаче о назначениях, исходные данные которой совпадают с исходными данными задачи, решенной с использованием линейной свертки.

$$C(1) = \begin{pmatrix} 58 & 1 & 26 & 55 & 13 \\ 65 & 6 & 61 & 82 & 40 \\ 73 & 52 & 64 & 2 & 52 \\ 29 & 49 & 53 & 58 & 55 \\ 89 & 80 & 56 & 33 & 30 \end{pmatrix} \quad C(2) = \begin{pmatrix} 58 & 71 & 52 & 16 & 34 \\ 68 & 94 & 39 & 59 & 96 \\ 100 & 72 & 94 & 88 & 5 \\ 45 & 66 & 29 & 31 & 98 \\ 98 & 83 & 44 & 86 & 97 \end{pmatrix} \quad C(3) = \begin{pmatrix} 86 & 72 & 56 & 2 & 98 \\ 88 & 80 & 99 & 17 & 53 \\ 49 & 96 & 65 & 24 & 39 \\ 58 & 18 & 20 & 27 & 13 \\ 21 & 60 & 80 & 10 & 44 \end{pmatrix} \quad \lambda = \begin{pmatrix} 0.3 \\ 0.6 \\ 0.1 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} f(1,X) &= 198 \\ f(2,X) &= 204 \\ f(3,X) &= 259 \end{aligned}$$

Рисунок 19 – Результаты решения многокритериальной линейной задачи о назначениях с использованием мультипликативной свертки

В целом, мультипликативная свертки обладает теми же недостатками, что и линейная. При этом оператор мультипликативной свертки более чувствителен к значениям целевых функций в том смысле, что низкое (высокое) значение хотя бы одного частного критерия, как правило, влечет резкое снижение (увеличение) значения обобщенного. Кроме того, из формулы мультипликативного оператора следует, что если хотя бы один частный критерий принимает нулевое значение, то итоговое значение свертки также становится равным нулю. Данное свойство обычно интерпретируют следующим образом: решение, при котором достигается нулевое значение хотя бы одному частному критерию, следует считать недопустимым с точки зрения ЛПР в целом. Эта особенность определяет применение мультипликативной свертки в задачах, частные критерии которых критично значимы, взаимосвязаны и взаимозависимы.

3.5 Решение простейшей линейной многокритериальной задачи о назначениях с использованием свертки на основе отклонения от идеальной точки

Под идеальной точкой в многокритериальной задаче о назначениях вида (71) – (76) понимают такой вектор $F^*(\mathbf{X}) \in R^k$, компоненты которого являются минимумами целевых функций $f_1(\mathbf{X}), f_2(\mathbf{X}), \ldots, f_k(\mathbf{X})$ по отдельности, т.е. $f_l^*(\mathbf{X}) = \min\limits_{\mathbf{X} \in D} f_l(\mathbf{X}),\ \ l = \overline{1, k}$. В практических задачах идеальная точка является недостижимой [73].

Свертка на основе идеальной точки $F^*(\mathbf{X})$ имеет вид:

$$g(\mathbf{X}) = \rho(F(\mathbf{X}), F^*(\mathbf{X})),$$

где ρ – некоторая метрика в R^k.

Наиболее часто используются взвешенная чебышевская метрика

$$g(\mathbf{X}) = \max_l \left\{ \lambda_l \left| f_l(\mathbf{X}) - f_l^* \right| \right\} \tag{80}$$

и взвешенная евклидова метрика

$$g(\mathbf{X}) = \sqrt{\sum_{l=1}^{k} (f_l(\mathbf{X}) - f_l^*)^2}. \tag{81}$$

Предлагается следующий алгоритм составления обобщенного скалярного критерия на основе идеальной точки:

1) составить k однокритериальных задач о назначениях вида

$$\tilde{f}_l(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \tilde{c}_{ij}^{l} x_{ij} \to \min, \tag{82}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad j = \overline{1, n}, \tag{83}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad i = \overline{1, n}, \tag{84}$$

$$x_{ij} \in \{0,1\}, \quad i, j = \overline{1, n}, \tag{85}$$

где $l = \overline{1,k}$;

2) найти $\mathbf{X}^*$ – оптимальное решение l-й задачи вида (82) – (84) и $f_l^* = f_l(\mathbf{X}^*)$, $l = \overline{1, k}$;

3) составить вектор

$$F^*(\mathbf{X}) = (f_1^*, f_2^*, \ldots, f_k^*),$$

где $f_l^* = f_l(\mathbf{X}^*)$, $l = \overline{1, k}$;

4) составить свертку на основе отклонения от идеальной точки по формуле (80) или (81).

Разработана программа для нахождения решения многокритериальной линейной задачи о назначениях с использованием свертки на основе отклонения от идеальной точки средствами математического пакета Mathcad, полный текст которой представлен в приложении Е. На рисунке 20 приведены результаты применения свертки на основе отклонения от идеальной точки к многокритериальной задаче о назначениях, исходные данные которой совпадают с исходными данными задачи, решенной с использованием линейной свертки:

$$C(1) = \begin{pmatrix} 58 & 1 & 26 & 55 & 13 \\ 65 & 6 & 61 & 82 & 40 \\ 73 & 52 & 64 & 2 & 52 \\ 29 & 49 & 53 & 58 & 55 \\ 89 & 80 & 56 & 33 & 30 \end{pmatrix} \quad C(2) = \begin{pmatrix} 58 & 71 & 52 & 16 & 34 \\ 68 & 94 & 39 & 59 & 96 \\ 100 & 72 & 94 & 88 & 5 \\ 45 & 66 & 29 & 31 & 98 \\ 98 & 83 & 44 & 86 & 97 \end{pmatrix} \quad C(3) = \begin{pmatrix} 86 & 72 & 56 & 2 & 98 \\ 88 & 80 & 99 & 17 & 53 \\ 49 & 96 & 65 & 24 & 39 \\ 58 & 18 & 20 & 27 & 13 \\ 21 & 60 & 80 & 10 & 44 \end{pmatrix} \quad \lambda = \begin{pmatrix} 0.3 \\ 0.6 \\ 0.1 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} f(1,X) &= 225 \\ f(2,X) &= 277 \\ f(3,X) &= 211 \end{aligned}$$

$$Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} f(1,Y) &= 216 \\ f(2,Y) &= 430 \\ f(3,Y) &= 254 \end{aligned}$$

Рисунок 20 – Результаты решения многокритериальной линейной задачи о назначениях с использованием свертки на основе отклонения от идеальной точки

На рисунке 20 представлены матрица **X** – оптимальное по Парето решение, полученное с использованием чебышевской метрики, и матрица **Y** – оптимальное по Парето решение, полученное с использованием евклидовой метрики. Также программа находит для каждого оптимального по Парето решения значения соответствующего ему критериального вектора. Применяя алгоритм многократно с изменением весовых коэффициентов, можно построить множество точек Парето. Выбор конкретного решения из множества Парето-оптимальных осуществляется ЛПР.

Следует отметить, что в некоторых прикладных задачах ЛПР за идеальную точку может принять реальное решение, соответствующее некоторым принятым стандартам или планируемым значениям.

3.6 Модель и алгоритм решения многокритериальной задачи о назначениях с целевыми функциями противоположного направления

Обобщим задачу о назначениях с целевой функцией на максимум на случай многокритериальности. В результате получим многокритериальную задачу о назначениях, в которой целевые функции имеют разное направление. Математическая модель такой задачи имеет вид:

$$f_1(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}^{1} x_{ij} \to \max, \tag{86}$$

$$\dots$$

$$f_m(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}^{m} x_{ij} \to \max, \tag{87}$$

$$f_{m+1}(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}^{m+1} x_{ij} \to \min, \tag{88}$$

$$\dots$$

$$f_k(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}^{k} x_{ij} \to \min, \tag{89}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad j = \overline{1, n}, \tag{90}$$

$$\sum_{j=1} x_{ij} = 1, \quad i = \overline{1, n}, \tag{91}$$

$$x_{ij} \in \{0,1\}, \quad i, j = \overline{1, n}. \tag{92}$$

Без ограничения общности можно считать, что в задаче (86) – (92) первые m целевых функций стремятся к максимуму, а последующие $k - m$ – к минимуму. Очевидно, этого всегда можно добиться за счет переупорядочения целевых функций.

Данную задачу можно свести к простейшей линейной многокритериальной задаче с помощью следующего эквивалентного преобразования:

1) в каждой строке матрицы $\mathbf{C}^s$, $s = \overline{1, m}$ найти наибольший элемент

$$\max_i^s = \max_j c_{ij}^s, \quad j = \overline{1, n};$$

2) перейти к матрицам Q^s, $s = \overline{1, m}$, построенным по правилу:

$$q_{ij}^s = \max_i^s - c_{ij}^s, \quad i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, n}.$$

Результатом применения преобразования является переход к простейшей линейной многокритериальной задачи о назначениях вида:

$$\varphi_1(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} q_{ij}^1 x_{ij} \to \min, \tag{93}$$

…

$$\varphi_m(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} q_{ij}^m x_{ij} \to \min, \tag{94}$$

$$\varphi_{m+1}(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}^{m+1} x_{ij} \to \min, \tag{95}$$

…

$$\varphi_k(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}^k x_{ij} \to \min, \tag{96}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad j = \overline{1, n}, \tag{97}$$

$$\sum_{j=1} x_{ij} = 1, \quad i = \overline{1, n}, \tag{98}$$

$$x_{ij} \in \{0,1\}, \quad i, j = \overline{1, n}. \tag{99}$$

Модели (86) – (92) и (93) – (99) эквивалентны друг другу. Отсюда можно сформулировать алгоритм решения многокритериальной задачи о назначениях с целевыми функциями противоположного направления.

1. Применить к модели (86) – (92) эквивалентное преобразование направления целевых функций. Результатом является получение простейшей линейной многокритериальной модели вида (93) – (99).

2. Решить задачу (93) – (99) с использованием алгоритма решения простейшей линейной многокритериальной задачи о назначениях.

Данный алгоритм основан на обобщении алгоритма решения однокритериальной задачи о назначениях на максимум на случай многокритериальности. Следует отметить, что целевые функции задачи (93) – (99) в результате применения первых двух шагов вышеприведенного алгоритма будут иметь разное смысловое содержание, поэтому условием успешного применения свертки является обязательное нормирование матриц затрат.

3.7 Модель и алгоритм решения многокритериальной открытой задачи о назначениях

Обобщим открытую задачу о назначениях на случай многокритериальности. Математическая модель такой задачи в предположении $m > n$ имеет вид:

$$f_1(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}^1 x_{ij} \to \min, \tag{100}$$

$$\ldots$$

$$f_k(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}^k x_{ij} \to \min, \tag{101}$$

$$\sum_{i=1}^{m} xij = 1, \; j = \overline{1, n}, \tag{102}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le 1, \ i = \overline{1, m}, \tag{103}$$

$$xij \in \{0,1\}, \ i = \overline{1, m}, \ j = \overline{1, n}. \tag{104}$$

Однокритериальная открытая задача о назначениях решается путем приведения к закрытой форме, для чего матрицу затрат дополняют нулями до квадратной. Используя данный подход применительно к многокритериальной открытой задаче о назначениях, можно привести ее к задаче вида (70) – (75), которая решается с помощью свертки набора частных целевых функций в один обобщенный скалярный критерий. Здесь следует заметить, что в результате приведения к закрытой форме многокритериальной задачи о назначениях минимальный элемент во всех матрицах затрат $\mathbf{C}^l$, $l = \overline{1, k}$ будет равен нулю. Поэтому приведение матриц затрат к единому безразмерному виду должно осуществляться до приведения к закрытой форме. Таким образом, эквивалентное преобразование многокритериальной открытой задачи о назначениях в простейшую линейную многокритериальную задачу имеет вид:

1) нормировать матрицы затрат $\mathbf{C}^l$, $l = \overline{1, k}$:

$$\tilde{c}_{ij}^{\,l} = \frac{c_{ij}^l - c_{\min}^l}{c_{\max}^l - c_{\min}^l};$$

2) привести задачу к закрытой модели, для чего:

а) найти $p = \max\{m, n\}$;

б) задать k матриц затрат $\mathbf{Q}^k = (q^k)_{p \times p}$ следующим образом:

$$q_{ij}^k = \begin{cases} \tilde{c}_{ij}^{\,k}, & i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}; \\ 0, & i = \overline{1, p}, j = \overline{n+1, p}, \quad если\ m > n; \\ 0, & i = \overline{m+1, p}, \ j = \overline{1, p}, \quad если\ m < n. \end{cases}$$

Результатом является переход к простейшей линейной многокритериальной задачи о назначениях вида:

$$\varphi_1(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{p} q_{ij}^{1}\, x_{ij} \to \min, \qquad (105)$$

…

$$\varphi_k(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{p} q_{ij}^k x_{ij} \to \min, \tag{106}$$

$$\sum_{i=1}^{p} x_{ij} = 1, \quad j = \overline{1,p}, \tag{107}$$

$$\sum_{j=1}^{p} x_{ij} = 1, \quad i = \overline{1,p}, \tag{108}$$

$$x_{ij} \in \{0,1\}, \quad i,j = \overline{1,p}\,. \tag{109}$$

Модели (100) – (104) и (105) – (109) эквивалентны друг другу. Отсюда можно сформулировать алгоритм решения многокритериальной открытой задачи о назначениях.

1. Применить к модели (100) – (104) эквивалентное преобразование прямоугольных матриц затрат в квадратные. Результатом является получение простейшей линейной многокритериальной модели вида (105) – (109).

2. Решить задачу (105) – (109) с использованием алгоритма решения простейшей линейной многокритериальной задачи о назначениях, начиная с шага 2.

3. В полученном Парето-оптимальном решении выделить подматрицу (x_{ij}), $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$.

Таким образом, используя алгоритм решения однокритериальной открытой задачи о назначениях, можно свести данную задачу к многокритериальной линейной задаче о назначения и тем самым найти решение, оптимальное по Парето.

3.8 Модель и алгоритм решения многокритериальной задачи с недопустимыми назначениями

Обобщим задачу с недопустимыми назначениями на случай многокритериальности. Математическая модель такой задачи имеет вид:

$$f_1(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}^1 x_{ij} \to \min, \tag{110}$$

…

$$f_k(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}^{k} x_{ij} \to \min, \tag{111}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad j = \overline{1, n}, \tag{112}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad i = \overline{1, n}, \tag{113}$$

$$x_{ij} = 0, \quad \forall (i, j) \notin R, \tag{114}$$

$$x_{ij} \in \{0,1\}, \quad (i, j) \in R, \tag{115}$$

где R^l – бинарное отношение допустимых назначений, $R \subset \{1,2,.., n\} \times \{1,2,.., n\}$, $R^l = \{(i, j) \mid$ назначение (i, j) допустимо $\}$.

Однокритериальную задачу с недопустимыми назначениями предлагалось решать путем ввода в целевую функцию штрафных слагаемых Mx_{ij}, $\forall (i, j) \notin R$, где $M > n \max\limits_{\forall (i, j) \in R} c_{ij}$, например, $M = 2n \max\limits_{\forall (i, j) \in R} c_{ij}$. Использование данного подхода применительно к многокритериальной задаче требует предварительного нормирования матриц затрат $\mathbf{C}^l$, $l = \overline{1, k}$.

Учитывая, что в результате нормирования матриц затрат $\max\limits_{\forall (i, j) \in R} c_{ij}^l \le 1$, $l = \overline{1, k}$, можно взять $M = 2n$. Отсюда эквивалентное преобразование многокритериальной задачи с недопустимыми назначениями в простейшую линейную многокритериальную задачу формулируется так:

1) нормировать матрицы затрат $\mathbf{C}^l$, $l = \overline{1, k}$:

$$\tilde{c}_{ij}^{\,l} = \frac{c_{ij}^l - c_{\min}^l}{c_{\max}^l - c_{\min}^l};$$

2) найти размер штрафа $M^l = 2n$;

3) построить матрицы затрат $\mathbf{Q}^l$, $l = \overline{1, k}$, такие, что

$$q_{ij}^{l} = \begin{cases} c_{ij}^{l}, \text{ если } (i, j) \in R, \\ M, \text{ если } (i, j) \notin R. \end{cases}$$

Результатом применения преобразования является переход к простейшей линейно многокритериальной задачи о назначениях вида:

$$\varphi_1(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} q_{ij}^1 x_{ij} \to \min, \tag{116}$$

…

$$\varphi_k(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} q_{ij}^k x_{ij} \to \min, \tag{117}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1,\ j = \overline{1, n}, \tag{118}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1,\ i = \overline{1, n}, \tag{119}$$

$$x_{ij} \in \{0,1\},\ i, j = \overline{1, n}. \tag{120}$$

Модели (110) – (115) и (116) – (120) эквивалентны друг другу. Отсюда можно сформулировать алгоритм решения многокритериальной задачи с недопустимыми назначениями.

1. Применить к модели (110) – (115) эквивалентное преобразование недопустимых назначений. Результатом является получение простейшей линейной многокритериальной модели вида (116) – (120).

2. Решить задачу (116) – (120) с использованием алгоритма решения простейшей линейной многокритериальной задачи о назначениях, начиная с шага 2.

Результатом является получение решения, оптимального по Парето.

3.9 Модель и алгоритм решения многокритериальной задачи с порядком назначений

Обобщим задачу с порядком назначений на случай многокритериальности. Математическая модель такой задачи имеет вид:

$$f_1(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}^1 x_{ij} \to \min, \tag{121}$$

…

$$f_k(\mathbf{X}) = \sum^{n}\sum^{n} c^k x \to \min, \tag{122}$$

$$\sum^{n} x_{ij} = 1, \quad j = \overline{1, n}, \tag{123}$$

$$\sum^{n} x_{ij} = 1, \quad i = \overline{1, n}, \tag{124}$$

$$x_{ij} \in \{0,1\}, \quad i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, n},$$

$$(i, j) \overset{пр.}{<} (i, j^*), \quad i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{h+1, n}, \quad j^* = \overline{1, h}. \tag{126}$$

где $P = \{1,2,.., h\}$ – подмножество индексов работ, распределяемых в первую очередь.

В главе 2 показано, что однокритериальная задача с порядком назначений эквивалента совокупности двух последовательно решаемых задач – открытой и с недопустимыми назначениями. Аналогично, многокритериальная задача с порядком назначений эквивалента совокупности двух последовательно решаемых задач – многокритериальной открытой задаче и многокритериальной задаче с недопустимыми назначениями. Следовательно, можно описать алгоритм решения многокритериальной задачи с порядком назначений.

1. Нормировать матрицы затрат $\mathbf{C}^l$, $l = \overline{1, k}$:

$$\tilde{c}^{\,l}_{ij} = \frac{c^l_{ij} - c^l_{\min}}{c^l_{\max} - c^l_{\min}}.$$

2. Найти размер штрафа $M^l = 2n.$

3. Построить математическую модель назначения на работы из множества P:

$$\varphi_1(\mathbf{Y}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} q^1_{ij} y_{ij} \to \min, \tag{127}$$

…

$$\varphi_k(\mathbf{Y}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} q^k_{ij} y_{ij} \to \min, \tag{128}$$

$$\sum_{i=1}^{n} y_{ij} = 1, \quad j = \overline{1, n}, \tag{129}$$

$$\sum_{j=1}^{n} y_{ij} = 1, \quad i = \overline{1, n}, \tag{130}$$

$$y_{ij} \in \{0,1\}, \quad i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, n}, \tag{131}$$

где $q_{ij}^{l} = \begin{cases} c_{ij}^{l}, & i = \overline{1, n}, j = \overline{1, h}; \\ 0, & i = \overline{1, n}, j = \overline{h+1, n}, \end{cases} \quad l = \overline{1, k}.$

4. Решить задачу (127) – (131) с использованием алгоритма решения простейшей линейной многокритериальной задачи о назначениях, начиная с шага 2. Результатом является получение решения $\mathbf{Y}^* = (y_{ij}^*)$, оптимального по Парето.

5. Построить математическую модель назначения на работы из множества $I \setminus P$:

$$\xi_1(\mathbf{Z}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} w_{ij}^{1} z_{ij} \to \min, \tag{132}$$

$$\ldots$$

$$\xi_k(\mathbf{Z}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} w_{ij}^{k} z_{ij} \to \min, \tag{133}$$

$$\sum_{i=1}^{n} z_{ij} = 1, \quad j = \overline{1, n}, \tag{134}$$

$$\sum_{j=1}^{n} z_{ij} = 1, \quad i = \overline{1, n}, \tag{135}$$

$$x_{ij} \in \{0,1\}, \quad i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1,}, \tag{136}$$

где $w_{ij}^{l} = \begin{cases} c_{ij}, & \text{если } (i, j) \in R_{д.н.} \\ M, & \text{если } (i, j) \notin R_{д.н.}, \end{cases} \quad l = \overline{1, k};$

$R_{д.\,н.} = \{(i, j) \mid i \notin I_{н.}, j \notin P\}$ – бинарное отношение допустимых назначений;

$I_{н.} = \{i \mid y_{ij} = 1\}$ – подмножество индексов строк, на которые сделаны назначения на работы из множества P;

$M = 2n$ – штраф.

6. Решить задачу (132) – (136) с использованием алгоритма решения простейшей линейной многокритериальной задачи о назначениях, начиная с шага 2. Результатом является получение решения $\mathbf{Z}^* = (z_{ij}^*)$, оптимального по Парето.

7. Найти оптимальное решение $\mathbf{X}^*$ задачи (121) – (126):

$$x_{ij}^* = \begin{cases} y_{ij}^*, & i = \overline{1, n}, j = \overline{1, h}; \\ z_{ij}^*, & i = \overline{1, n}, j = \overline{h+1, n}. \end{cases}$$

Следует отметить, что решение многокритериальной задачи с порядком назначений осложняется необходимостью дважды применять оператор свѐртки.

3.10 Модель и алгоритм решения многокритериальной задачи с приоритетными назначениями

Обобщим задачу с приоритетными назначениями на случай многокритериальности. Математическая модель такой задачи имеет вид:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \ldots_{ij} \ldots_{ij} \qquad (137)$$

…

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \ldots_{ij} \ldots_{ij} \qquad (138)$$

$$\sum^{n} x_{ij} = 1, \quad j = \overline{1, n}, \qquad (139)$$

$$\sum^{n} x_{ij} = 1, \quad i = \overline{1, n}, \qquad (140)$$

$$x_{ij} \in \{0,1\}, \quad i, j = \overline{1, n}, \qquad (141)$$

$$(i^*, j^*) \in R_{пр.}, \qquad (142)$$

где $R_{пр.} = \{(i, j) \mid$ назначение (i, j) имеет приоритет$\}$ – бинарное отношение приоритета.

Ранее показано, что можно положить $M = 2n$, при этом использование штрафных слагаемых внутри целевых функций многокритериальной задачи требует предварительного нормирования матриц затрат $\mathbf{C}^l,\ l = \overline{1,k}$. Тогда эквивалентное преобразование многокритериальной задачи с приоритетными назначениями в простейшую линейную многокритериальную задачу формулируется так:

1) нормировать матрицы затрат $\mathbf{C}^l,\ l = \overline{1,k}$:

$$\tilde{c}_{ij}^{\,l} = \frac{c_{ij}^l - c_{\min}^l}{c_{\max}^l - c_{\min}^l};$$

2) найти размер штрафа $M^l = 2n$;

3) построить матрицы затрат $\mathbf{Q}^l,\ l = \overline{1,k}$, такие, что

$$q_{ij}^l = \begin{cases} c_{ij}^l, \text{ если } (i,j) \in R_{пр.}, \\ c_{ij}^l + M, \text{ если } (i,j) \notin R_{пр.}. \end{cases}$$

Результатом применения преобразования является переход к простейшей линейно многокритериальной задачи о назначениях вида:

$$\varphi_1(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} q_{ij}^1 x_{ij} \to \min, \tag{143}$$

$$\ldots$$

$$\varphi_k(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} q_{ij}^k x_{ij} \to \min, \tag{144}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1,\ j = \overline{1,n}, \tag{145}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1,\ i = \overline{1,n}, \tag{146}$$

$$x_{ij} \in \{0,1\},\ i,j = \overline{1,n}. \tag{147}$$

Отсюда алгоритм решения многокритериальной задачи с приоритетными назначениями имеет вид:

1) применить к задаче (137) – (142) эквивалентное преобразование в

простейшую линейную многокритериальную задачу (143) – (147);

2) решить задачу (143) – (147) с использованием алгоритма решения многокритериальной линейной задачи о назначениях, начиная с шага 2.

Результатом является получение решения, оптимального по Парето.

Выводы

Построена модель простейшей линейной многокритериальной линейной задачи о назначениях. Предложен алгоритм решения данной задачи, основанный на свертке набора исходных целевых функций (с учетом их веса) в один обобщенный скалярный критерий с учетом специфики ограничений и частных критериев задачи. Использование данного алгоритма обеспечивает возможность применения для решения многокритериальной задачи о назначениях специально разработанных для однокритериального случая методов – венгерского и метода Мака. Результатом применения алгоритма является получения решения, оптимального по Парето.

Рассмотрены обобщения на случай многокритериальности и построены математические модели следующих многокритериальных обобщенных задач: многокритериальной задачи о назначениях с целевыми функциями противоположного направления; многокритериальной открытой задачи о назначениях; многокритериальной задачи с недопустимыми назначениями; многокритериальной задачи с порядком назначений; многокритериальной задачи с приоритетными назначениями.

Предложены алгоритмы решения многокритериальных обобщенных задач о назначениях, основанные на приведении обобщенной задачи к линейной форме и ее последующей оптимизации с использованием разработанного алгоритма решения многокритериальной линейной задачи о назначениях.

Заключение

В работе выделены особенности математической модели простейшей линейной задачи о назначениях. Рассмотрены различные обобщения простейшей линейной модели и предложена классификация задач о назначениях по основным признакам, к которым относятся вид целевой функции и их количество, направление оптимизации, тип коэффициентов целевой функции, размерность неизвестных. Проведен анализ алгоритмов решения задач о назначениях. Исследованы алгоритмы, основанные на эквивалентных преобразованиях задач о назначениях.

Разработаны эквивалентные преобразования в простейшую линейную модель комбинаций недопустимых назначений, порядка назначений, приоритетных назначений.

Разработаны математические модели однокритериальных обобщенных задач о назначениях, отличительной особенностью которых является их эквивалентность простейшей линейной модели.

Разработаны математические модели многокритериальных обобщенных задач о назначениях, отличительной особенностью которых является их эквивалентность многокритериальной простейшей линейной модели.

Разработаны алгоритмы решения однокритериальных и многокритериальных обобщенных задач о назначениях, которые, в отличие от известных, основаны на эквивалентных преобразованиях математических моделей, что позволяет использовать для нахождения оптимального решения стандартные алгоритмы.

Разработан комплекс программ, использование которых позволяет найти точное решение обобщенной задачи о назначениях с помощью эквивалентных преобразований и с использованием стандартных алгоритмов.

Список использованных источников

1. Карманов, В. Г. Математическое программирование / В. Г. Карманов. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 264 с.

2. Банди, Б. Основы линейного программирования / Б. Банди. – М.: Радио и связь, 1989. – 176 с.

3. Хыдырова, Г. Д. Математическая модель задачи о назначениях и возможности ее использования при принятии управленческих решений / Г. Д. Хыдырова, А. Ю. Душкина, А. Г. Савина // Научные записки ОрелГИЭТ. – 2014. – № 1 (7). – С. 305 – 310.

4. Малюгина, О. А. Использование задачи о назначениях при решении проблемы формирования штатов / О. А. Малюгина, Г. Д. Чернышова // Вестник Факультета прикладной математики, информатики и механики. – 2010. – № 8.– С. 141 – 148.

5. Кордюков, Р. Ю. Модель и алгоритмизация оптимизационной задачи о назначениях в условиях дополнительных ограничений / Р. Ю. Кордюков, Р. В. Допира, А. В. Иванова, Ф. Н. Абу-Абед, Д. В. Мартынов // Программные продукты и системы. – 2016. – № 2 (114). – С. 16 – 22.

6. Кордюков, Р. Ю. Метод оптимизации размещения гособоронзаказа на предприятиях оборонно-промышленного комплекса / Р. Ю. Кордюков // Научный вестник ОПК России. – 2015. – № 2. – С. 70 – 73.

7. Эддоус, М. Методы принятия решений / М. Эддоус, Р. Стэнсфилд. – М.: Аудит, ЮНИТИ, 1997. – 590 с.

8. Коркишко, Н. М. Приближенные алгоритмы решения некоторых многоиндексных задач о назначениях : автореферат дис. … канд. физ.-мат. наук.: 01.01.09 – Новосибирск, 2003. – 20 с.

9. Misevicius, A. A tabu search algorithm for the quadratic assignment problem / A. Misevicius // Computational optimization and applications. – 2005. – Vol. 30. – pp. 95 – 111.

10. Burkard, R. E. Assignment problems / R. E. Burkard, M. Dell'Amico, S. Mortello. – Philadelphia: SIAM, 2009. – 402 p.

11. Farahani, R. Z. Facility location: Concepts, models, algorithms and case studies / R. Z. Farahani, M. Hekmatfar. – Heidelberg: Physica-Verlag, 2009. – 543 p.

12. Qela, E. The quadratic assignment problem: Theory and algorithms. – Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1998. – 287 p.

13. Glover, F. Tabu search – Part I / F. Glover // ORSA J. Comput. – 1989. – Vol. 1. – pp. 190 – 206.

14. Glover, F. Tabu search - Part II / F. Glover // ORSA J. Comput. 1990. – Vol. 2. – pp. 4 – 32.

15. Гуляницкий, Л. Ф. Об одном подходе к использованию вероятностного моделирования в схеме генетического алгоритма / Л. Ф. Гуляницкий, О. Я. Турчин // Компьютерная математика: материалы Межд. конф. по индуктивному моделированию. – Львов: ГНИИ информационной инфраструктуры, 2002. – Т. 2. – С. 275 – 281.

16. Гуляницкий, Л. Ф. Метаэвристический метод деформаций для решения задач комбинаторной оптимизации / Л.Ф. Гуляницкий // International Conference «Knowledge – Dialogue – Solutions». 2007 [Электронный ресурс]. URL: http://www.foibg.com/conf/ITA2007/KDS2007/PDF/KDS07-Hulyanitskiy.pdf (дата обращения: 22.05.2020).

17. Ahuja R. K. A survey of very large-scale neighborhood search techniques / R. K. Ahuja, O. Ergun, J. B. Orlin, A. P. Punnen // Discrete Applied Mathematics, 2002. – Vol. 123. – pp. 75 – 102.

18. Каширина, И. Л. Генетический алгоритм решения квадратичной задачи о назначениях специального вида / И. Л. Каширина // Вестник ВГУ. – 2003. – №1. – С. 128 – 131.

19. Fleurent, C. Genetic hybrids for the quadratic assignment problem / C. Fleurent, J. A. Ferland // Quadratic Assignment and Related Problems, DIMACS Series, 1994. – Vol. 16. – pp. 173 – 187.

20. Holland, J. H. Adaptation in Natural and Artificial Systems / J. H. Holland. –Michigan: The MIT Press, 1992. – 232 p.

21. Штовба, С.Д. Муравьиные алгоритмы / С.Д. Штовба // Exponenta Pro. Математика в приложениях. – 2003. – №4. – С. 70 –75.

22. Colorni, A. The ant system: Optimization by a colony of cooperating agents / A. Colorni, M. Dorigo, V. Maniezzo // IEEE transactions on systems, man, and cybernetics. – 1996. – Vol. 26. – pp. 29 – 41.

23. Каширина, И. Л. Применение растущей нейронной сети для решения квадратичной задачи о назначениях / И.Л. Каширина // Вестник ВГУ. Серия: Системный анализ и информационные технологии. – 2007. – № 1. – С. 52 – 55.

24. Лагздин, А. Ю. Построение и анализ алгоритмов решения квадратичной задачи о назначениях на сетях : диссертация ... канд. физ.-мат. наук : 05.13.18 – Омск, 2012. – 103 с.

25. Метельский, Н. Н. Методы локальной оптимизации для задачи размещения двудольных графов / Н. Н. Метельский // Журнал вычислительной математики и математической физики, 1994. – Т. 24. – № 9. – С. 1428 – 1432.

26. Забудский, Г. Г. Полиномиальные алгоритмы решения квадратичной задачи о назначениях на сетях / Г. Г. Забудский, А. Ю. Лагздин // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2010. – Т. 50. – №11. – С. 2052 – 2059.

27. Забудский, Г. Г. Динамическое программирование для решения квадратичной задачи о назначениях на дереве / Г. Г. Забудский, А. Ю. Лагздин // Автоматика и телемеханика. – 2012. – № 2. – С. 141 – 155.

28. Burkard, R. E. On the biquadratic assignment problem / R. E. Burkard, E. Cela, B. Klinz // Quadratic Assignment and Related Problems, DIM ACS Series. – 1994. – Vol. 16. – pp. 117 – 146.

29. Burkard, R. E. Heuristics for biquadratic assignment problems and their computational comparison / R. E. Burkard, E. Cela // European Journal of Operational Research, 1995. – Vol. 83. – pp. 283 – 300.

30. Богданова, Е. Л. Оптимизация в проектном менеджменте: линейное программирование: учебное пособие / Е. Л. Богданова, К. А. Соловейчик, К. Г. Аркина. – СПб.: Университет ИТМО, 2017. – 165 с.

31. Агальцов, В. П. Математические методы в программировании / В. П. Агальцов, И. В. Волдайская. – М.: ИНФРА-М, 2006 г. – 224 с.

32. Derigs, U. An augmenting path method for solving linear bottleneck assignment problems / U. Derigs, U. Zimmermann // Computing, 1998. – Vol. 19. – pp. 285 – 295.

33. Глебов, Н. И. Об одном обобщении минимаксной задачи о назначениях / Н. И. Глебов // Дискретный анализ и исследование операций. – 2004 . – № 1 – С. 36–43

34. Серая, О. В. Минимаксная проблема назначения / О. В. Серая // Восточно-Европейский журнал передовых технологий. – 2009. – № 3/3 (39). – С. 8 – 11.

35. Коган, Д. И. Концепции и алгоритмы решения многокритериальных модификаций задачи о назначениях / Д. И. Коган, Ю. С. Федосенко, Д. А. Хандурин // Вестник Волжской государственной академии водного транспорта. – 2017. – №53. – С. 25 – 36.

36. Медведев, С. Н. О нечѐткой задаче о назначениях / С. Н. Медведев, Т.М. Леденева // Вестник Белгородского государственного технического университета им. В. Г. Шухова. – 2012. – № 2. – С. 154 – 157.

37. Медведев, С. Н. Нахождение области устойчивости интервальной задачи о назначениях / С. Н. Медведев // Вестник Воронежского государственного технического университета. – 2011. – № 10. – С. 51 – 54.

38. Попов, В.П. Интервальный подход к оптимизации решения многокритериальной задачи о назначениях / В.П. Попов, И.В. Майорова // Прикладная информатика. – 2015. – № 10. – С. 122 – 131.

39. Salehi, K. An approach for solving multi-objective assignment problemwith interval parameters / K. Salehi // Management Science Letters. – 2017. – Vol. 4. – pp. 2155 –2160.

40. Steuer, R. E. Algorithms for linear programming problems with interval objective function coefficients / R. E. Steuer // Mathematics of Operations Research. – 1981. – Vol. 6. – pp. 222 – 248.

41. Mraz, F. On supremum of the solution faction in linear programs with interval coefficients / F. Mraz // Research Report. – 1993. – Vol. 2. – pp. 182 – 196.

42. Kumar, A. Assignment and Travelling Salesman Problems with Coefficients as LR Fuzzy Parameters / A. Kumar, A. Gupta // International Journal of Applied Science and Engineering. – 2012. – Vol. 10(3). – 155 – 170.

43. Кочкаров, Р. А. Многокритериальная задача о назначениях на предфрактальном графе / Р. А. Кочкаров // Новые информационные технологии в автоматизированных системах. – 2014. – № 1. – С. 319 – 328.

44. Каширина, И. Л. Генетический алгоритм решения многокритериальной задачи о назначениях / И. Л. Каширина, Б. А. Семенов // Информационные технологии. – 2007. – № 5. – С. 62 – 68.

45. Медведева, О. А. Решение задачи о назначениях с дополнительным требованием / О. А. Медведева, А. Ю. Полетаев // Вестник Воронежского государственного университета. – 2016. – № 1. – С. 77 – 81.

46. Frieze, A. Efficient Algorithms For Three-Dimensional Axial and Planar Random Assignment Problems / A. Frieze , G. Sorkin // Random Struct. Algorithms. – 2015. – № 46/1. – pp. 160–196.

47. Дичковская С. А. Исследование полиномиальных алгоритмов решения многокритериальной трехиндексной планарной задачи о назначениях / С. А. Дичковская, М. К. Кравцов // Вычислительная математика и математическая физика. – 2007. – № 47/6. – С. 1029 – 1038.

48. Медведева, О. А. Модели и алгоритмы решения многокритериальных задач о назначениях с дополнительными ограничениями : диссертация ... канд. физ.-мат. наук : 05.13.18 – Воронеж, 2013. – 159 с.

49. Scarelli, A. A multicriteria assignment problem / A. Scarelli, S. C. Narula // Journal of Multi-Criteria Decision Analysis. – 2002. № 11(2). pp. – 65 – 74.

50. Кожухаров, А. Н. Многокритериальная задача о назначениях / А. Н. Кожухаров, О. И. Ларичев // Автоматика и телемеханика. – 1987. – № 7. – С. 71–88.

51. Никонов, О. Я. Математические методы решения многокритериальной задачи о назначениях / О. Я. Никонов, О. А. Подоляка, А. Н. Подоляка, Е. В. Скакалина // Вісник Харківського національного автомобільно-дорожнього університету – 2011. – № 5. – С. 103 – 112.

52. Медведева, О. А. Задача о назначениях с возможностью обучения // Вестник Санкт-Петербургского университета. – 2013. – № 1. – С. 85 – 94.

53. Муха, В.С. Решение открытой задачи назначения стандартным симплекс-методом / В.С. Муха // Доклады Белорусского государственного университета информатики и радиоэлектроники. – 2014. – № 6 (84). – С. 104 –107.

54. Близнова, О.В. Логическое моделирование систем с последовательно-параллельной структурой : автореферат дис. канд. техн. наук : 05.13.18. – Саратов, 2014. – 15 с.

55. Pusztaszeri, J. F. Tracking elementary particles near their primary vertex: A combinatorial approach / J. F. Pusztaszeri, P. E. Rensing, T. M. Liebling // Journal of Global Optimization. – 1996. – Vol. 9. – P. 41 – 64.

56. Alighanbari, M. Cooperative task assignment of unmanned aerial vehicles in adversarial environments / M. Alighanbari, J.P. How // Proceedings of the American Control Conference. – 2005. Vol. 7. – P. 4661 – 4666.

57. Гимади, Э. Х. Об асимптотически точном алгоритме решения одной модификации трѐхиндексной планарной задачи о назначениях / Э. Х. Гимади, Ю. В. Глазков // Дискретный анализ и исследование операций. – 2007. – №.1. – С. 442 – 452.

58. Balas, E. An algorithm for the three-index assignmentproblem / E. Balas, M. J. Saltzman // Operations Research. – 1991. – № 39. – P. 150–161.

59. Magos, D. Tabu search for the planar three-index assignment problem / D. Magos // Journal of Global Optimization. – 1996. – № 8. – P. 35–48.

60. Афраймович, Л. Г. Исследование комбинированного решения трехиндексной задачи о назначениях / Л. Г. Афраймович, А. С. Тюнтяев, Л. А. Тюнтяева // Системный администратор. – 2019. – № 5 (198). – С. 84 – 87.

61. Гимади, Э. Х. Аксиальные трѐхиндексные задачи о назначении и коммивояжера: быстрые приближѐнные алгоритмы и их вероятностный анализ / Э. Х. Гимади, А. И. Сердюков // Известия высших учебных заведений. Математика. – 1999. – №12 (451). – С. 19 – 25.

62. Aiex, R. M. GRASP with path relinking for three-index assignment / R. M. Aiex, M. G. C. Resende, P. M. Pardalos, G. Toraldo // Informs Journal on Computing. – 2005. – № 17. – P. 224 – 247.

63. Huang, G. A hybrid genetic algorithm for the three-index assignment problem / G. Huang, A. Lim // European Journal of Operational Research. –2006. № 172. – P. 249-257.

64. Gimadi, E. Kh. Multi-index assignment problem: anasymptotically optimal approach / E. Kh. Gimadi, N. M. Kairan // Emerging Technologies and Factory Automation: proc. 8th IEEE Intern. Conf. – NY: IEEE, 2001. – P. 707–710

65. Gimadi, E. Kh. On some modifications of three indexplanar assignment problem / E. Kh. Gimadi, N. M/ Korkishko // Discrete optimization methods in production andlogistics: proc. The second int. workshop. – Omsk, 2004. – P. 161-165.

66. Трегубов, А. Г. Вероятностный подход к решению трехиндексной аксиальной задачи о назначениях. Вычислительный эксперимент / А. Г. Трегубов, С. Н. Медведев // Вестник Воронежского государственного университета. – 2015. – № 4. – С. 31 – 37.

67. Гимади, Э. Х. Об асимптотически точном алгоритме решения одноймодификации трѐхиндексной планарной задачи о назначениях

/ Э. Х. Гимади, Ю. В. Глазков // Дискретный анализ и исследование операций. – 2006. – № 1. – С. 10 – 26.

68. Кравцов, М. К. Асимптотический подход к решению много-критеральной трехиндексной планарной проблемы выбора / М. К. Кравцов, С. А. Дичковская // Кибернетика и системный анализ. – 2004. – № 3. – С. 24 –29

69. Лелякова, Л. В. Прикладные задачи о назначениях (модели, алгоритмы решения) / Л. В. Лелякова, А. Г. Харитонова, Г. Д. Чернышова // Вестник Воронежского государственного университета. – 2017. – № 2. – С. 22 – 27.

70. Балашова, И. Ю. Модель и алгоритм решения задачи о назначениях с приоритетами / И. Ю. Балашова // Информационные технологии в науке и образовании: тр. VII Всерос. науч.-практ. конф. – Пенза: Изд-во ПГУ, 2020. – С. 80 – 82.

71. Подиновский, В. В. Идеи и методы теории важности критериев в многокритериальных задачах принятия решений / В. В. Подиновский. – М.: Наука, 2019. – 103 с.

72. Лотов, А. В. Многокритериальные задачи принятия решений: учебное пособие / А. В. Лотов, И. И. Поспелова. – М.: МАКС Пресс, 2008. – 197 с.

73. Штойер, Р. Многокритериальная оптимизация. Теория, вычисоения и приложения: пер. с англ. / Р. Штойер. – М.: Радио и связь, 1992. – 504 с.

Приложение А

ЛИСТИНГ ПРОГРАММЫ ПОИСКА ОПТИМАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ ОТКРЫТОЙ ЗАДАЧИ О НАЗНАЧЕНИЯХ

(рекомендуемое)

$ORIGIN := 1$

$m := 6$

$n := 3$

$$C := \left| \begin{array}{l} \text{for } i \in 1..m \\ \quad \text{for } j \in 1..n \\ \quad\quad C_{i,j} \leftarrow \text{round}(\text{rnd}(100)) \\ C \end{array} \right.$$

$p := \max(m, n)$

$$Q := \left| \begin{array}{ll} \text{for } i \in 1..m & \\ \quad \text{for } j \in 1..n & \\ \quad\quad Q_{i,j} \leftarrow C_{i,j} & \\ \text{for } i \in 1..p & \text{if } m > n \\ \quad \text{for } j \in n+1..p & \\ \quad\quad Q_{i,j} \leftarrow 0 & \\ \text{for } i \in m+1..p & \text{otherwise} \\ \quad \text{for } j \in 1..p & \\ \quad\quad Q_{i,j} \leftarrow 0 & \\ Q & \end{array} \right.$$

$e(i, j) := 1$

$a := \text{matrix}(p, 1, e)$

$b := \text{matrix}(p, 1, e)$

$$\varphi(X) := \sum^{p} \sum^{p}$$

$_{i,j} \cdot X \quad _j$ $\quad _{i=1 \; j=1}$)

$_{m, \atop m} := 0$

Given

$X \cdot a = b$

$X^T \cdot a = b$

$X \geq 0$

$X := \text{Minimize}(\varphi , X)$

$Y := \text{submatrix}(X, 1, m, 1, n)$

$$f(X) := \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \left(_{i,j} \cdot Y \quad _j \right)$$

Приложение Б

ЛИСТИНГ ПРОГРАММЫ ПОИСКА ОПТИМАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О НАЗНАЧЕНИЯХ С МАТРИЦЕЙ ЗАТРАТ, ЭЛЕМЕНТЫ КОТОРОЙ ПРОИЗВОЛЬНОГО ЗНАКА

(рекомендуемое)

$ORIGIN := 1$

$n := 5$

$$C := \left| \begin{array}{l} \text{for } i \in 1..n \\ \quad \text{for } j \in 1..n \\ \quad\quad C_{i,j} \leftarrow \text{round}(\text{rnd}(100) - \text{rnd}(100)) \\ C \end{array} \right.$$

$Min := \min(C)$

$$Q := \left| \begin{array}{l} \text{for } i \in 1..n \\ \quad \text{for } j \in 1..n \\ \quad\quad Q_{i,j} \leftarrow C_{i,j} - Min \\ Q \end{array} \right.$$

$e(i,j) := 1$

$a := \text{matrix}(n,1,e)$

$b := \text{matrix}(n,1,e)$

$$f(X) := \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left(Q_{i,j} \cdot X_{i,j}\right)$$

$X_{n,n} := 0$

Given

$X \cdot a = b$

$X^T \cdot a = b$

$X \geq 0$

$X := \text{Minimize}(f, X)$

Приложение В

ЛИСТИНГ ПРОГРАММЫ ПОИСКА ОПТИМАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ С НЕДОПУСТИМЫМИ НАЗНАЧЕНИЯМИ

(рекомендуемое)

$ORIGIN := 1$

$n := 5$

$$R := \left| \begin{array}{l} \text{for } i \in 1..n \\ \quad \text{for } j \in 1..n \\ \quad\quad R_{i,j} \leftarrow 0 \\ \text{for } i \in 1..n \\ \quad \left| \begin{array}{l} p \leftarrow 1 \\ \text{while } p < n - 1 \\ \quad \left| \begin{array}{l} k \leftarrow \text{round}(\text{rnd}(n-1)) + 1 \\ R_{i,k} \leftarrow 1 \\ p \leftarrow \sum_{k=1}^{n} R_{i,k} \end{array} \right. \end{array} \right. \\ R \end{array} \right.$$

$$C := \left| \begin{array}{l} \text{for } i \in 1..n \\ \quad \text{for } j \in 1..n \\ \quad\quad C_{i,j} \leftarrow \text{round}(\text{rnd}(100)) \cdot R_{i,j} \\ C \end{array} \right.$$

$M := 2 \cdot n \max(C)$

$$Q := \left| \begin{array}{l} \text{for } i \in 1..n \\ \quad \text{for } j \in 1..n \\ \quad\quad \left| \begin{array}{l} Q_{i,j} \leftarrow M \text{ if } R_{i,j} = 0 \\ Q_{i,j} \leftarrow C_{i,j} \text{ otherwise} \end{array} \right. \\ Q \end{array} \right.$$

$e(i,j) := 1$

$a := \text{matrix}(n, 1, e)$

$b := \text{matrix}(n, 1, e)$

$$\varphi(X) := \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left(Q_{i,j} \cdot X_{i,j}\right)$$

$X_{n,n} := 0$

Given

$X \cdot a = b$

$X^T \cdot a = b$

$X \geq 0$

$X := \text{Minimize}(\varphi, X)$

Приложение Г

ЛИСТИНГ ПРОГРАММЫ ПОИСКА ОПТИМАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ С ПОРЯДКОМ НАЗНАЧЕНИЙ

(рекомендуемое)

```
ORIGIN := 1

n := 8

C := | for i ∈ 1..n
     |   for j ∈ 1..n
     |     C[i,j] ← round(rnd(100))
     | C

k := round(rnd(n − round(n/2)) + 1)

Q1 := | for i ∈ 1..n
      |   for j ∈ 1..k
      |     Q1[i,j] ← C[i,j]
      | for i ∈ 1..n
      |   for j ∈ k + 1..n
      |     Q1[i,j] ← 0
      | Q1

e(i,j) := 1
a := matrix(n, 1, e)
b := matrix(n, 1, e)
```

$$\varphi 1(Y) := \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left(Q1_{i,j} \cdot Y_{i,j}\right)$$

```
Y[n,n := 0

Given
  Y·a = b
  Y^T·a = b
  Y ≥ 0
  Y := Minimize(φ1, Y)

In := | for j ∈ 1..k
      |   for i ∈ 1..n
      |     In[j ← i if Y[i,j = 1
      | In

M := 2·n·max(C)

Q2 := | for i ∈ 1..n
      |   for j ∈ 1..k
      |     Q2[i,j] ← M
      | for i ∈ 1..n
      |   for j ∈ k + 1..n
      |     Q2[i,j] ← C[i,j]
      | for m ∈ 1..3
      |   | k ← In[m]
      |   | for j ∈ 1..n
      |   |   Q2[k,j] ← M
      | Q2
```

$$\varphi 2(Z) := \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left(Q2_{i,j} \cdot Z_{i,j} \right)$$

$Z_{n,n} := 0$

Given

$Z \cdot a = b$

$Z^T \cdot a = b$

$Z \geq 0$

$Z := \text{Minimize}(\varphi 2, Z)$

$Y1 := \text{submatrix}(Y, 1, n, 1, k)$

$Z1 := \text{submatrix}(Z, 1, n, k + 1, n)$

$X := \text{augment}(Y1, Z1)$

$$f(X) := \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left(C_{i,j} \cdot X_{i,j} \right)$$

Приложение Д

ЛИСТИНГ ПРОГРАММЫ ПОИСКА ОПТИМАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ С ПРИОРИТЕТНЫМИ НАЗНАЧЕНИЯМИ

(рекомендуемое)

$ORIGIN := 1$

$n := 7$

$$C := \left\| \begin{array}{l} \text{for } i \in 1..n \\ \quad \text{for } j \in 1..n \\ \quad\quad C_{i,j} \leftarrow \text{round}(\text{rnd}(100)) \\ C \end{array} \right.$$

$$R := \left\| \begin{array}{l} \text{for } i \in 1..n \\ \quad \text{for } j \in 1..n \\ \quad\quad R_{i,j} \leftarrow 0 \\ \text{for } i \in 1..n \\ \quad \left\| \begin{array}{l} k \leftarrow \text{round}(\text{rnd}(n-1)) + 1 \\ R_{i,k} \leftarrow 1 \end{array} \right. \\ R \end{array} \right.$$

$M := 2n \cdot \max(C)$

$$Q := \left| \begin{array}{l} \text{for } i \in 1..n \\ \quad \text{for } j \in 1..n \\ \quad\quad \left| \begin{array}{l} Q_{i,j} \leftarrow M + C_{i,j} \quad \text{if } R_{i,j} = 0 \\ Q_{i,j} \leftarrow C_{i,j} \quad \text{otherwise} \end{array} \right. \\ Q \end{array} \right.$$

$e(i,j) := 1$

$a := \text{matrix}(n, 1, e)$

$b := \text{matrix}(n, 1, e)$

$$\varphi(X) := \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left(Q_{i,j} \cdot X_{i,j}\right)$$

$X_{n,n} := 0$

Given

$X \cdot a = b$

$X^T \cdot a = b$

$X \geq 0$

$X := \text{Minimize}(\varphi, X)$

$$f(X) := \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left(C_{i,j} \cdot X_{i,j}\right)$$

Приложение Е

ЛИСТИНГ ПРОГРАММЫ ПОИСКА ОПТИМАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ ПРОСТЕЙШЕЙ ЛИНЕЙНОЙ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ О НАЗНАЧЕНИЯХ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ СВЕРТКИ НА ОСНОВЕ ОТКЛОНЕНИЯ ОТ ИДЕАЛЬНОЙ ТОЧКИ

(рекомендуемое)

$ORIGIN := 1$

$n := 5$ / Размерность матриц затрат

$k := 3$ / Количество целевых функций

$$C(k) := \left| \begin{array}{l} \text{for } i \in 1..n \\ \quad \text{for } j \in 1..n \\ \quad\quad Q_{i,j} \leftarrow \text{round}(\text{rnd}(100) + 1) \\ Q \end{array} \right.$$

/ Задание k матриц затрат. Элементы матриц формируются случайным образом

$$f(1,X) := \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left[\left(C(1)_{i,j} \right) \cdot X_{i,j} \right]$$

/ Задание k целевых функций

$$fnorm(1,X) := \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left[\left(\frac{C(1)_{i,j} - \min(C(1))}{\max(C(1)) - \min(C(1))} \right) \cdot X_{i,j} \right]$$

/ Нормализация целевых функций

$f1(X) := fnorm(1,X)$ / Поиск идеальной точки

$f2(X) := fnorm(2,X)$

$f3(X) := fnorm(3,X)$

$w(i,j) := 1$

$a := matrix(n,1,w)$

$b := matrix(n,1,w)$

$X_{n,n} := 0$

Given

$X \cdot a = b$

$X^T \cdot a = b$

$X \ge 0$

$X1 := Minimize(f1, X)$

Given

$X \cdot a = b$

$X^T \cdot a = b$

$X \ge 0$

$X2 := Minimize(f2, X)$

Given

$X \cdot a = b$

$X^T \cdot a = b$

$X \ge 0$

$X3 := Minimize(f3, X)$

$$Fid := \begin{pmatrix} f1(X1) \\ f2(X2) \\ f3(X3) \end{pmatrix}$$

/ Идеальная точка

$$\lambda := \begin{array}{|l} s \leftarrow 0 \\ \text{for } i \in 1..k \\ \quad \begin{array}{|l} \lambda_i \leftarrow \mathrm{rnd}(10) + 1 \\ s \leftarrow s + \lambda_i \end{array} \\ \text{for } i \in 1..k \\ \quad \lambda_i \leftarrow \mathrm{round}\left(\dfrac{\lambda_i}{s}, 2\right) \\ \lambda \end{array}$$

/ Задание весовых коэффициентов

$$g1(X) := \max\left[\lambda_1\left(\mathrm{fnorm}(1,X) - Fid_1\right), \lambda_2\left(\mathrm{fnorm}(2,X) - Fid_2\right), \lambda_3\left(\mathrm{fnorm}(3,X) - Fid_3\right)\right]$$

/ Задание обобщенного критерия на основе чебышевской метрики

$$g2(X) := \sqrt{\sum_{l=1}^{k} \left[\lambda_l\left(\mathrm{fnorm}(l,X) - Fid_l\right)^2\right]}$$

/ Задание обобщенного критерия на основе евклидовой метрики

Given

$X \cdot a = b$

$X^T \cdot a = b$

$X \geq 0$

$X := \mathrm{Minimize}(g1, X)$

/ Решение простейшей линейной однокритериальной задачи о назначениях с обобщенным критерием, заданным на основе чебышевской метрики

Given

$X \cdot a = b$

$X^T \cdot a = b$

$X \geq 0$

$Y := \mathrm{Minimize}(g2, X)$

/ Решение простейшей линейной однокритериальной задачи о назначениях с обобщенным критерием, заданным на основе евклидовой метрики