Методические указания к выполнению
контрольной работы дисциплины
«информационные технологии»
ГР. АХ-14-ЗП

Задание 1. Решение задач линейного программирования в MS Excel.

Задачи линейного программирования (ЛП) являются математическими моделями многих практических задач, возникающих в экономике, планировании, управлении и других областях. Кроме того, в ряде случаев решение задачи линейного программирования является этапом решения более сложной задачи оптимизации (например, задачи целочисленного линейного программирования) [1,3,6,7].

Под задачей линейного программирования понимается задача поиска решения $x \in R^n$, которое удовлетворяет системе линейных равенств или неравенств и на котором достигается максимальное или минимальное значение линейной целевой функции $f(x)$.

Общая постановка задачи ЛП:

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max, \qquad (1)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ \# \ b_i, \quad i = 1,\dots,m, \qquad (2)$$

$$x_j \geq 0, \textit{ для некоторых } j = 1,\dots,n, \qquad (3)$$

где под знаком “#” понимается любой из знаков “≤”, “≥” и “=”, причем в одной задаче ЛП могут встречаться знаки всех трех типов.

Классическим примером содержательной задачи, математической моделью которой является задача линейного программирования, служит задача оптимального планирования производства.

Для решения задач ЛП малой и средней размерности (десятки и сотни переменных) используются стандартные программные продукты. Для решения задач ЛП большой размерности (тысячи переменных) требуется разработка специального программного обеспечения.

Далее рассмотрим решение задач ЛП в пакетах MathCAD [5] и MS Excel [4] на примере задачи с двумя переменными, которые, без ограничения общности, будем обозначать x и y.

Решение задачи линейного программирования в Microsoft Excel. Рассмотрим решение задачи ЛП

Требуется найти максимум целевой функции

$$f(x) = 4x + 2y \to max,$$

$$2x + 3y \leq 18,$$
$$-x + 3y \leq 9,$$
$$2x - y \leq 10,$$

x ≥ 0, y ≥ 0.

Сначала выделим ячейки под значения под значения переменных *x* и *y*, например, ячейки С3 и С4. Далее в ячейку С6 введем целевую функцию

= 4*C3 + 2*C4.

В ячейки В9 : В11 введем левые части ограничений

= 2*C3 + 3*C4,
= - 1*C3 + 3*C4,
= 2*C3 - 1*C4,

а в ячейки С9 : С11 – правые части ограничений (см. рис.2).

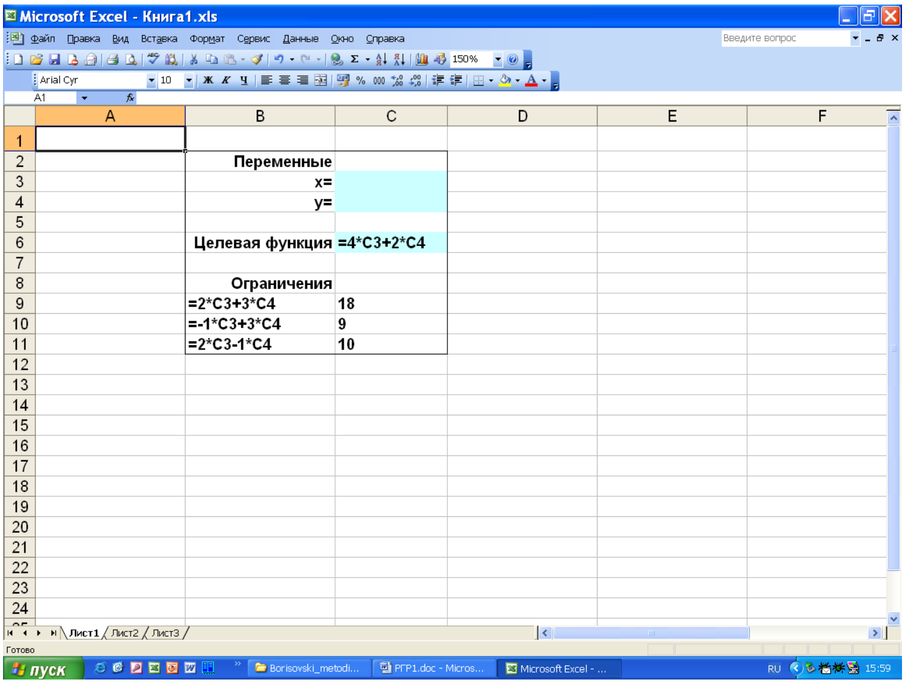


Рис. 2. Диапазоны, отведенные под переменные, целевую функцию и ограничения.

После этого выберем в главном меню команду **Сервис, Поиск решения.** Если в меню **Сервис** этого пункта нет, нужно установить надстройку. Для этого выберем в меню **Сервис** пункт **Надстройки**. В диалоговом окне "Надстройки" нужно найти в списке надстроек "Поиск решения" и установить слева от него флажок. Загрузится Решатель. В дальнейшем при запуске Excel Решатель будет загружаться автоматически, пока не будет снят флажок в окне "Надстройки".

Заполним открывшееся диалоговое окно **Поиск решения**, как показано на рис. 3.

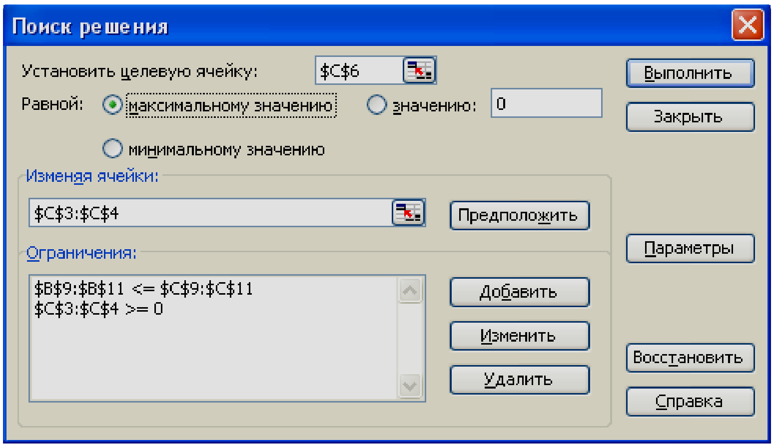


Рис. 3. Диалоговое окно ***Поиск решений.***

После нажатия на кнопку **Выполнить** открывается окно **Результаты поиска решения**, которое сообщает, что решение найдено (рис. 4).

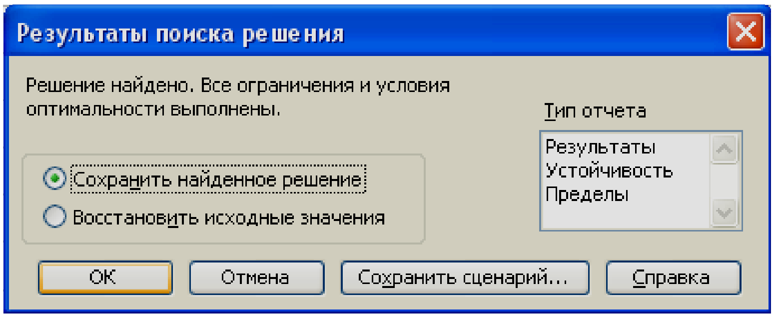


Рис.4. Диалоговое окно ***Результаты поиска решения.***

Оптимальное решение находится в ячейках **С3** и **С4**, а оптимальное значение целевой функции – в ячейке **С6** (рис. 5).

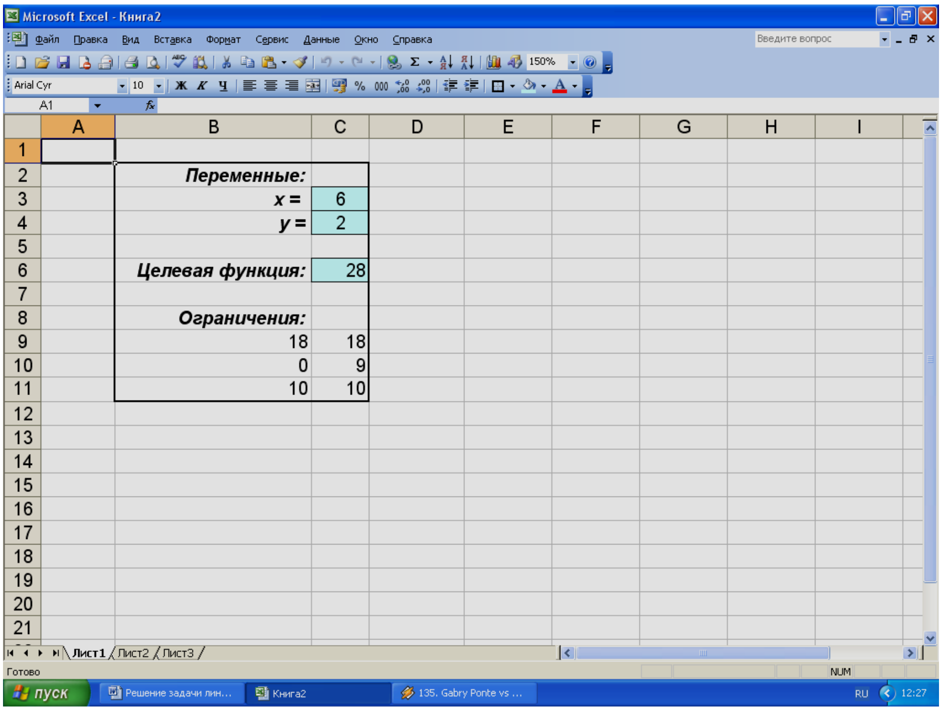


Рис.5. Результаты решения.

Задачи ЛП в общем случае решаются аналогично в обоих пакетах.

Варианты заданий. Решить задачи ЛП в MS Excel.

1) $3x_1 + 4x_2 \to \max$

$$\begin{array}{l} 6x_1 + 11x_2 \le 50 \\ 12x_1 + 6x_2 \le 54 \\ 6x_1 - 3x_2 \ge 15 \\ 28x_1 + 56x_2 \ge 112 \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{array}$$

2) $8x_1 + 2x_2 \to \max$

$$\begin{array}{l} 22x_1 + 7x_2 \le 77 \\ 4x_1 + 9x_2 \ge 18 \\ 15x_1 + 10x_2 \le 60 \\ 4x_1 + 8x_2 \le 16 \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{array}$$

3) $15x_1 + 13x_2 \to \max$

$$\begin{array}{l} 12x_1 + 6x_2 \le 32 \\ 8x_1 \le 9 \\ 6x_1 + 14x_2 \le 39 \\ 4x_1 + 15x_2 \le 18 \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{array}$$

4) $12x_1 + 4x_2 \to \max$

$$\begin{array}{l} 11x_1 + 5x_2 \le 31 \\ 7x_1 \le 7 \\ 2x_1 - 16x_2 \ge 6 \\ 9x_1 + 3x_2 \le 38 \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{array}$$

5) $7x_1 + 6x_2 \to \max$

$$\begin{aligned} 16x_1 - 2x_2 &\le 18 \\ 8x_1 + 4x_2 &\le 20 \\ 13x_1 + 3x_2 &\le 4 \\ x_1, x_2 &\ge 0. \end{aligned}$$

6) $7x_1 + 5x_2 \to \max$

$$\begin{aligned} 4x_1 + 4x_2 &\le 26 \\ 3x_1 - 16x_2 &\ge -18 \\ 14x_1 - 2x_2 &\le 10 \\ 18x_1 + 16x_2 &\le 8 \\ x_1, x_2 &\ge 0. \end{aligned}$$

7) $x_1 + 3x_2 \to \max$

$$\begin{aligned} -3x_1 + 16x_2 &\le 32 \\ 5x_1 + 6x_2 &\le 17 \\ 14x_1 + 5x_2 &\le 30 \\ 4x_1 + 4x_2 &\le 5 \\ x_1, x_2 &\ge 0. \end{aligned}$$

8) $-2x_1 \to \max$

$$\begin{aligned} 5x_1 + 5x_2 &\le 39 \\ -2x_1 + 14x_2 &\le 5 \\ 2x_1 - 12x_2 &\ge 6 \\ -x_1 + 10x_2 &\le 6 \\ x_1, x_2 &\ge 0. \end{aligned}$$

9) $4x_1 + 7x_2 \to \max$

$$\begin{aligned} 5x_1 + 15x_2 &\le 16 \\ 2x_1 + 3x_2 &\ge -1 \\ -x_1 + 14x_2 &\le 7 \\ -x_1 + 4x_2 &\ge 1 \\ x_1, x_2 &\ge 0. \end{aligned}$$

10) $9x_1 + 2x_2 \to \max$

$$\begin{aligned} 11x_1 + 2x_2 &\le 42 \\ -2x_1 + 8x_2 &\le 19 \\ 14x_1 + 6x_2 &\le 38 \\ 13x_1 + 2x_2 &\le 26 \\ x_1, x_2 &\ge 0. \end{aligned}$$

11) $3x_1 + 5x_2 \to \max$

$$\begin{aligned} 15x_1 + 10x_2 &\le 60 \\ 2x_1 - 3x_2 &\ge 1 \\ 28x_1 + 56x_2 &\ge 112 \\ 10x_1 + 15x_2 &\le 45 \\ x_1, x_2 &\ge 0. \end{aligned}$$

12) $2x_1 + 11x_2 \to \max$

$$\begin{aligned} 16x_1 + x_2 &\le 19 \\ 13x_1 + 20x_2 &\le 14 \\ 10x_1 + 6x_2 &\le 13 \\ 6x_1 - 3x_2 &\le 6 \\ x_1, x_2 &\ge 0. \end{aligned}$$

13) $13x_1 + 8x_2 \to \max$

$$\begin{aligned} 9x_1 + 3x_2 &\le 28 \\ 9x_1 + 8x_2 &\le 35 \\ x_1 + 8x_2 &\le 40 \\ 2x_1 + 7x_2 &\le 20 \\ x_1, x_2 &\ge 0. \end{aligned}$$

14) $5x_1 + 9x_2 \to \max$

$$\begin{aligned} 8x_1 - 5x_2 &\le -3 \\ -3x_1 + 12x_2 &\le 42 \\ 2x_1 + x_2 &\le 44 \\ 5x_2 &\le 11 \\ x_1, x_2 &\ge 0. \end{aligned}$$

15) $x_1 + 6x_2 \to \max$

$$\begin{aligned} 14x_1 + 21x_2 &\le 28 \\ 20x_1 + 35x_2 &\le 70 \\ 12x_1 - 9x_2 &\ge 12 \\ 21x_1 + 15x_2 &\le 75 \\ x_1, x_2 &\ge 0. \end{aligned}$$

16) $2x_1 + 3x_2 \to \max$

$$\begin{aligned} 8x_1 + 9x_2 &\le 36 \\ 10x_1 + 14x_2 &\ge 12 \\ 4x_1 + 8x_2 &\le 16 \\ 6x_1 - 3x_2 &\le 9 \\ x_1, x_2 &\ge 0. \end{aligned}$$

17) $2x_1 + x_2 \to \max$

$$\begin{aligned} 14x_1 + 10x_2 &\le 23 \\ 2x_1 + 8x_2 &\le 25 \\ 15x_1 + 6x_2 &\le 32 \\ 18x_1 - 5x_2 &\le 26 \\ x_1, x_2 &\ge 0. \end{aligned}$$

18) $5x_1 + 6x_2 \to \max$

$$\begin{aligned} 13x_1 + 5x_2 &\le 18 \\ 3x_1 + x_2 &\le 4 \\ 4x_1 + 8x_2 &\le 10 \\ 2x_1 + 11x_2 &\ge 6 \\ x_1, x_2 &\ge 0. \end{aligned}$$

19) $4x_1 + x_2 \to \max$

$$\begin{aligned} x_1 + 5x_2 &\le 6 \\ 16x_1 + 4x_2 &\le 12 \\ 10x_1 + x_2 &\le 6 \\ 3x_1 - 3x_2 &\le 43 \\ x_1, x_2 &\ge 0. \end{aligned}$$

20) $4x_1 + 5x_2 \to \max$

$$\begin{aligned} 9x_1 \qquad &\le 15 \\ 15x_2 &\le 6 \\ -2x_1 + 13x_2 &\le 31 \\ 2x_1 + 3x_2 &\le 39 \\ x_1, x_2 &\ge 0. \end{aligned}$$

21) $7x_1 + 2x_2 \to \min$

$$\begin{aligned} 3x_1 + 12x_2 &\le 30 \\ 10x_1 + 3x_2 &\le 24 \\ 9x_1 - 2x_2 &\ge 12 \\ 11x_1 + 24x_2 &\ge 48 \\ x_1, x_2 &\ge 0. \end{aligned}$$

22) $3x_1 + 2x_2 \to \min$

$$\begin{aligned} 2x_1 + 7x_2 &\le 17 \\ 4x_1 + x_2 &\ge 8 \\ 5x_1 + 10x_2 &\le 20 \\ 3x_1 + 5x_2 &\le 15 \\ x_1, x_2 &\ge 0. \end{aligned}$$

23) $5x_1 + 7x_2 \to \max$

$$\begin{aligned} 2x_1 + 8x_2 &\le 24 \\ 6x_1 \qquad &\le 9 \\ 3x_1 + 10x_2 &\le 30 \\ 4x_1 + 12x_2 &\le 35 \\ x_1, x_2 &\ge 0. \end{aligned}$$

24) $9x_1 + 4x_2 \to \max$

$$\begin{aligned} 13x_1 + 2x_2 &\le 22 \\ 4x_1 \qquad &\le 7 \\ 4x_1 - 10x_2 &\ge 5 \\ 7x_1 + 13x_2 &\le 38 \\ x_1, x_2 &\ge 0. \end{aligned}$$

25) $2x_1 + 6x_2 \to \max$

$$\begin{aligned} 11x_1 - 4x_2 &\le 22 \\ 6x_1 + 4x_2 &\le 21 \\ 3x_1 + x_2 &\le 14 \\ x_1, x_2 &\ge 0. \end{aligned}$$

26) $3x_1 + 2x_2 \to \max$

$$\begin{aligned} 5x_1 + 4x_2 &\le 16 \\ 3x_1 - 10x_2 &\ge -11 \\ 4x_1 - 5x_2 &\le 10 \\ 3x_1 + 10x_2 &\le 8 \\ x_1, x_2 &\ge 0. \end{aligned}$$

27) $x_1 + 7x_2 \to \max$

$$\begin{aligned} -2x_1 + 13x_2 &\le 26 \\ 4x_1 + 9x_2 &\le 28 \\ 12x_1 + 5x_2 &\le 32 \\ x_1 + 2x_2 &\le 5 \\ x_1, x_2 &\ge 0. \end{aligned}$$

28) $3x_1 \to \max$

$$\begin{aligned} 7x_1 + 5x_2 &\le 29 \\ -4x_1 + 12x_2 &\le 5 \\ 2x_1 - 9x_2 &\ge 6 \\ -x_1 + 13x_2 &\le 7 \\ x_1, x_2 &\ge 0. \end{aligned}$$

29) $4x_1 + 7x_2 \to \max$

$$\begin{aligned} 5x_1 + 15x_2 &\le 16 \\ 2x_1 + 3x_2 &\ge -1 \\ -x_1 + 14x_2 &\le 7 \\ -x_1 + 4x_2 &\ge 1 \\ x_1, x_2 &\ge 0. \end{aligned}$$

30) $3x_1 + 2x_2 \to \max$

$$\begin{aligned} 12x_1 + 7x_2 &\le 32 \\ -4x_1 + 8x_2 &\le 15 \\ 12x_1 + 6x_2 &\le 38 \\ 10x_1 + 2x_2 &\le 26 \\ x_1, x_2 &\ge 0. \end{aligned}$$

Задание 2. Решение транспортной задачи в пакете MS Excel.

Транспортная задача – это задача о минимизации транспортных расходов, связанных с обеспечением пунктов потребления определенным количеством однородной продукции, производимой в нескольких пунктах производства [1, 3, 7]. В общем виде задача может быть сформулирована следующим образом.

Однородный продукт, сосредоточенный в m пунктах производства, необходимо распределить между n пунктами потребления. Стоимость перевозки единицы продукции известна для всех маршрутов. Необходимо составить такой план перевозок, при котором запросы всех пунктов потребления были бы удовлетворены за счет имеющихся продуктов в пунктах производства и общие транспортные расходы по доставке продуктов были бы минимальными.

Примем следующие обозначения: i – номер пункта производства, j –номер пункта потребления, a_i– количество продукта, имеющееся в i-ом пункте производства, b_j – количество продукта, необходимое для j-го пункта потребления, c_{ij} – стоимость перевозки единицы продукта из i-го пункта производства в j-й пункт потребления, x_{ij} – количество груза, планируемого к перевозке из i-го пункта производства в j-й пункт потребления, i=1,2,…,m; j=1,2,…,n. Математическая модель транспортной задачи будет выглядеть следующим образом:

$$C = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to \min,$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le a_i, \quad i = 1,\dots,m,$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \ge b_j, \quad j = 1,\dots,n,$$

$$x_{ij} \ge 0, \qquad i = 1,\dots,m,\ j = 1,\dots,n.$$

Условия задачи удобно записывать в виде таблицы, которая называется матрицей планирования:

$$\begin{array}{|ccc|c}
\hline
c_{11} & c_{12}\ \dots & c_{1n} & a_1 \\
 & \dots & & \dots \\
c_{m1} & c_{m2}\ \dots & c_{mn} & a_m \\
\hline
\multicolumn{1}{c}{b_1} & \multicolumn{1}{c}{b_2\ \dots} & \multicolumn{1}{c}{b_n} &
\end{array}$$

Рассмотрим решение транспортной задачи в табличном процессоре MS Excel. Так как транспортная задача является частным случаем задачи линейного программирования, то эту задачу можно решать так, как описано выше. Однако благодаря свойствам задачи, ее можно записать в более компактной форме.

Рассмотрим транспортную задачу, матрица планирования которой имеет вид:

B_j / A_i	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	

A_1	14	25	18	19	23	33
A_2	2	17	16	24	2	25
A_3	29	3	7	15	22	25
A_4	5	20	17	23	10	17
	33	11	11	11	34	b_j a_i

Для решения транспортной задачи введем данные, как показано на рис.6.

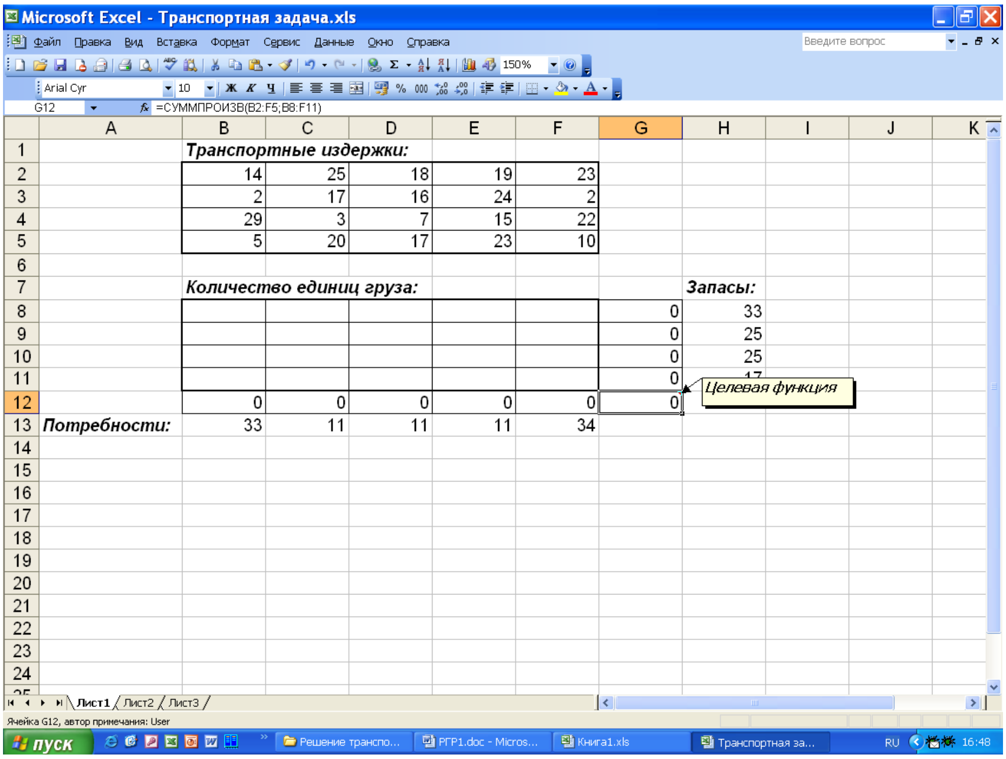


Рис.6. Исходные данные транспортной задачи.

В ячейки B2 : F5 введем стоимость перевозок. Ячейки B8 : F11 отведены под значения объемов перевозок, пока неизвестные. В ячейки H8 : H11 введены объемы производства, а в ячейки B13 : F13 - потребности (спрос) в продукции в пунктах потребления.

В ячейку G12 вводится целевая функция

= СУММПРОИЗВ (B2 : F5; B8 : F11) .

В ячейки B12 : F12 вводятся формулы

= СУММ (B8 : B11),
= СУММ (C8 : C11),
= СУММ (D8 : D11),

= СУММ (E8 : E11),

= СУММ (F8 : F11),

определяющие объем продукции, ввозимой в пункты потребления. В ячейки G8 : G11 введены формулы

= СУММ (B8 : F8),

= СУММ (B9 : F9),

= СУММ (B10 : F10),

= СУММ (B11 : F11),

характеризующие объем продукции, вывозимой из пунктов производства.

Далее выбираем команду **Сервис, Поиск решения** и заполняем открывшееся диалоговое окно **Поиск решения**, как показано на рис.7.

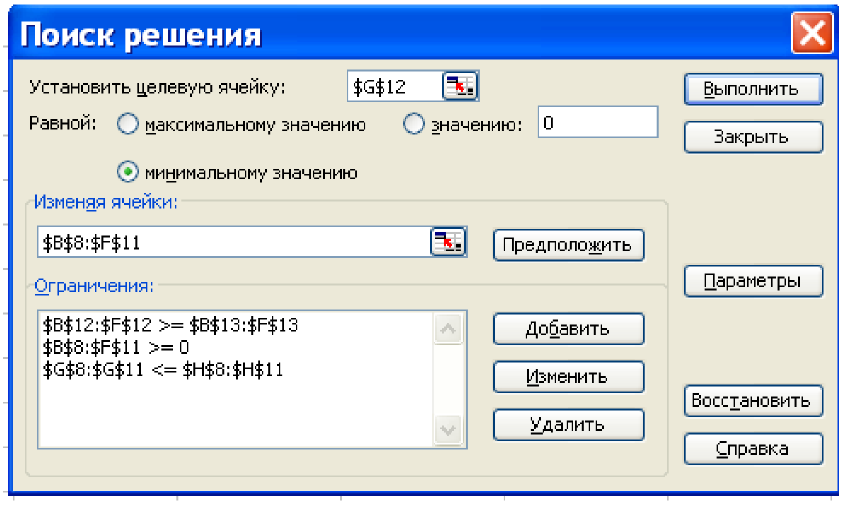


*Рис.7. Диалоговое окно **Поиск решения** для транспортной задачи.*

В диалоговом окне **Параметры поиска решения** установить флажок **Линейная модель** (рис.8).

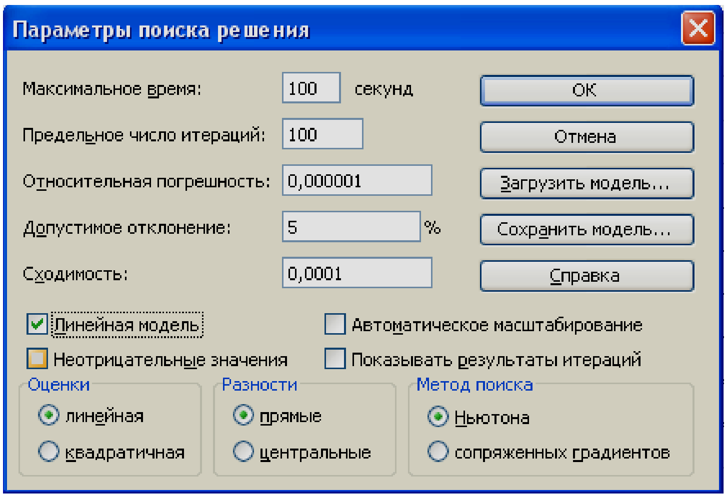
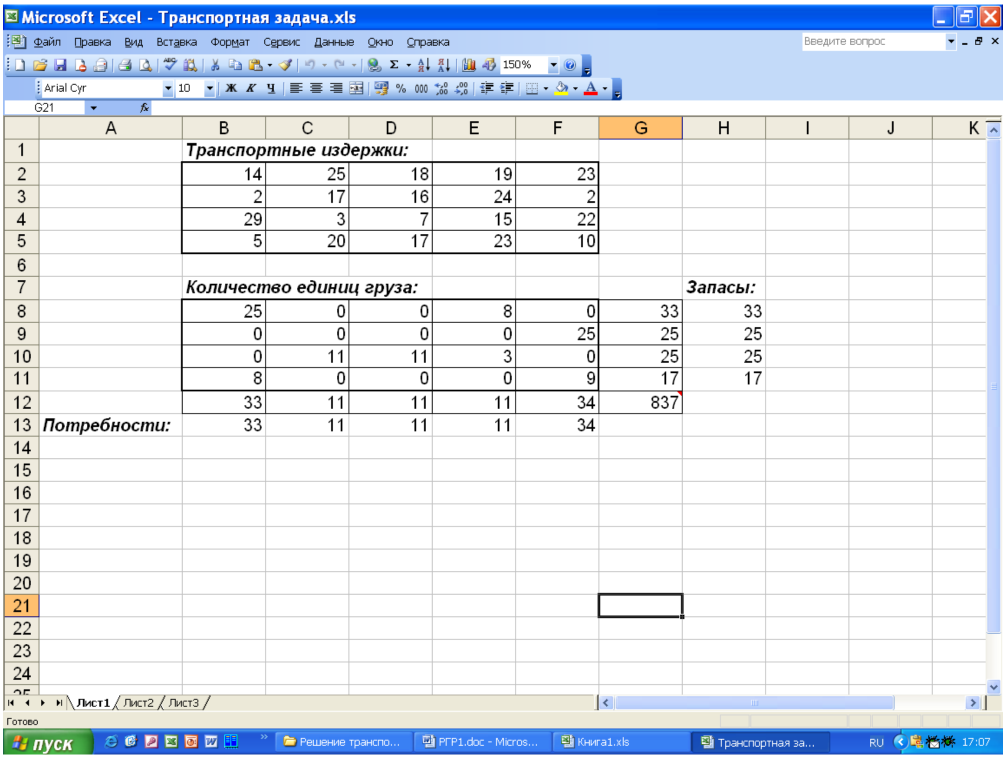


*Рис.8. Диалоговое окно **Параметры поиска решений**.*

После нажатия кнопки **Выполнить** получаем оптимальный план поставок продукции и соответствующие ему транспортные расходы (рис. 9).



	A	B	C	D	E	F	G	H
1		*Транспортные издержки:*						
2		14	25	18	19	23		
3		2	17	16	24	2		
4		29	3	7	15	22		
5		5	20	17	23	10		
6								
7		*Количество единиц груза:*						*Запасы:*
8		25	0	0	8	0	33	33
9		0	0	0	0	25	25	25
10		0	11	11	3	0	25	25
11		8	0	0	0	9	17	17
12		33	11	11	11	34	837	
13	*Потребности:*	33	11	11	11	34		

Рис.9. Оптимальное решение транспортной задачи.

Варианты заданий. Решить транспортную задачу в MS Excel**.**

1)

40	36	9	20	24
26	11	22	26	42
6	3	12	3	23
5	37	33	26	36
35	29	21	35	

2)

11	9	12	30	17
39	22	7	28	49
28	4	36	32	35
28	7	19	37	45
13	43	33	45	

3)

40	33	8	32	43
22	27	15	24	33
23	23	39	41	15
32	26	34	17	27
19	11	10	25	

4)

12	20	37	38	24
30	25	20	29	48
9	8	39	36	31
6	11	12	16	17
37	15	11	48	

5)

28	36	17	34	26
12	33	35	7	35
22	27	26	40	31
32	31	39	19	33
41	24	15	37	

6)

11	14	6	3	44
5	15	20	35	44
9	28	31	23	39
35	32	23	4	49
13	27	31	20	

7)

29	11	41	42	36
33	32	6	28	50
35	39	42	3	20
31	10	14	42	50
38	40	20	24	

8)

37	14	7	39	45
13	38	14	31	26
10	19	40	10	17
34	36	16	14	19
25	21	32	17	

9)

16	13	7	3	38
29	25	22	20	54
7	19	30	29	33
4	37	32	25	29
25	11	15	15	

10)

4	33	10	22	32
28	40	39	34	33
23	13	18	16	32
11	18	29	33	46
33	37	14	10	

11)

38	38	34	37	37
39	40	30	18	38
42	39	8	40	37
38	3	36	16	51
36	49	28	16	

12)

37	4	28	35	33
6	36	4	25	29
14	5	10	39	28
11	30	12	8	43
21	31	17	26	

13)

12	40	19	27	41
39	8	19	11	52
27	42	15	14	32
7	16	31	42	35
20	11	41	43	

14)

29	12	10	35	32
8	20	37	7	41
24	33	34	4	43
41	6	13	21	51
45	14	18	48	

15)

6	16	35	13	26
41	26	31	35	30
29	30	7	34	46
24	36	22	22	47

16)

41	38	13	9	22
4	25	29	30	27
16	14	38	4	43
21	23	28	36	34

39	11	13	29

41	11	13	49

17)

9	19	13	11	33
25	33	29	41	28
29	33	3	7	54
37	21	11	33	37
11	44	46	30	

18)

14	15	12	35	29
35	29	32	4	30
11	18	36	4	18
23	38	23	33	54
14	15	47	27	

19)

4	42	15	13	46
17	10	20	4	40
41	39	4	10	45
38	12	41	3	43
37	19	21	30	

20)

20	15	32	35	36
11	4	26	19	54
15	20	32	10	51
23	16	34	8	39
42	25	25	35	

21)

2	18	35	10	26
21	16	31	25	30
19	20	17	14	46
4	36	21	22	47
39	11	13	29	

22)

21	18	13	19	22
14	25	19	30	27
16	12	28	15	43
29	23	28	16	34
41	11	13	49	

23)

19	19	10	17	33
35	33	29	41	28
27	31	3	27	54
17	21	18	23	37
11	44	46	30	

24)

11	18	12	15	29
35	29	22	44	30
17	18	16	24	18
23	38	20	33	54
14	15	47	27	

25)

11	22	15	23	46
27	30	20	14	40
41	29	12	10	45
18	12	41	33	43
37	19	21	30	

26)

20	19	32	35	36
11	19	26	13	54
25	20	32	18	51
33	16	34	12	39
42	25	25	35	

Задание 3. Решение задачи о рюкзаке приближенными и точными алгоритмами.

Задача о рюкзаке и ее варианты широко используются для моделирования большого числа практических задач управления, таких как выбор проектов, распределение капитала, комбинаторные аукционы, расположение предметов в системах сборки по заказу и др. [3, 6, 7].

Одним из частных случаев задачи о рюкзаке является одномерная булева задача о рюкзаке, которая может быть сформулирована следующим образом. Рассмотрим рюкзак с объемом равным b. Пусть существует n различных предметов. Предмет j занимает объем a_j, при этом его ценность равна c_j. Цель задачи состоит в максимизации выгоды от помещенных в рюкзак предметов. Таким образом, задача может быть сформулирована как задача булева линейного программирования в следующем виде:

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_j \le b,$$

$$x_j \in \{0,1\},\ j = 1,\dots,n.$$

Если условие $x_j \in \{0,1\},\ j = 1,\dots,n$ заменить условием $x_j \in Z,\ j = 1,\dots,n$, то получим задачу об одномерном целочисленном рюкзаке. В этом случае имеется n типов предметов и требуется определить, сколько предметов каждого типа нужно поместить в рюкзак, чтобы они имели максимальную суммарную ценность.

Для решения задачи о рюкзаке разработан целый ряд алгоритмов и методов: динамическое программирование [6], метод ветвей и границ [3], метод перебора L-классов [2] и другие.

В случае небольших n одномерная задача о рюкзаке может быть также решена в табличном процессоре MS Excel. При этом исходные данные задачи записываются также, как и для задачи ЛП, но в окне ***Поиск решения, Ограничения*** необходимо указать, что переменные являются целыми, либо булевыми (рис. 10).

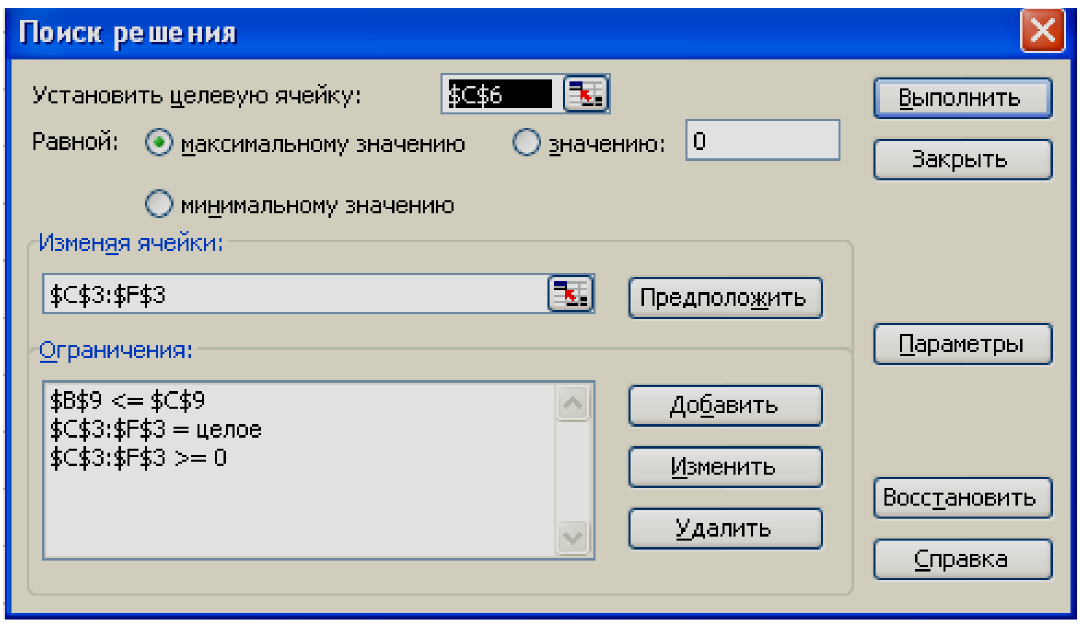


*Рис. 10. Диалоговое окно **Поиск решения** для задачи о рюкзаке.*

При больших n точное решение задачи может потребовать значительных затрат машинного времени. Поэтому актуальной является разработка приближенных алгоритмов. Самый известный приближенный алгоритм – это так называемый "жадный" алгоритм. Опишем этот алгоритм по шагам для булевого случая.

«Жадный» алгоритм.

Шаг 1. Упорядочить предметы по не возрастанию удельной полезности c_j / a_j, т.е. так, чтобы выполнялось соотношение

$$\frac{c_1}{a_1} \geq \frac{c_2}{a_2} \geq \ldots \frac{c_n}{a_n},$$

положить $k:=1$ и перейти на шаг 2.

Шаг 2. Если $a_k \leq b$, то положить $x_k:=1$, $b:=b - a_k$, иначе $x_k:= 0$.

Увеличить k на единицу и перейти на шаг 3.

Шаг 3. Если $k > n$, то алгоритм завершает работу, иначе перейти на шаг 2.

Варианты заданий. Решить задачу о рюкзаке в пакете MS Excel. Разработать алгоритм полного перебора и «жадный» алгоритм для задачи о рюкзаке [8]. Найти точное и приближенное решение задачи о рюкзаке, используя реализованные алгоритмы.

1) $6x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 7x_4 \to \max$

$5x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 5x_4 \leq 14$

$x_i \geq 0$, $x_i \in Z$, $i = 1,..,4.$

2) $2x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 3x_4 \to \max$

$2x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 4x_4 \leq 12$

$x_i \geq 0$, $x_i \in Z$, $i = 1,..,4.$

3) $3x_1 + 6x_2 + 5x_3 + x_4 \to \max$

$2x_1 + 5x_2 + 4x_3 + x_4 \leq 15$

$x_i \geq 0$, $x_i \in Z$, $i = 1,..,4.$

4) $2x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 \to \max$

$2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 \leq 13$

$x_i \geq 0$, $x_i \in Z$, $i = 1,..,4.$

5) $5x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 \to \max$

$4x_1 + 3x_2 + x_3 + 3x_4 \leq 13$

6) $x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 3x_4 \to \max$

$2x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 \leq 14$

$x_i \geq 0, x_i \in Z, i = 1,..,4.$

$x_i \geq 0, x_i \in Z, i = 1,..,4.$

7) $5x_1 + 7x_2 + 6x_3 + 3x_4 \to \max$

$4x_1 + 5x_2 + 8x_3 + 3x_4 \leq 14$
$x_i \geq 0, x_i \in Z, i = 1,..,4.$

8) $x_1 + 7x_2 + 3x_3 + 4x_4 \to \max$

$x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 3x_4 \leq 13$
$x_i \geq 0, x_i \in Z, i = 1,..,4.$

9) $x_1 + 7x_2 + 7x_3 + 4x_4 \to \max$

$2x_1 + 6x_2 + 4x_3 + 3x_4 \leq 15$
$x_i \geq 0, x_i \in Z, i = 1,..,4.$

10) $3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 8x_4 \to \max$

$2x_1 + 4x_2 + x_3 + 6x_4 \leq 15$
$x_i \geq 0, x_i \in Z, i = 1,..,4.$

11) $x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 3x_4 \to \max$

$2x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 \leq 15$
$x_i \geq 0, x_i \in Z, i = 1,..,4.$

12) $4x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 \to \max$

$2x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 \leq 13$
$x_i \geq 0, x_i \in Z, i = 1,..,4.$

13) $3x_1 + 7x_2 + 7x_3 + 5x_4 \to \max$

$4x_1 + 7x_2 + 5x_3 + 6x_4 \leq 13$
$x_i \geq 0, x_i \in Z, i = 1,..,4.$

14) $2x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 6x_4 \to \max$

$2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 \leq 14$
$x_i \geq 0, x_i \in Z, i = 1,..,4.$

15) $5x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 4x_4 \to \max$

$4x_1 + 7x_2 + 3x_3 + 5x_4 \leq 18$
$x_i \geq 0, x_i \in Z, i = 1,..,4.$

16) $5x_1 + 6x_2 + 9x_3 + 4x_4 \to \max$

$4x_1 + 5x_2 + 8x_3 + 3x_4 \leq 14$
$x_i \geq 0, x_i \in Z, i = 1,..,4.$

17) $x_1 + 7x_2 + 3x_3 + 8x_4 \to \max$

$x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 5x_4 \leq 14$
$x_i \geq 0, x_i \in Z, i = 1,..,4.$

18) $9x_1 + x_2 + 2x_3 + 5x_4 \to \max$

$8x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 \leq 15$
$x_i \geq 0, x_i \in Z, i = 1,..,4.$

19) $2x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 9x_4 \to \max$

$4x_1 + 7x_2 + 8x_3 + 10x_4 \leq 20$
$x_i \geq 0, x_i \in Z, i = 1,..,4.$

20) $x_1 + 8x_2 + 9x_3 + 7x_4 \to \max$

$x_1 + 5x_2 + 8x_3 + 6x_4 \leq 14$
$x_i \geq 0, x_i \in Z, i = 1,..,4.$

21) $2x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 4x_4 \to \max$

$4x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 5x_4 \leq 19$
$x_i \geq 0, x_i \in Z, i = 1,..,4.$

22) $4x_1 + 3x_2 + 7x_3 + x_4 \to \max$

$4x_1 + 5x_2 + 8x_3 + 2x_4 \leq 14$
$x_i \geq 0, x_i \in Z, i = 1,..,4.$

23) $x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 9x_4 \to \max$

$x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 5x_4 \leq 17$

24) $7x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 \to \max$

$6x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 \leq 20$

$x_i \geq 0$, $x_i \in Z$, $i = 1,..,4$.

$x_i \geq 0$, $x_i \in Z$, $i = 1,..,4$.

25) $2x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 9x_4 \to \max$

$$4x_1 + 7x_2 + 8x_3 + 10x_4 \leq 20$$
$$x_i \geq 0,\ x_i \in Z,\ i = 1,..,4.$$

26) $x_1 + 6x_2 + 7x_3 + 4x_4 \to \max$

$$x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 \leq 19$$
$$x_i \geq 0,\ x_i \in Z,\ i = 1,..,4.$$

27) $2x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 7x_4 \to \max$

$$x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 5x_4 \leq 27$$
$$x_i \geq 0,\ x_i \in Z,\ i = 1,..,4.$$

28) $5x_1 + x_2 + 3x_3 + 7x_4 \to \max$

$$4x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 \leq 26$$
$$x_i \geq 0,\ x_i \in Z,\ i = 1,..,4.$$

29) $2x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 7x_4 \to \max$

$$3x_1 + 7x_2 + 8x_3 + 9x_4 \leq 25$$
$$x_i \geq 0,\ x_i \in Z,\ i = 1,..,4.$$

30) $x_1 + 6x_2 + 4x_3 + 4x_4 \to \max$

$$x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 \leq 29$$
$$x_i \geq 0,\ x_i \in Z,\ i = 1,..,4.$$

Задание 4. Реализация алгоритмов решения задачи коммивояжёра.

Задача коммивояжера и ее модификации часто встречаются на практике, например, при планировании различных перевозок [6,7]. Она может быть сформулирована следующим образом. Имеется n городов, при этом расстояния между любой парой городов i и j известны и составляют c_{ij}, $i,j = 1,\ldots,n$. Если между городами нет пути, то $c_{ij} = \infty$. Также полагают, что $c_{ii} = \infty$, $i = 1,\ldots,n$. Таким образом, исходные данные задачи коммивояжера задаются матрицей C:

$$C = \begin{pmatrix} \infty & c_{12} & .. & .. & c_{1n} \\ c_{21} & \infty & .. & .. & c_{2n} \\ .. & .. & .. & .. & .. \\ .. & .. & .. & .. & .. \\ c_{n1} & c_{n2} & .. & .. & \infty \end{pmatrix}.$$

Коммивояжер, выезжая из какого-либо города, должен посетить все города, побывав в каждом из них ровно один раз, и вернуться в исходный город.

Объезд городов, удовлетворяющих этим требованиям, называется маршрутом коммивояжера. Длина маршрута равна сумме расстояний всех входящих в маршрут переездов из города в город. Требуется найти маршрут минимальной длины.

Математическая модель задачи коммивояжера имеет и другие интерпретации, например, задача о перенастройке оборудования, задача о прокладке коммуникаций и другие [7].

Для решения задачи коммивояжера разработан ряд алгоритмов точного и приближенного решения: метод ветвей и границ [3], алгоритмы локального поиска [6] и другие.

В случае небольших n $(n < 10)$ задача коммивояжера может быть решена методом полного перебора всех возможных маршрутов. Число таких маршрутов равно $n!/2$.

При больших n точное решение задачи, как и в случае задачи о рюкзаке, может потребовать значительных затрат машинного времени. Поэтому актуальной является разработка приближенных алгоритмов. Самый известный приближенный алгоритм – это так называемый алгоритм "иди в ближайший" или "жадный" алгоритм. Он заключается в следующем. Из текущего города коммивояжер идет в ближайший город, в котором он еще не был, а после обхода всех городов возвращается в исходный город.

Варианты заданий. Разработать алгоритм полного перебора и «жадный» алгоритм для задачи коммивояжера [8]. Найти точное и приближенное решение задачи коммивояжера, используя реализованные алгоритмы.

1)
$$\begin{array}{ccccc} \infty & 6 & 9 & 2 & 4 \\ 6 & \infty & 2 & 6 & 2 \\ 6 & 3 & \infty & 3 & 3 \\ 5 & 7 & 3 & \infty & 6 \\ 3 & 2 & 2 & 5 & \infty \end{array}$$

2)
$$\begin{array}{ccccc} \infty & 9 & 12 & 7 & 10 \\ 9 & \infty & 7 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & \infty & 3 & 5 \\ 8 & 7 & 1 & \infty & 5 \\ 3 & 4 & 3 & 5 & \infty \end{array}$$

3)
$$\begin{array}{ccccc} \infty & 3 & 8 & 2 & 4 \\ 2 & \infty & 1 & 4 & 3 \\ 2 & 2 & \infty & 4 & 5 \\ 3 & 6 & 4 & \infty & 2 \\ 9 & 1 & 10 & 5 & \infty \end{array}$$

4)
$$\begin{array}{ccccc} \infty & 2 & 7 & 8 & 4 \\ 3 & \infty & 2 & 2 & 8 \\ 9 & 8 & \infty & 3 & 3 \\ 6 & 1 & 1 & \infty & 7 \\ 3 & 5 & 2 & 4 & \infty \end{array}$$

5)

∞	6	1	3	6
1	∞	5	7	3
2	7	∞	4	1
3	1	9	∞	3
1	4	5	3	∞

6)

∞	4	6	3	4
5	∞	2	5	4
9	2	∞	2	3
3	3	2	∞	9
1	7	3	2	∞

7)

∞	1	4	2	6
3	∞	6	8	5
3	9	∞	3	2
1	1	4	∞	5
8	4	2	4	∞

8)

∞	4	7	9	4
3	∞	1	3	2
10	9	∞	1	7
4	6	1	∞	9
5	2	3	7	∞

9)

∞	3	7	3	8
9	∞	2	2	4
7	9	∞	9	3
4	7	3	∞	9
5	1	5	5	∞

10)

∞	3	1	2	3
8	∞	3	4	3
3	1	∞	6	2
1	8	9	∞	4
3	7	4	1	∞

11)

∞	8	4	7	3
9	∞	3	1	8
4	9	∞	4	7
3	3	6	∞	5
6	4	2	6	∞

12)

∞	4	8	5	3
6	∞	4	5	2
1	5	∞	9	2
11	3	12	∞	4
2	3	7	6	∞

13)

∞	4	9	2	1
9	∞	1	11	5
7	4	∞	1	3
7	6	3	∞	3
2	11	4	4	∞

14)

∞	2	10	5	3
8	∞	7	7	4
4	3	∞	4	3
1	6	3	∞	5
5	4	8	4	∞

15)

∞	6	3	1	6
4	∞	3	5	3
9	3	∞	4	4
2	6	2	∞	7
3	1	1	9	∞

16)

∞	8	3	9	2
4	∞	9	3	2
6	1	∞	4	3
2	3	8	∞	4
4	1	1	9	∞

17)

∞	1	3	1	3
2	∞	9	4	2
9	3	∞	7	5

18)

∞	5	2	3	9
3	∞	3	4	3
1	8	∞	4	8

$$\begin{matrix} 7 & 2 & 1 & \infty & 7 \\ 1 & 4 & 6 & 3 & \infty \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 2 & 3 & 2 & \infty & 5 \\ 4 & 5 & 7 & 2 & \infty \end{matrix}$$

19)
$$\begin{matrix} \infty & 4 & 1 & 3 & 6 \\ 7 & \infty & 2 & 4 & 4 \\ 4 & 9 & \infty & 1 & 5 \\ 8 & 1 & 4 & \infty & 3 \\ 3 & 9 & 2 & 3 & \infty \end{matrix}$$

20)
$$\begin{matrix} \infty & 5 & 3 & 5 & 6 \\ 1 & \infty & 6 & 9 & 4 \\ 5 & 2 & \infty & 10 & 1 \\ 3 & 6 & 4 & \infty & 9 \\ 4 & 5 & 2 & 3 & \infty \end{matrix}$$

21)
$$\begin{matrix} \infty & 6 & 8 & 2 & 4 \\ 1 & \infty & 6 & 4 & 3 \\ 9 & 3 & \infty & 6 & 4 \\ 5 & 5 & 2 & \infty & 7 \\ 3 & 2 & 1 & 3 & \infty \end{matrix}$$

22)
$$\begin{matrix} \infty & 4 & 3 & 7 & 2 \\ 8 & \infty & 6 & 1 & 2 \\ 4 & 9 & \infty & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 8 & \infty & 4 \\ 4 & 5 & 1 & 9 & \infty \end{matrix}$$

23)
$$\begin{matrix} \infty & 7 & 3 & 1 & 3 \\ 6 & \infty & 9 & 4 & 3 \\ 9 & 3 & \infty & 7 & 5 \\ 4 & 5 & 2 & \infty & 7 \\ 1 & 4 & 6 & 3 & \infty \end{matrix}$$

24)
$$\begin{matrix} \infty & 5 & 2 & 3 & 3 \\ 3 & \infty & 3 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & \infty & 9 & 8 \\ 2 & 3 & 2 & \infty & 5 \\ 4 & 5 & 4 & 2 & \infty \end{matrix}$$

25)
$$\begin{matrix} \infty & 4 & 3 & 2 & 6 \\ 4 & \infty & 9 & 5 & 1 \\ 7 & 3 & \infty & 3 & 4 \\ 2 & 6 & 1 & \infty & 7 \\ 3 & 5 & 1 & 9 & \infty \end{matrix}$$

26)
$$\begin{matrix} \infty & 4 & 3 & 1 & 2 \\ 8 & \infty & 7 & 3 & 5 \\ 4 & 2 & \infty & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 2 & \infty & 6 \\ 4 & 5 & 1 & 9 & \infty \end{matrix}$$

27)
$$\begin{matrix} \infty & 1 & 3 & 2 & 3 \\ 8 & \infty & 5 & 4 & 2 \\ 6 & 3 & \infty & 7 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & \infty & 4 \\ 9 & 4 & 2 & 3 & \infty \end{matrix}$$

28)
$$\begin{matrix} \infty & 5 & 4 & 3 & 3 \\ 8 & \infty & 3 & 4 & 2 \\ 1 & 6 & \infty & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & \infty & 5 \\ 4 & 5 & 7 & 9 & \infty \end{matrix}$$

29)
$$\begin{matrix} \infty & 8 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & \infty & 2 & 4 & 4 \end{matrix}$$

30)
$$\begin{matrix} \infty & 8 & 3 & 5 & 6 \\ 7 & \infty & 6 & 4 & 4 \end{matrix}$$

3	10	∞	2	5
8	7	4	∞	6
3	9	2	3	∞

5	2	∞	2	1
3	3	4	∞	7
4	6	2	3	∞