<table>
<tr><td colspan="3">ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫНЫҢ
БІЛІМ ЖӘНЕ ҒЫЛЫМ МИНИСТРЛІГІ
ШӘКӘРІМ АТЫНДАҒЫ
СЕМЕЙ ҚАЛАСЫНЫҢ МЕМЛЕКЕТТІК УНИВЕРСИТЕТІ</td></tr>
<tr><td>3 деңгейлі СМЖ құжаты</td><td>ПОӘК</td><td rowspan="2">ПОӘК 042-14.01.20.168/03-2013</td></tr>
<tr><td>«Аналитикалық геометрия» пәніне арналған оқу-әдістемелік материалдар ПОӘК</td><td>02.09.13 ж. №1 басылым</td></tr>
</table>

ПӘННІҢ ОҚУ-ӘДІСТЕМЕЛІК КЕШЕНІ

«Аналитикалық геометрия»

5В050109 – «Математика» мамандығы үшін

ОҚУ -ӘДІСТЕМЕЛІК МАТЕРИАЛДАР

Семей
2013

Мазмұны

1 ГЛОССАРИЙ

№	Жаңа ұғымдар	Мазмұны
1	Екінші ретті анықтауыш	$\lvert A\rvert$ = det A = $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ $=a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}$
2	Үшінші ретті анықтауыш	$\lvert A\rvert$ = det A = $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ $= a_{11}\, a_{22}\, a_{33} + a_{12}\, a_{11}\, a_{23}\, a_{31} + a_{13}\, a_{21}\, a_{32}$ $-a_{13}\, a_{22}\, a_{31} - a_{12}\, a_{21}\, a_{33} - a_{11}\, a_{23}\, a_{32}$
3	Минор	$M_{23}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$
4	Алгебралық толықтауыш	$A_{ij}=(-1)^{i+}j \times Mij$
5	Матрица	. $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$
6	Кері матрица	$A^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$, $\Delta \neq 0$
8	Вектор	$A=(x_1, y_1, z_1),\ B=(x_2, y_2, z_2)$ $\overrightarrow{AB}=(x_1-x_2, y_1-y_2, z_1-z_2)$ - вектордың координаталар. $\lvert AB\rvert=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$ -АВ кесіндінің ұзындығы $\bar{a}=(x_1, y_1, z_1),\ \ \lvert a\rvert=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ - вектордың ұзындығы
9	Скалярлық көбейтіндісі	$(\bar{a}\cdot\bar{b})=\lvert a\rvert\cdot\lvert b\rvert\cdot\cos\varphi$ $(\bar{a}\cdot\bar{b})=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$ $\cos\varphi=\frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}$ -Угол между векторами. $ПР_{\bar{b}}\bar{a}=\frac{(\bar{a},\bar{b})}{\lvert b\rvert}$ - проекция вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$. $\frac{x_1}{x_2}=\frac{y_1}{y_2}=\frac{z_1}{z_2}$ - условие коллинеарности векторов
10	Векторлық көбейтіндісі	$\lvert\bar{c}\rvert=\lvert\bar{a}\rvert\cdot\lvert\bar{b}\rvert\cdot\sin\varphi=S_{пар.}$ $c=\bar{a}\times\bar{b}=\left(\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}\right)$ $S=\frac{1}{2}\sqrt{\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}^2}$ -ұшбұрыштын ауданы (векторлық көбейтіндісінің геометриялық мағынасы)
11	Смешанное произведение	$(\bar{a}\cdot\bar{b}\cdot\bar{c})=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$ Егер $(\bar{a}\cdot\bar{b}\cdot\bar{c})=0$, онда векторлар компланар болады. $V=\lvert(\bar{a}\cdot\bar{b}\cdot\bar{c})\rvert$ - параллелепипедтің көлемі (аралас көбейтіндісінің гелметриялық мағынасы)
12	Жазақтықтағы түзудін теңдеуі	$Ax+By+C=0$ – жалпы теңдеу $к=-\frac{A}{B}$ - бұрыштық коэффициент $\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$ -екі нүктеден өтетін түзудің теңдеуі $A(x-x_0)+B(y-y_0)=0$ – нормалі бар түзудің теңдеуі $\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}$ - бағыттылған вектормен берілген түзудің теңдеуі $y-y_0=k(x-x_0)$ – бұрыштық коэффициентпен берілген түзудің теңдеуі $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ - кесінді арқылы түзудің теңдеуі $к_1 = к_2$ – түзулердің параллель шарты

		$\kappa_1 = -\frac{1}{\kappa_2}$ - түзулердің перпендикуляр шарты $\operatorname{tg}\alpha = \left\|\frac{\kappa_2 - \kappa_1}{1 + \kappa_1\kappa_2}\right\|$ - түзулердің арасындағы бұрыш $d = \frac{\|Ax_0 + By_0 + C\|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$ - нүктеден түзуге дейінгі қашықтық
13	Екінші ретті қисықтар	1) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{в^2} = 1$ - эллипс, $F_2(-c,0),\ F_2(c,0)$ - фокустар, мұндағы $c^2 = a^2 - b^2,\ e = \frac{c}{a}$ -эксцентриситет, $x = \pm\frac{a}{e}$ - директрисссалар 2) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{в^2} = 1$ -гипербола, $F_2(-c,0),\ F_2(c,0)$ - фокустар, где $c^2 = a^2 + b^2,\ e = \frac{c}{a}$ -эксцентриситет, $x = \pm\frac{a}{e}$ - директриссалар, $y = \pm\frac{b}{a}$ - асимптоталар 3) $y^2 = 2px$ және $x^2 = 2py$ –парабола, p – параболаның параметрі, $x = -\frac{ð}{2}$ - директрисса, $F(\frac{ð}{2},0)$, - параболаның фокусы $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$ -шеңбер, C(a,в) – шеңбердің центрі, R – шеңбердін радиусы.
14	Кеңістіктегі тұзудің теңдеудің	$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}$ - тұзудің канондық теңдеуі, $\bar{a} = (l, m, n)$ - бағыттылған вектор $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$ - екі нүктеден өтетін тузудің теңдеуі $\begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + nt \end{cases}$ - түзудің параметрлік теңдеуі $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$ - уравнение прямой как пересечение двух плоскостей, где $\bar{a} = \left(\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \right)$ - бағыттылған вектор $\frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}$ - түзулердің параллель шарты $l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2 = 0$ – түзулердің перпендикуляр шарты
15	Жазықтықтың теңдеуі	Ax+By+Cz+D=0 - Жалпы теңдеуі $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$, где $\bar{n}$=(A,B,C) – жазықтықтың нормалі $\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$ - Үш нуктедең өтетін жазақтықтын теңдеуі $d = \frac{\|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D\|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$ - нүктеден жазықтыққа дейінгі қашықтық

2 ДӘРІСТЕР
СЫЗЫҚТЫҚ АЛГЕБРА
1 – ДӘРІС

Анықтама. m жатық және n тік жолдарда орналасқан сандар кестесін $m \times n$ өлшемді тік бұрышты А матрицасы деп атайды. Яғни

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Бізге $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ екінші ретті квадрат матрица берілсін.

Анықтама. Екінші ретті квадрат А матрицасына сәйкесті екінші ретті анықтауыш деп санды атайды және оны былайша белгілейді

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

Мысал. Мына анықтауышты $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$ есепте.

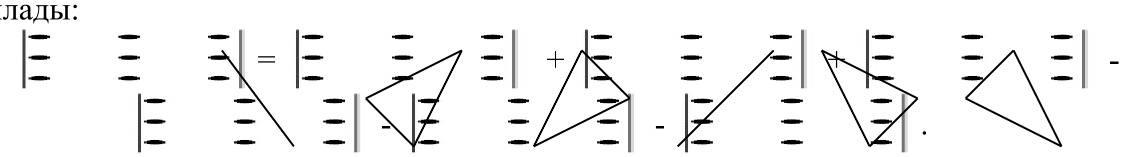
Шешуі. $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 2\times 5 - (-3)\times 4 = 22$.

Үшінші ретті анықтауыш туралы түсінік

Анықтама. Үшінші ретті квадрат матрицаға сәйкесті үшінші ретті анықтауыш деп $a_{11}\,a_{22}\,a_{33} + a_{12}\,a_{11}\,a_{23}\,a_{31} + a_{13}\,a_{21}\,a_{32} - a_{13}\,a_{22}\,a_{31} - a_{12}\,a_{21}\,a_{33} - a_{11}\,a_{23}\,a_{32}$ санын атап, мына символ арқылы белгілейді:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\,a_{22}\,a_{33} + a_{12}\,a_{11}\,a_{23}\,a_{31} + a_{13}\,a_{21}\,a_{32} - a_{13}\,a_{22}\,a_{31} - a_{12}\,a_{21}\,a_{33} - a_{11}\,a_{23}\,a_{32}$$

Үшінші ретті анықтауышты есептеуде Саррюс ережесін (үшбұрыш ережесін) қолданылады:



Мысал. Мына анықтауышты $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 4 & 5 & -2 \\ -1 & 3 & 6 \end{vmatrix}$ есептеу керек.

Ол үшін үшбұрыш ережесін қолданамыз. Сонда

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 4 & 5 & -2 \\ -1 & 3 & 6 \end{vmatrix} =$$

$$2\cdot 5\cdot 6 + 4\cdot 4\cdot 3 + (-3)(-2)(-1) - 4\cdot 5(-1) - (-3)\cdot 4\cdot 6 - 2\cdot 3\cdot(-2) = 60 + 48 - 6 + 20 + 72 + 12 = 206$$

Анықтауыштың қасиеттері

1. Анықтауыштың жатық жолдарын оның сәйкес тік жолдарымен орын алмастырғаннан ол анықтауыштың сан мәні өзгермейді.
2. Егер анықтауыштың қандай болса да бір жатық жолының барлық элементтері нөлге тең болса, онда анықтауыш нөлге тең болады.
3. Егер анықтауыштың екі жатық жолын бірі мен бірінің орындарын алмастырсақ, онда анықтауыш таңбасы қарама - қарсы таңбаға ауысады.
4. Егер анықтауыштың кез келген екі жатық жолы өзара тең болса, онда ол нөлге тең болады.
5. Егер анықтауыштың қандай болмасын бір жатық жолының ортақ λ көбейткіші болса, онда оны (λ) анықтауыш таңбасының алдына шығаруға болады.

Алгебралық толықтауыштар мен минорлар

Анықтама. Үшінші ретті анықтауыштың a_{ij} элементінің M_{ij} миноры деп анықтауыштың i - ші жатық жолын және j - ші тік жолын сызғанда калған элементтерінен құралған екінші ретті анықтауышты атайды.

Мысалы, $M_{23}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$

Анықтама. a_{ij} элементінің A_{ij} алгебралық толақтауышы деп оның $(-1)^{i+j}$ таңбасымен алынған минорын айтады, яғни $A_{ij}=(-1)^{i+j}\times Mij$.

Мысал. Мына анықтауыштың $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 4 & 5 & -2 \\ -1 & 3 & 6 \end{vmatrix}$ M_{12}, M_{31}, A_{22}, A_{12} табу керек.

$M_{12}=\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 6 \end{vmatrix}=24-2=22$, $M_{31}=\begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 5 & -2 \end{vmatrix}=6-20=-14$,

$A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 6 \end{vmatrix}=+(12+4)=16$, $A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 6 \end{vmatrix}=-(24-2)=-22$.

Екі және үш белгісізді сызықтық теңдеулер жүйесі. Крамер формулалары.

Бізге үш белгісізді сызықтық үш тендеулер жүйесі берілсін:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2 \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3 \end{cases}$$

Мұндағы a_{ij} коэффициентері мен b_i босмүшелері нақты сандар болсын. Мына белгілеулерді енгізейік

$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$, $\Delta=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$, $\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}$, $\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$

Егер $\Delta\neq 0$, онда Крамер ережесі бойынша $\begin{cases} x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta} \\ x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta} \\ x_3=\frac{\Delta_3}{\Delta} \end{cases}$

Мысал. Мына жжүйенің шешімін Крамер формулаларын қолданып табу керек

$$\begin{cases} -2x_1+x_2+7x_3=1 \\ 3x_1-3x_2+8x_3=20 \\ 5x_1+4x_2-x_3=1 \end{cases}$$

Шешемі. Анықтауыштарын есептейміз $\Delta=\begin{vmatrix} -2 & 1 & 7 \\ 3 & -3 & 8 \\ 5 & 4 & -1 \end{vmatrix}=290$, $\Delta_1=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 7 \\ 20 & -3 & 8 \\ 1 & 4 & -1 \end{vmatrix}=580$, $\Delta_2=\begin{vmatrix} -2 & 1 & 7 \\ 3 & 20 & 8 \\ 5 & 1 & -1 \end{vmatrix}=-580$, $\Delta_3=\begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 3 & -3 & 20 \\ 5 & 4 & 1 \end{vmatrix}=290$

Сонымен, $\begin{cases} x_1=\frac{580}{290}=2 \\ x_2=\frac{-580}{290}=-2 \\ x_3=\frac{290}{290}=1 \end{cases}$, яғни (2;-2;1) үштегі қарастырылып отырған теңдейлер жүйесінің шешімі болады.

Матрицалар және оларға амалдар қолдану

α санын А матрицасына көбейту үшін оның әрбір элементін сол санға көбейту қажет

Бірдей өлшемді А және В матрицаларының қосындысы деп өлшемі А мен В өлшеміндей, элементтері А мен В элементтерінің қосындысыны тең матрицаны атайды.

А және В матрицаларының көбейтіндісі деп c_{ij} – элементтері А матрицасының і – ші жатық жолы элементтерін В матрицасының j – ші тік жолының сәйкес элементтеріне көбейтіп қосқанға тең С матрицасын атайды.

Мысал. Берілген $A=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & -5 & 6 \end{pmatrix}$ және $B=\begin{pmatrix} -2 & 5 & 1 \\ 4 & 0 & -3 \end{pmatrix}$. Табу керек 2A+3B

$2A+3B=2\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & -5 & 6 \end{pmatrix}+3\begin{pmatrix} -2 & 5 & 1 \\ 4 & 0 & -3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & -6 & 2 \\ 8 & -10 & 12 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -6 & 15 & 3 \\ 12 & 0 & -9 \end{pmatrix}=$

$=\begin{pmatrix} 4-6 & -6+15 & 2+3 \\ 8+12 & -10+0 & 12-9 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & 9 & 5 \\ 20 & -10 & 3 \end{pmatrix}$

Мысал. A= $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -3 \\ -5 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$, B = $\begin{pmatrix} -2 & 3 & 7 \\ 4 & -5 & -8 \end{pmatrix}$ Табу керек: A$\times$B .

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -3 \\ -5 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 & 3 & 7 \\ 4 & -5 & -8 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 2(-2)+(-1)4 & 2\cdot 3+(-1)\cdot(-5) \\ 4(-2)+(-3)\cdot 4 & 4\cdot 3+(-3)(-5) \\ (-5)(-2)+0\cdot 4 & (-5)\cdot 3+0\cdot(-5) \\ 0\cdot(-2)+(-2)4 & 0\cdot 3+(-2)(-5) \end{bmatrix}$$
=

$$= \begin{bmatrix} -8 & 11 & 22 \\ -20 & 27 & 52 \\ 10 & -15 & -35 \\ -8 & 10 & 16 \end{bmatrix}$$

Кері матрица

Анықтама. Бас диагональ элементтірінің барлығы тегіс бірге тең диагональдік матрица бірлік матрица деп аталады және былай белгілінеді:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Анықтама. Шаршы A матрицасын алайық. Егер $A^{-1}A=E$ теңдігін қанағаттандыратын шаршы A^{-1} матрицасы табылса, онда A^{-1} матрицасы A матрицасына кері матрица деп аталады.

Кері матрица мына формуламен есептеледі A^{-1} = $\frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$

Мысал. Берілген A= $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ матрицасына кері матрицаны табу керек.

Шешімі. Δ =det $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ $=6 \neq 0$. Барлық алгебралық толықтауыштарын есептеп табамыз

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 9, \quad A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -5, \quad A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -7,$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -6, \quad A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 4, \quad A_{32} = (-1)^{13+2}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 2,$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = -3, \quad A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 3, \quad A_{33} = (-1)^{13+3}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3$$

Сөйтіп кері матрица

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{-5}{6} & \frac{-7}{6} \\ \frac{-6}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

ВЕКТОРЛЫҚ АЛГЕБРА

2 – ДӘРІС

Векторларды анықтау. Векторды базис бойынша жіктеу

Анықтама. Вектор деп бағытталған кесіндіні атайды да, $\overline{AB} = \bar{a}$ символмен белгілейді. $|AB|$ ара қашықтығы $\overline{AB}$ векторының ұзындығы деп аталады.

Анықтама. $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$,…,$\bar{a}_n$ векторларының сызықтык комбинациясы деп мына түрдегі $\lambda_1 \bar{a}_1 + \lambda_2 \bar{a}_2 + \ldots + \lambda_n \bar{a}_n$ кез келген векторды атайды, мұндағы $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ нақты сандарын сызықтық комбинацияның коэффициенттері деп атайды. Егер $\bar{a} = \lambda_1 \bar{a}_1 + \lambda_2 \bar{a}_2 + \ldots + \lambda_n \bar{a}_n$ болса, онда $\bar{a}$ векторы $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$,…,$\bar{a}_n$ векторлары бойынша жіктелген дейді.

Анықтама. Бағыттары бірдей немесе қарама – қарсы брғытталған нөлдік емес $\bar{a}$ және $\bar{b}$ векторлары коллинеар векторлар деп аталады да $\bar{a} // \bar{b}$ арқылы белгілінеді. Жазықтықтағы базис деп белгілі бір ретпен алынған осы жазақтықтың кез келген коллинеар емес векторлар парын атайды.

Теорема. Жазықтағы кез келген $\bar{a}$ векторын осы жазықтықтың коллинеар емес кез келген $\bar{e}_1$ және $\bar{e}_2$ векторлары бойынша жіктеуге болады және ол жіктеу жалғыз ғана болады, яғни $\overline{a} = \kappa\overline{e_1} + \kappa_2\overline{e_2}$. $К_1$, $к_2$ сандары $\overline{e_1}, \overline{e_2}$ базісі бойынша алынған $\overline{a}$ векторының координаталары деп аталады да, алынған ретімен жақшаға алынып, былай $\overline{a} = (\kappa_1, \kappa_2)$ жазылады.

Анықтама. Егер $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \overline{a_3}$ векторлары бір жызыктыққа параллель болса, онда оларды компланар векторлар деп атайды.

Егер $\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}$ компланар болса, онда $\overline{a} = \kappa\overline{e_1} + \kappa_2\overline{e_2} + \kappa_3\overline{e_3}$ жіктелу орындлады.

Декарттық координаталар жүйесі. Векторларға сызықтық амалдар қолдану

Анықтама. Егер базис векторлары $\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}$ өзара перпендикуляр бірлік вектораралар болса, онда кеңістіктегі о, $\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}$ координаталар жүйесі декарттық тік бұрышты координаталар жүйесі дер аталады. Декарттық тікбұрышты координаталар жүйесінің базистік бірлік векторларын $\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}$ символдарымен белгілейді. Сонда кеңістіктегі $\overline{a} = \overline{OM} = x\overline{i} + y\overline{j} + z\overline{k}$ арқылы жазылады.

$\overline{a} = (x_1, y_1, z_1)$ және $\overline{b} = (x_2, y_2, z_2)$ векторлары берілсін дейік.

Мына ережелер орындалады:

$$\overline{a} + \overline{b} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$$
$$\overline{a} - \overline{b} = (x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2)$$
$$\lambda\overline{a} = (\lambda x_1, \lambda y_1, \lambda z_1)$$

Мысал. Берілген $\overline{a} = (5,-3,2)$ және $\overline{b} = (-1,4,-2)$. Табу керек

$$2\overline{a} - 3\overline{b} = 2(5,-3,2) - 3(-1,4,-2) = (10,-6,4) - (-3,12,-6) = (10+3,-6-12,4+6) = (13,-18,$$

3-дәріс

Екі вектордың скаляр көбейтіндісі

<u>**Анықтама.**</u> ***Екі вектордың скаляр көбейтіндісі деп сол векторлардың модульдерін олардың арасындағы бұрыштың косинусына көбейтіндісін айтады, оны былайша белгілейді:*** $(\overline{a} \cdot \overline{b}) = |a| \cdot |b| \cdot \cos\varphi$, мұндағы φ - $\overline{a}$ және $\overline{b}$ векторларының арасындағы бурыш.

Егер $\overline{a} = (x_1, y_1, z_1)$ және $\overline{b} = (x_2, y_2, z_2)$ векторлары берілсін дейік, онда олардың скаляр көбейтіндісі мына формуламен есептеледі

$$(\overline{a} \cdot \overline{b}) = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$$

Салдар. Егер $\overline{a} = (x, y, z)$ болса, онда вектор ұзындығы сына формула бойынша анықталады

$$|a| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Салдар. Егер $\overline{a} = (x_1, y_1, z_1)$ және $\overline{b} = (x_2, y_2, z_2)$, онда $\overline{a}$ және $\overline{b}$ векторлары арасындағы бұрыш мына формула бойынша есептеледі:

$$\cos\varphi = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

Салдар. $\overline{a} = (x, y, z)$ векторының бағыттауыш косинустары

$$\cos\varphi = \frac{x_1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \cos\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \cos\varphi = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

Екі вектордың векторлық көбейтіндісі

Анықтама. $\overline{a} = (x_1, y_1, z_1)$ және $\overline{b} = (x_2, y_2, z_2)$ векторларының векторлық көбейтіндісі деп с=$\overline{a} \times \overline{b}$ символымен белгіленген мына шартты қанағаттындыратын $\overline{c}$ векторын атайды:

$$|\overline{c}| = |\overline{a}| \cdot |\overline{b}| \cdot \sin\varphi = S_{\text{пар.}}$$
$$\overline{c} \perp \overline{a} \text{ және } \overline{c} \perp \overline{b}$$

$$c=\bar{a}\times\bar{b}=\left(\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}\right)$$

Векторларды аралас көбейтіндісі

Анықтама. $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ векторларының аралас көбейтіндісі деп $\bar{a}\times\bar{b}$ вектормен $\bar{c}$ векторының скалярлық көбейтіндісіне тең санды атайды, яғни $(\bar{a}\cdot\bar{b}\cdot\bar{c})=(\bar{a}\times\bar{b})\bar{c}$.

1. Егер $\bar{a}=(x_1, y_1, z_1)$, $\bar{b}=(x_2, y_2, z_2)$, $\bar{c}=(x_3, y_3, z_3)$, онда олардың аралас көбейтіндісі үшінші ретті анықтауышқа тең, яғни

$$(\bar{a}\cdot\bar{b}\cdot\bar{c})=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

2. $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ векторлары компланар векторлар болуы үшін, олардың аралас көбейтіндісі нөлге тең болуы қажетті жуне жеткілікті, яғни $(\bar{a}\cdot\bar{b}\cdot\bar{c})=0$.

3. Компланар емес $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ векторларының аралас көбейтіндісі модуль бойынша сол үш векторларға салынған параллелепипедтің көлеміне тең болады, яғни $V=|(\bar{a}\cdot\bar{b}\cdot\bar{c})|$.

Векторлардың перпендикулярлық және коллинеарлық шарттары

1. Егер $\bar{a}=(x_1, y_1, z_1)$ және $\bar{b}=(x_2, y_2, z_2)$ векторлары коллинеар болса, онда олардың сәйкес координаталары пропорционал болады, яғни

$$\frac{x_1}{x_2}=\frac{y_1}{y_2}=\frac{z_1}{z_2}$$

2. $\bar{a}=(x_1, y_1, z_1)$ және $\bar{b}=(x_2, y_2, z_2)$ векторлары перпендикуляр болуы үшін

$x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2=0$ теңдігі орындалады.

4-дәріс.

Жазықтықтағы аффиндік және тік бұрышты координаталар жүйесі. Түзудегі, жазықтықтағы және кеңістіктегі тік бұрышты координаталар жүйесі. Кесіндіні берілген қатынаста бөлу

ЖАЗЫҚТЫҚТАҒЫ АНАЛИТИКАЛЫҚ ГЕОМЕТРИЯ

Жазықтықтағы түзудің теңдеулері

Анықтама. Ax+By+C=0 теңдеу түзудің жалпы теңдеуі деп аталады. Бұдан $y=-\frac{A}{B}x-\frac{C}{B}$. Мұндағы к=$-\frac{A}{B}$ - түзудің бұрыштық коэффициенты.

1. Бағыттауыш векторы $\bar{a}=(l, m)$, (түзуге параллель), $M_0(x_0,y_0)$ нүктесі арқылы өтетін түзудің теңдеуі $\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}$ болады. Бұл теңдеуді қорытып шығару үшін берілген түзудің бойынан тағы бір M(x, y) нүкте аламыз. Сонда $\overline{M_1M}$ векторы $\bar{a}$ векторына коллинеар. Демек, олардың сәйкес координаталары пропорционал, яғни $\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}$.

2. Нормаль векторына $\bar{n}=(A, B)$ перпендикуляр болып, $M_0(x_0,y_0)$ нүктесі арқылы өтетін түзудің теңдеуі $A(x-x_0)+B(y-y_0)=0$. Бұл теңдеуді қорытып шығару үшін берілген түзудің бойынан тағы бір M(x, y) нүкте аламыз. Сонда $\overline{M_1M}$ векторы $\bar{n}$ векторына перпендикуляр болады, яғни олардың скаляр көбейтіндісі нөлге тең. Сонда мына теңдік $A(x-x_0)+B(y-y_0)=0$ шығады. Бұл ізделінді түзудің теңдеуі.

3. Бұрыштық коэффициенті к болып, $M_0(x_0,y_0)$ нүкте арқылы өтетін түзудің теңдеуі $y-y_0=k(x-x_0)$. Мұны қорыту үшін түзудің y=кx+*в* (1) теңдеуін алайық. M_0 нүкте түзу бойында жақандықтан, оның координаталары (1) теңдеуді қанағаттандырады, яғни

$y_0 = kx_0 + в$ (2) теңдігі орындалады. (1) теңдіктен (2) теңдікті шегерсек, $y-y_0=k(x-x_0)$ теңдігі шығады. Бұл бұрыштық коэффициенті к болып, $M_0(x_0,y_0)$ нүктесі арқылы өтетін түзудің теңдеуі.

4. Берілген екі нүкте $M_1(x_1,y_1)$ және $M_2(x_2,y_2)$ нүктелері өтетін түзудің теңдеуі $\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$. Мұнда түзу бойынан кез келген бір М (x, y) нүкте аламыз. M_1 нүктені М және M_2 нүктелерімен қоссақ, $\overline{M_1M}=(x-x_1\ ,\ y-y_1)$, $\overline{M_1M_2}=(x_2-x_1\ ,\ y_2-y_1)$, векторлары коллинеар болады. Бұдан $\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$ ізделінді теңдеу шығады.

Координаталар өстерін A(a,0), B(0,b) нүктелерінде қиып өтетін түзудің теңдеуі $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ (Студенттердің өз беттерімен қорытуына беріледі).

Екі түзу арасындағы бұрыш. Параллельдік және перпендикулярлық шарттары. Нүктеден түзуге дейінгі қашықтығы

d_1 және d_2 түзулері өздерінің сәйкес жалпы теңдеулері арқылы берілсін дейік:

$$A_1x+B_1y+C=0,\ A_2x+B_2y+C=0$$

Бұрыштық коэффициенттері $к_1=-\frac{A_1}{B_1}$, $к_2=-\frac{A_2}{B_2}$

Егер $d_1 \parallel d_2$, онда $к_1 = к_2$.

Егер $d_1 \perp d_2$, онда $к_1 = -\frac{1}{\kappa_2}$.

Екі түзу арасындағы бұаыш $tg\alpha=\left|\frac{\kappa_2-\kappa_1}{1+\kappa_1\kappa_2}\right|$ (Студенттердің өз беттерімен қорытуына беріледі)..

$M(x_0,y_0)$ нүктеден түзуге дейінгі қашықтығы $d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$ (Студенттердің өз беттерімен қорытуына беріледі).

Екінші ретті сызықтар

Екінші ретті сызық төмендегі теңдеу арқылы беріледі:

$$\boxed{Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0.}$$

Бұл теңдеу төменде келтірілген теңдеулердің біріне келтірілетіндей координаталар жүйесі (тік бұрышты болуы міндетті емес) болуы мүмкін.

1) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ - эллипстің теңдеуі.
2) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=-1$ - "жорамал" эллипстің теңдеуі.
3) $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ - гиперболаның теңдеуі.
4) $a^2x^2 – c^2y^2 = 0$ – екі қиылысушы түзудің теңдеуі.
5) $y^2 = 2px$ –параболаның теңдеуі.
6) $y^2 – a^2 = 0$ –екі параллель түзудің теңдеуі.
7) $y^2 + a^2 = 0$ –"жорамал" екі параллель түзулердің теңдеуі.
8) $y^2 = 0$ – беттесуші түзулер.
9) $(x – a)^2 + (y – b)^2 = R^2$ –шеңбердің теңдеуі.

Шеңбер

$\boxed{(x – a)^2 + (y – b)^2 = R^2}$ (1) шеңбердің центрінің координаталары (a; b) болады.

Мысал. $2x^2 + 2y^2 – 8x + 5y – 4 = 0$ теңдеуі арқылы берілген шеңбердің центрінің координаталары мен радиусын тап. .

Шешу. Шеңбердің центрі мен радиусын табу үшін теңдеуді (1) теңдеу түріне келтіріп аламыз. Ол үшін теңдеудің сол жағындағы көпмүшенің толық квадратын бөлеміз.

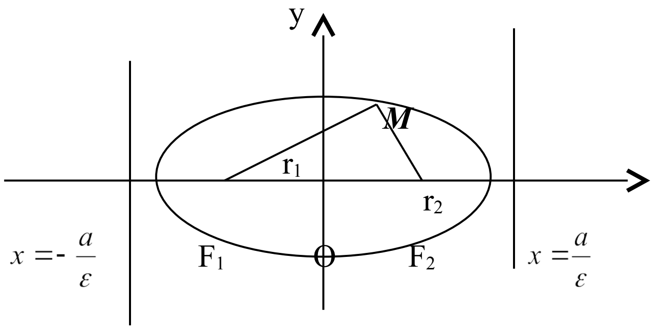
$$x^2 + y^2 – 4x + 2,5y – 2 = 0$$
$$x^2 – 4x + 4 –4 + y^2 + 2,5y + 25/16 – 25/16 – 2 = 0$$
$$(x – 2)^2 + (y + 5/4)^2 – 25/16 – 6 = 0$$
$$(x – 2)^2 + (y + 5/4)^2 = 121/16$$

Бұл теңдеуден мынаны табамыз: O(2; -5/4); R = 11/4.

Эллипс және оның қасиеттері

Анықтама. **Эллипс** деп фокустары деп аталатын нүктелерден қашықтықтарының қосындысы сол фокустары арақашықтығынан ($F_1F_2 = 2c$) артық болатын тұрақты $2a$ санына тең болатын жазықтықтағы нүктелердің геометриялық орнын айтады, оны былайша белгілейді:

$$F_1M + F_2M = 2a \quad (2) \quad .$$



F_1, F_2 – эллипстің фокустары. $F_1 = (-c; 0)$; $F_2(\bar{c}; 0)$, $F_1F_2 = 2c$.
c – фокустары ар қашықтығының жартысы; $2a$ - тұрақты шама. F_1M және F_2M қашықтықтарын $r_1 = F_1M$, $r_2 = F_2M$ деп белгілесек, онда (2) теңдік мына түрде жазылады:

$$r_1 + r_2 = 2a \qquad (2^1)$$

Екі нүктені ара қашықтығының формуласы бойынша: $r_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$, $r_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a.$$

Бұл теңдеуді түрлендіріп, эллипстің жабайы (канондық) теңдеуін табайық:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2$$

$$x^2 + 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2cx + c^2 + y^2,$$

$a\sqrt{x^2 - 2cx + c^2 + y^2} = a^2 - cx$, теңдіктің екі жағын a - ға бөліп, квадраттайық:

$$x^2 - 2cx + c^2 + y^2 = (a - \frac{c}{a}x)^2,$$

$$x^2 - 2cx + c^2 + y^2 = a^2 - 2cx + \frac{c^2}{a^2}x^2,$$

$$a^2x^2 + a^2y^2 + a^2c^2 = a^4 + c^2x^2,$$

$$(a^2 - c^2)\, x^2 + a^2y^2 + = a^2(a^2 - c^2),$$

$a > c$ болғандықтан, $a^2 - c^2 > 0$ болады, сондықтан $\boxed{a^2 - c^2 = в^2}$ (3) деп белгілейміз.

Сонда $в^2 x^2 + a^2y^2 + = a^2 в^2$ шығады, осыдан $\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$ (4), мұндағы x пен y - эллипстің бойындағы кез келген нүктелердің координаталары, a – эллипстің үлкен жарты өсі, $в$ – оның кіші жарты өсі. (4) теңдеу ***эллипстің жабайы (канондық) теңдеуі*** деп аталады.

Теорема. *Эллипстің фокустық ара қашықтығы мен жарты өстері мынадай қатынас бойынша байланысады:*

$$a^2 = b^2 + c^2.$$

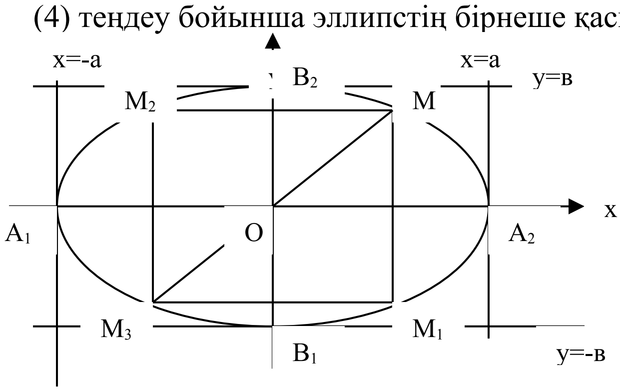
Дәлелдеу: Егер М нүкте эллипстің вертикаль осьпен қиылысу нүктесінде болса, онда $r_1 + r_2 = 2\sqrt{b^2 + c^2}$ (Пифагор теоремасы бойынша). Егер М нүкте эллипстің горизонталь осьпен қиылысу нүктесінде болса, онда $r_1 + r_2 = a - c + a + c$. Эллипстің нықтамасы бойынша $r_1 + r_2$ – қосынды тұрақты шама, ендеше жоғарыдағы екі теңдікті теңестіріп, мынадай теңдік аламыз:

$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2} \quad .$$

Анықтама. $\boxed{\varepsilon = c/a}$ қатынас эллипстің **эксцентриситеті** деп аталады. $c < a$ болғандықтан, $\varepsilon < 1$ болады.

Эллипстің түрін оның жабайы теңдеуі бойынша зерттеу.

(4) теңдеу бойынша эллипстің бірнеше қасиеттерін анықтайық..



1). (4) теңдеудегі x пен y екінші дәрежелі болғандықтан, ол теңдеуді $M(x;y)$ нүктесінің координаталарымен қоса $M_1(x;-y)$, $M_2(-x;y)$, $M_3(-x;-y)$ нүктелерінің де координаталары қанағаттандырады.

...ше эллипс координат осьтеріне,

...рдината басына қарағанда симметриялы .

...г. Сондықтан эллипс ox осін $A_1(-a; 0)$ және

a^-

$A_2(a;0)$ нүктелерінде қияды. Ал $x=0$ болғанда $\frac{y^2}{в^2} = 1$ шығады да, $y = \pm в$. Демек, эллипс oy осін $B_1(0;-в)$, $B_2(0; в)$ нүктелерінде қияды. Эллипстің осьтермен қиылысу нүктелері (A_1, A_2, B_1, B_2) **төбелері** деп аталады.

3) (4) теңдеуден $\frac{x^2}{a^2} \le 1$; $\frac{y^2}{в^2} \le 1$. Бұдан $|x| \le a$ және $|y| \le в$. Бұдан $-a \le x \le a$ және $-в \le y \le в$. Сөйтіп, эллипстің нүктелері жазықтықтың қабырғалары 2a және 2в болатын тік төртбұрышпен шектелген бөлігінде жатады.

Теорема. Эллипстің кез келген *M(x, y) нүктесі үшін төмендегі қатынас орындалады*:

$$\boxed{r_1 = a - \varepsilon x, \quad r_2 = a + \varepsilon x.}$$

Дәлелдеу. Жоғарыда $r_1 + r_2 = 2a$ болатыны көрестілген. Сонымен қатар,геометьриялық кескіндеме бойынша:

$$r_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$
$$r_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\ .$$

Осы формулалардағы y^2 –ты эллипстің канондық теңдеуінен тауып алып, алдыңғы формулаларға қойып түрлендірсек, төмендегі теңдік шығады:

$$4cx = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$r_1 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a - \frac{c}{a}x = a - \varepsilon x.$$

Дәл осылайша $r_2 = a + \varepsilon x$.

Анықтама. $\boxed{x = a/\varepsilon; \quad x = -a/\varepsilon.}$ теңдеулерімен анықталатын екі түзу эллипстің **директрисалары** деп аталады.

Теорема. *Нүкте эллипсте жату үшін оның фокусқа дейінгі қашықтығының сәйкес директрисаға дейінгі қашықтығына қатынасы ε эксцентриситетке тең болуы қажетті және жеткілікті.*

Мысал. $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1$ теңдеуімен берілген эллипстің сол жақ фокусы мен төменгі төбесі арқылы өтетін түзудің теңдеуін құр.

1) Эллипстің төменгі төбесінің координаталары: $x = 0$; $y^2 = 16$; $y = -4$.
2) Сол жақ фокусының координаталары: $c^2 = a^2 - b^2 = 25 - 16 = 9$; $c = 3$; $F_2(-3; 0)$.
3) Екі нүкте арқылы өтетін түзудің теңдеуі:

$$\frac{x-0}{-3-0}=\frac{y+4}{0+4};\qquad \frac{x}{-3}=\frac{y+4}{4};\qquad 4x=-3y-12;\qquad 4x+3y+12=0$$

Мысал. $F_1(0;\ 0)$, $F_2(1;\ 1)$ фокустары мен үлкен осі 2 –ге тең болатын эллипстің теңдеуін жаз.

Эллипстің теңдеуі мынадай: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$. Мұнда a мен b жарты өстерін табу керек.
Фокустарының ара қашықтығы:
$2c = \sqrt{(1-0)^2+(1-0)^2}=\sqrt{2}$, сондықтан $a^2 - b^2 = c^2 = ½$
Есеп шарты бойынша $2a = 2$, сонда $a = 1$, $b = \sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{1-1/2}=\sqrt{2}/2$.
Сонымен эллипстің теңдеуі: $\dfrac{x^2}{1^2}+\dfrac{y^2}{1/2}=1$.

Гипербола және оның қасиеттері

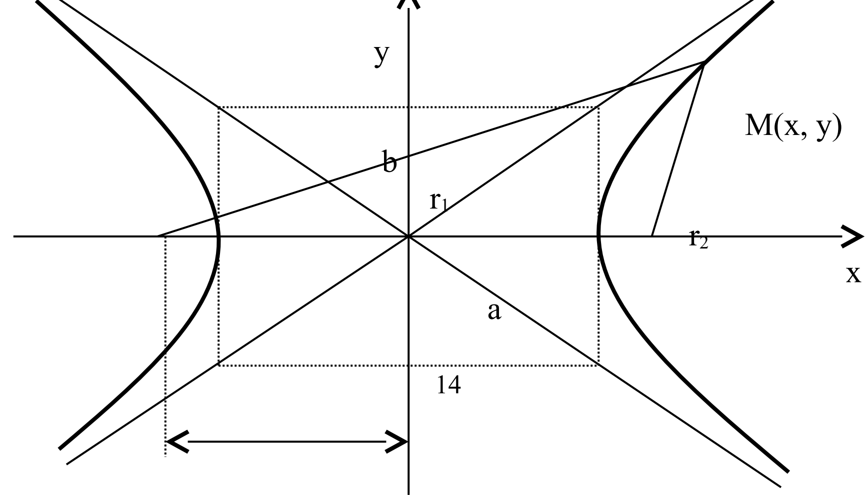
Анықтама. Гипербола деп фокустары деп аталатын нүктелерден қашықтықтары айырмасының модулі сол фокустары арақашықтығынан ($F_1F_2 = 2c$) кем болатын тұрақты $2a$ санына тең болатын жазықтықтағы нүктелердің геометриялық орнын айтады, оны былайша белгілейді:

$$|F_1M - F_2M| = 2a \qquad (5)\quad .$$

F_1, F_2 – гиперболаның фокустары. $F_1 = (-c; 0)$; $F_2(c; 0)$, $F_1F_2 = 2c$.
c – фокустары ара қашықтығының жартысы; $2a$ - тұрақты шама. F_1M және F_2M қашықтықтарын r_1= F_1M, r_2= F_2M деп белгілесек, онда (5) теңдік мына түрде жазылады:

$$|r_1 - r_2| = 2a \qquad (5^1)$$

Гиперболаның бойынан кез келген M(x, y) нүкте алайық..



F$_1$ A$_2$(*-a;0)* A$_1$(*a;0)* F$_2$

c

Сонда:

$$r_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$
$$r_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$
$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$
$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 + 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2$$
$$4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = -4a^2 + 4xc$$
$$a^2(x-c)^2 + a^2y^2 = a^4 - 2a^2xc + x^2c^2$$
$$a^2x^2 - 2a^2xc + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 - 2a^2xc + x^2c^2$$
$$a^2x^2 + a^2c^2 + a^2y^2 - a^4 - x^2c^2 = 0$$
$$-x^2(c^2 - a^2) + a^2(c^2 - a^2) + a^2y^2 = 0$$
$$x^2(c^2 - a^2) - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2)$$

$c^2 - a^2 = b^2$ деген белгілеме енгіземіз (геометриялық түрдегі бұл шама – кіші жарты ось)

$$a^2b^2 = b^2x^2 - a^2y^2$$

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

Гиперболаның жабайы (канондық) теңдеуін алдық..

Гипербола фокустарын қосатын кесіндінің ортасына (О нүктеге), және координат осьтеріне қарағанда симметриялы.

2a гиперболаның нақты өсі деп аталады.

2b гиперболаның жорамал өсі деп аталады.

<u>Гиперболаның қасиеттерін студенттерге өз беттерімен қарастыруға тапсырылады.</u>

Гиперболаның екі асимптотасы болады және олар $\boxed{y = \pm\frac{b}{a}x}$ теңдеулері арқылы беріледі.

<u>**Анықтама.**</u> $\varepsilon = \frac{c}{a} > 1$ қатынасы гиперболаның **эксцентриситеті** деп аталады, мұндағы с – фокустары қашықтығының жартысы, а –нақты жарты өсь.

$c^2 - a^2 = b^2$ екеніні ескерсек:

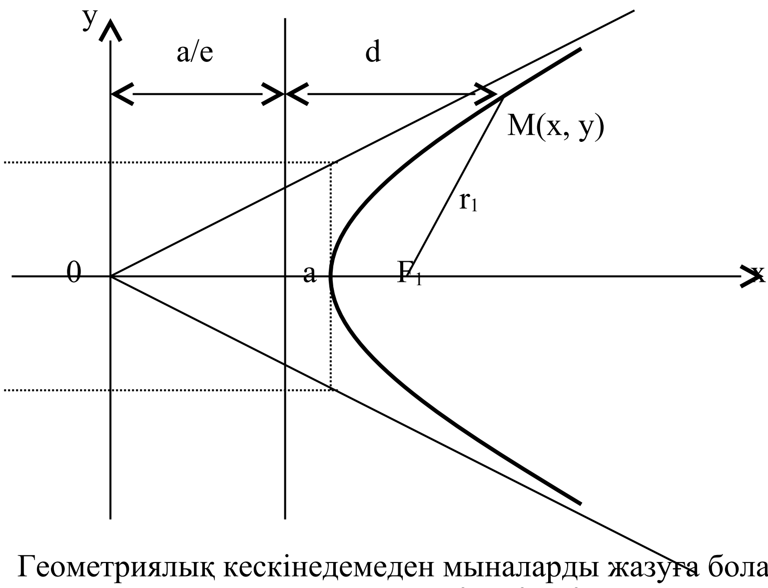
$$\varepsilon^2 = \frac{c^2}{a^2} = \frac{a^2 + b^2}{a^2} = \frac{b^2}{a^2}$$
$$\frac{b}{a} = \sqrt{\varepsilon^2 - 1}$$

Егер a = b, $\varepsilon = \sqrt{2}$ болса, онда гипербола **теңбүйірлі (тең қабырғалы)** деп аталады**.**

<u>Анықтама.</u> Гиперболаның нақты өсіне перпендикуляр, оның центріне қарағанда симметриялы және одан а/ε қашықтықта болатын екі түзу гиперболаның **директрисалары** деп аталады.Олардың теңдеулері: $x = \pm\dfrac{a}{\varepsilon}$.

<u>Теорема.</u> *Егер r – гиперболаның кез келген М нүктесінен қандай да бір фокусына дейінгі қашықтығы, ал d – осы фокусқа сәйкес директрисаға дейінгі қашықтығы болса,онда r/d қатынас – эксцентриситетке тең тұрақты шама.*

<u>Дәлелдеуі.</u> Гиперболаны схемалық түрде кескіндейік:



$OF_1 = c$. Геометриялық кескінедемеден мыналарды жазуға болады:
а/ε е + d = x, сондықтан d = x – a/ε e. $(x – c)^2 + y^2 = r^2$

Гиперболаның канондық теңдеуінен: $y^2 = \dfrac{x^2b^2}{a^2} - b^2$, с учетом $b^2 = c^2 – a^2$:

$$r^2 = x^2 - 2xc + c^2 + \frac{x^2b^2}{a^2} - b^2 =$$

$$= x^2 - 2xc + c^2 + \frac{c^2x^2}{a^2} - x^2 - c^2 + a^2 = \left(\frac{c}{a}x - a\right)^2$$

$$r = \frac{c}{a}x - a$$

Сонда с/а = ε болғандықтан, r = ε x – a.

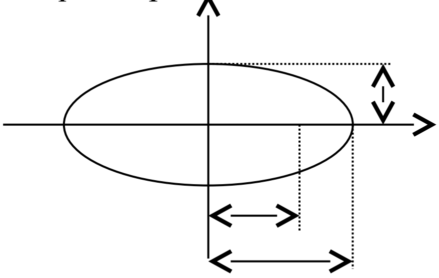
Сонымен: $\dfrac{r}{d} = \dfrac{\varepsilon x - a}{x - \frac{a}{\varepsilon}} = \varepsilon$.

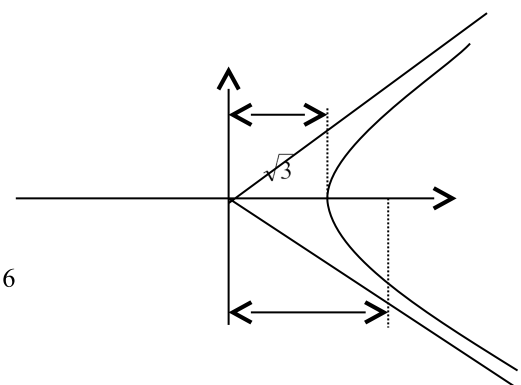
Гиперболаның сол жақтағы тармағы үшін дәлелдеме осы тәріздес.

<u>Пример.</u> Төбелері мен фокустары $\dfrac{x^2}{8} + \dfrac{y^2}{5} = 1$ эллипсінің сәйкес төбелері мен фокустарында болатын гиперболаның теңдеуін жаз.

Эллипс үшін : $c^2 = a^2 – b^2$.

Гипербола үшін: $c^2 = a^2 + b^2$.





$\sqrt{5}$

$\sqrt{3}$

$\sqrt{8}$ $\sqrt{8}$

Гиперболаның теңдеуі: $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{5} = 1$.

Мысал. Егер гиперболаның эксцентриситеті 2-ге тең, ал фокустары $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ теңдеуімен берілген эллипстің фокустарымен беттессе, онда гиперболаның теңдеуін жаз.

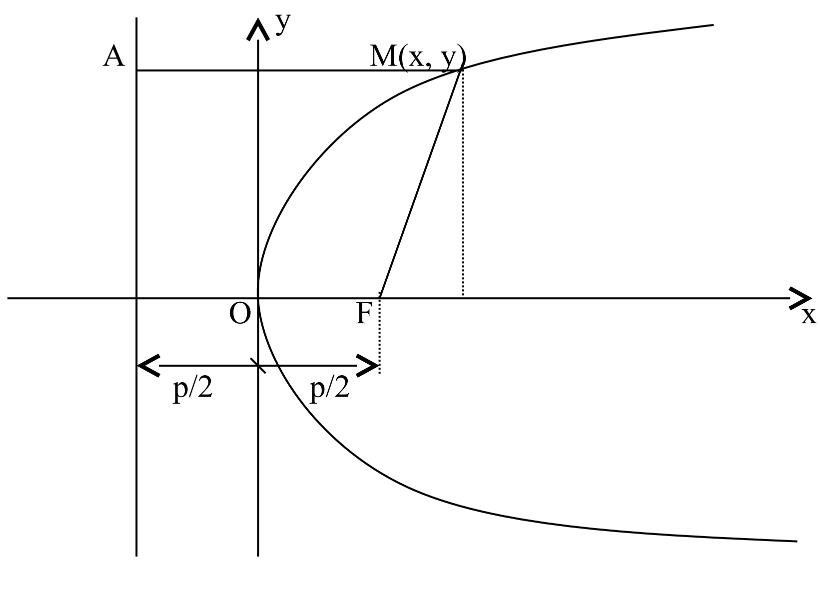
Шешу. Эллипстің фокустық ара қашықтығын табамыз: $c^2 = 25 - 9 = 16$.
Гипербола үшін: $c^2 = a^2 + b^2 = 16$, $\varepsilon = c/a = 2$; $c = 2a$; $c^2 = 4a^2$; $a^2 = 4$; $b^2 = 16 - 4 = 12$.

Сонда $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$ - гиперболаның теңдеуі болады.

Парабола және оның қасиеттері

Анықтама. Парабола деп фокусы деп аталатын нүктеден ара қашықтығы центрі арқылы өтпейтін директрисасы деп аталатын берілген түзуден бірдей ара қашықтықта болатын жазықтықтағы нүктелердің жиынын айтады.

Координат басын фокус пен директрисаның ортасына орналастырамыз.



p шама (фокустан директрисаға дейінгі қашықтық) параболаның **параметрі** деп аталады. Параболаның жабайы теңдеуін қорытып шығарайық.

Геометриялық кескіндемеден: $AM = MF$; $AM = x + p/2$;

$$MF^2 = y^2 + (x - p/2)^2$$

$$(x + p/2)^2 = y^2 + (x - p/2)^2$$

$$x^2 + xp + p^2/4 = y^2 + x^2 - xp + p^2/4$$

$$\boxed{y^2 = 2px} \qquad (*)$$

$x = -p/2$ - директрисаның теңдеуі.

Параболаның қасиеттері:

1. (*) теңдеудегі y жұп дәрежелі болғандықтан, парабола Ox өсіне қарағанда симметриялы, Ox өсі параболаның симметрия өсі болады.
2. $p>0$ болғандықтан, (*) теңдеуден $x \geq 0$. Сондықтан, парабола Oy өсінің оң жағында орналасады.
3. $x = 0$ болғанда, $y = 0$. Демек, парабола координат басы арқылы өтеді.
4. x шектеусіз өскен сайын y-тің модулі де шектеусіз өседі. O(0; 0) нүкте параболаның төбесі , FM = r M нүктесінің *фокальдық радиусы*болады.

$y^2 = -2px$, $x^2 = 2py$, $x^2 = -2py$ ($p>0$) теңдеулері де параболаларды анықтайды.

Мысал. $y^2 = 8x$ параболаның бойынан директрисаға дейінгі қашықтығы 4 – ке тең болатын нүктені тап.

Шешу. Параболаның теңдеуінен p = 4 табамыз.
$r = x + p/2 = 4$; Сонда $x = 2$; $y^2 = 16$; $y = \pm 4$. Ізделінді нүктелер: $M_1(2; 4)$, $M_2(2; -4)$.

КЕҢІСТІКТЕГІ АНАЛИТИКАЛЫҚ ГЕОМЕТРИЯ

4. Кеңістіктегі жазықтық.

1. Берілген $M_0(x_0, y_0, z_0)$ нүкте арқылы өтіп, $\bar{n}=(A,B,C)$ нормаль векторына перепендикуляр жазықтықтың теңдеуі

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$

2. $Ax+By+Cz+D=0$ теңдеуі, мұндағы A, B, C коэффициенттерінің кемінде біреу нөлге тең емес, жазықтықтың жалпы теңдеуі деп аталады. Мұндағы $\bar{n}=(A,B,C)$ нормаль векторы.

3. **Жазықтықтың нормаль теңдеуі.** $Ax+By+Cz+D=0$ теңдеуін нормаланған теңдеуіне келтіру үшін, оны $\lambda = \pm\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$ нормалаушы көбейткішіне көбейту қажет. Егер $D \neq 0$, болса, онда бұл көбейткіштің таңбасы D- нің таңбасына қарама – қарсы алынады. Ал егерде D=0 болса, онда λ- ның таңбасы ретінде екі таңбаның кез келгенің алуға болады, яғни $Ax+By+Cz=0$ теңдеудің сол жағын $\bar{n}$ векторының ұзындығына бөлеміз.

$M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$ үш нүктеден өтетің жазықтықтың теңдеуі анықтауыш арқылы табылады

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

Кеістіктегі аналитикалық геометрия

Кеңістікте түзудің теңдеуі

Жазықтықтағы тәрізді кеңістікте де кез келген сызық координаталары қандай да бір таңдалып алынған координат системасында $F(x, y, z) = 0$ (1) теңдеуін қанағаттандыратын нүктелер жиыны ретінде анықталады.

(1) теңдеу кеңістіктегі сызықтың теңдеуі болады.

Сонымен қатар кеңістікте сызық басқаша да анықталуы мүмкін. Оны әрқасысы қандай да бір теңдеумен берілген екі беттің қиылысу сызығы деп қарауға болады.

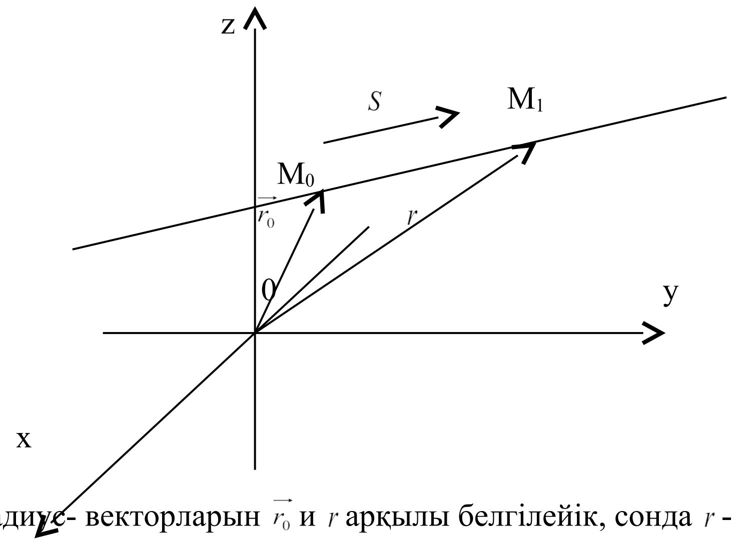
Айталық $F(x, y, z) = 0$ и $\Phi(x, y, z) = 0$ – L сызығы бойынша қиылысатын беттердің теңдеулері болсын.

Сонда $\begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ \Phi(x, y, z) = 0 \end{cases}$ теңдеулер жүйесін **кеңістіктегі сызықтың теңдеуі** деп атайды.

Кеңістікте нүкте мен бағыттаушы векторы арқылы берілген түзудің теңдеуі

Кез келген түзу мен оған параллель S(m, n, p) векторын алайық.. S векторы түзудің **бағыттаушы векторы** деп аталады.

Түзу бойынан кез келген $M_0(x_0, y_0, z_0)$ және $M(x, y, z)$ нүктелерін аламыз..



Бұл нүктелердің радиус- векторларын $\vec{r_0}$ и r арқылы белгілейік, сонда $r - \vec{r_0} = \overrightarrow{M_0M}$.

$\overrightarrow{M_0M}$ и S векторлары коллинеар болғандықтан, $\overrightarrow{M_0M} = S$t қатынасы орындалады, мұндағы t – кез келген параметр.

$\overrightarrow{M_0M} = S$t теңдіктен мынау шығады: $r - \vec{r_0} = S$t . Бұдан $\boxed{r = \vec{r_0} + S t}$ (2) .

Бұл теңдеуді түзудің кез келген нүктесінің координаталары қанағаттандыратындықтан, (2) теңдеу **түзудің параметрлік теңдеуі** болады.

Бұл векторлық теңдеу координаталық формада былайша жазылады:

Бұл жүйені түрлендіріп t параметрге теңестіру арқылы кеңістіктегі түзудің канондық (жабайы) теңдеуін аламыз:

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}.$$

Түзудің параметрлік теңдеуі канондық теңдеуден шығады. Айталық бізге түзудің канондық теңдеуі берілсін. $\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$ (1). Осыны t параметрге теңестіреміз. Сонда:

$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}=t$, бұдан , немесе

<u>Анықтама.</u> Түзудің **бағыттаушы косинустары** деп S векторының бағыттаушы косинустарын айтады және олар төмендегі формулалар бойынша анықталады:

$$\cos\alpha=\frac{m}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}};\quad \cos\beta=\frac{n}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}};\quad \cos\gamma=\frac{p}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}}.$$

Бұдан мынаны аламыз: $m : n : p = \cos\alpha : \cos\beta : \cos\gamma$.
m, n, p сандары түзудің **бұрыштық коэффициенттері** деп аталады. S - нөлдік емес вектор болғандықтан, m, n и p бір уақытта нөлге тең бола алмайды, алайда бұл сандардың біреу не екуі нөлге тең болуы мүмкін. Бұл жағдайда түзудің теңдеуінен сәйкес алымдарын нөлге теңестіруге тура келеді.

Кеңістікте екі нүкте арқылы өтетін тұзудің теңдеуі

Егер кеңістіктегі түзудің бойынан $M_1(x_1, y_1, z_1)$ және $M_2(x_2, y_2, z_2)$ екі нүкте берілсе, онда олар түзудң жоғарыдағы теңдеуін қанағаттандыруы кере, яғни:

$$\frac{x_2-x_1}{m}=\frac{y_2-y_1}{n}=\frac{z_2-z_1}{p}.$$

Сонымен қатар M_1 нүкте үшін мынаны жазамыз:

$$\frac{x-x_1}{m}=\frac{y-y_1}{n}=\frac{z-z_1}{p}.$$

Осы теңдеулерді біріктіп шешу арқылы мынаны аламыз:

$$\boxed{\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}.}$$

Бұл екі нүкте арқылы берілген түзудің теңдеуі.

Кеңістіктегі түзудің жалпы теңдеуі

Түзуді екі жазықтықтыңтың қиылысу арқылы былай анықталады: $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$. Бұлардың нормаль ваекторларының координаталары былайша анықталады: $\overrightarrow{N_1}$ (A_1, B_1, C_1), $\overrightarrow{N_2}$ (A_2, B_2, C_2);

Түзудің бағыттауыш векторы $\vec{S}$ $\overrightarrow{N_1}$, $\overrightarrow{N_2}$ векторларына перпендикуляр. Сонда $\vec{S} = \overrightarrow{N_1} \times \overrightarrow{N_2}$ $\Rightarrow \vec{S} = \left(\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \right)$.

Жазықтық векторлық формада төмендегі теңдеу арқылы берілуі мүмкін:

$$N \cdot r + D = 0, \text{ где}$$

N - жазықтықтың нормалі; r -Жазықтықтың кез келген нүктесінің радиус - векторы.

Айталық кеңістікте екі жазықтық берілсін: $\overrightarrow{N_1} \cdot r + D_1 = 0$ и $\overrightarrow{N_2} \cdot r + D_2 = 0$,нормаль векторлардың координаталары:: $\overrightarrow{N_1}$ (A_1, B_1, C_1), $\overrightarrow{N_2}$ (A_2, B_2, C_2); r (x, y, z).

Түзудің жалпы теңдеуі параметрлік түрде беріледі:

$$\begin{cases} \overrightarrow{N_1} \cdot \vec{r} + D_1 = 0 \\ \overrightarrow{N_2} \cdot \vec{r} + D_2 = 0 \end{cases}$$

Түзудің координаталық формадағы жалпы теңдеуі:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

Бұл практика жүзінде есеп теңдеуі жалпы түрде берілген түзулердің теңдеулерін канондық түрге келтіру болып табылады.

Ол үшін түзудің кез келген нүктесін және m, n, p сандарын табады.

Бұл ұшін түзудің бағыттаушы векторы берілген жазықтықтардың нормаль векторлардың векторлық көбейтіндісі арқылы анықталады.

$$\vec{S} = \overrightarrow{N_1} \times \overrightarrow{N_2} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = \vec{i}\, m + \vec{j} n + \vec{k} p.$$

Мысалы. Түзудің $\begin{cases} 2x - y + 3z - 1 = 0 \\ 5x + 4y - z - 7 = 0 \end{cases}$ канондық теңдеуін тап.

Түзудің кез келген нүктесін табу үшін х = 0 деп аламыз, содан кейін осы мәнді берілген теңдеулер жүйесіне қоямыз.

$$\begin{cases} y = 3z - 1 \\ 4y - z - 7 = 0 \end{cases} \begin{cases} y = 3z - 1 \\ 12z - 4 - z - 7 = 0 \end{cases} \begin{cases} y = 3z - 1 \\ z = 1 \end{cases} \begin{cases} y = 2 \\ z = 1 \end{cases}, \text{ т.е. } A(0, 2, 1).$$

Түзудің бағыттаушы векторының компоненттерін табамыз:

$$m = \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = -11; \quad n = -\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} = 17; \quad p = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 13.$$

Сонда түзудің канондық теңдеуі:

$$-\frac{x}{11} = \frac{y-2}{17} = \frac{z-1}{13}.$$

Мысал.

Түзудің $\begin{cases} 2x + 3y - 16z - 7 = 0 \\ 3x + y - 17z = 0 \end{cases}$ теңдеуін канондық (жабайы) түрге кеклтір.

Жоғарыдағы екі жазықтықтың қиылысуы арқылы берілген тұзудің кез келген нүктесін табу үшін z = 0 деп аламыз.Сонда:

$$\begin{cases} 2x + 3y - 16z - 7 = 0 \\ 3x + y - 17z = 0 \end{cases}; \quad y = -3x;$$

$$2x - 9x - 7 = 0;$$

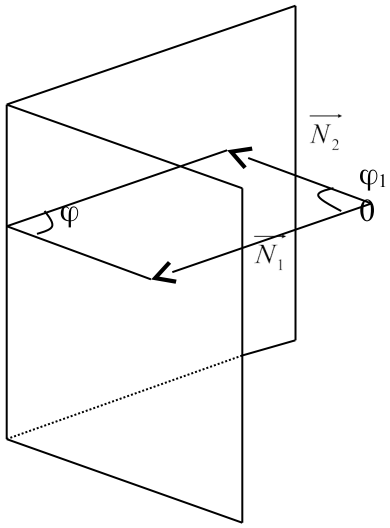
$$x = -1;\ y = 3;$$

Сонымен: A(-1; 3; 0).

Түзудің бағыттаушы векторы: $\vec{S} = \vec{n_1} \times \vec{n_2} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 3 & -16 \\ 3 & 1 & -17 \end{vmatrix} = -35\vec{i} - 14\vec{j} - 7\vec{k}$.

Сонымен: $\dfrac{x+1}{-35} = \dfrac{y-3}{-14} = \dfrac{z}{-7}$; $\quad \dfrac{x+1}{5} = \dfrac{y-3}{2} = \dfrac{z}{1}$;

Жазықтықтар арасындағы бұрыш



Кеңістіктегі екі жазықтық арасындағы φ бұрыш осы жазықтықтардың нормаль векторларының арасындағы φ_1 бұрышпен мынадай қатынаста болады: $\varphi = \varphi_1$ или $\varphi = 180^0 - \varphi_1$, яғни $\cos\varphi = \pm\cos\varphi_1$.

φ_1 бұрышын анықтайық. Жазықтықтар төмендегі теңдеулер арқылы берілсін:

$$\begin{cases} \vec{N_1} \cdot \vec{r} + D_1 = 0 \\ \vec{N_2} \cdot \vec{r} + D_2 = 0 \end{cases},$$ мұндағы

$\vec{N_1}$ (A_1, B_1, C_1), $\vec{N_2}$ (A_2, B_2, C_2). Нормаль векторлардың арасындағы бұрышты скаляр көбейтіндіден табамыз:

$$\cos\varphi_1 = \frac{\vec{N_1} \cdot \vec{N_2}}{|\vec{N_1}||\vec{N_2}|}.$$

Сонымен жазықтықтар арасындағы бұрыш төмендегі формула бойынша анықталады:

$$\boxed{\cos\varphi = \pm\frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}}$$

Косинустың таңбасын таңдау жазықтықтар арасындағы қандай бұрышты (сүйір немесе онымен іргелес доғал бұрышты) табатынымызға байланысты.

Жазықтықтардың параллельдік және перпендикулярлық шарттары

Жоғарыдағы шыққан формуланың негізінде жазықтықтардың арасындағы бұрышты табу үшін жазықтықтардың параллельдік және перпендикулярлық шарттарын табуға болады.

Жазықтықтар перпендикуляр болу үшін сол жазықтықтардың арасындағы бұрыштың косинусы нөлге тенң болуы қажетті және жеткілікті. Бұл шарт орындалу үшін төмендегі шарт орындалу керек.

$$\boxed{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0}$$

Жазықтықтар параллель болу үшін олардың нормаль векторлары коллинеар болуы керек, яғни $\overrightarrow{N_1} \,||\, \overrightarrow{N_2}$. Бұл шарт орындалу үшін төмендегі теңдік орындалу кернек: .

$$\boxed{\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}}$$

Кеңістіктегі түзулер арасындағыбұрыш

Айталық кеңістікте екі түзу өздерінің параметрлік теңдеулерімен берілсін:

$$l_1: \quad r = \overrightarrow{r_1} + \overrightarrow{S_1}t$$

$$l_2: \quad r = \overrightarrow{r_2} + \overrightarrow{S_2}t$$

$$r = (x, y, z); \quad \overrightarrow{r_1} = (x_1, y_1, z_1); \quad \overrightarrow{r_2} = (x_2, y_2, z_2); \quad \overrightarrow{S_1} = (m_1, n_1, p_1); \quad \overrightarrow{S_2} = (m_2, n_2, p_2).$$

Түзулер арасындағы φ бұрыш және олардың бағыттаушы векторлары арасындағы φ_1 бұрыш $\varphi = \varphi_1$ немесе $\varphi = 180^0 - \varphi_1$ қатысымен байланысты. Бағыттаушы векторлардың арасындағы бұрыш векторлардың скаляр көбейтіндісінен шығады, яғни:

$$\boxed{\cos\varphi = \pm\frac{\overrightarrow{S_1}\cdot\overrightarrow{S_2}}{\left|\overrightarrow{S_1}\right|\left|\overrightarrow{S_2}\right|} = \pm\frac{m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2}\sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}.}$$

d_1 және d_2 түзулер $\frac{x - x_1}{l_1} = \frac{y - y_1}{m_1} = \frac{z - z_1}{n_1}$, $\frac{x - x_2}{l_2} = \frac{y - y_2}{m_2} = \frac{z - z_2}{n_2}$ түрінде берілсе онда екі түзудің арасындағы бұрыш мына формуламен аниқталады $\cos\varphi = \frac{l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2} \times \sqrt{l_2^2 + m_2^2 + n_2^2}}$.

Кеңістікте түзулердің параллельдігі мен перпендикулярлық шарттары

Екі түзу параллель болу үшін олардың бағыттаушы векторлары коллинеар болуы қажетті және жеткілікті, яғни векторлардың сәйкес координаталары пропорционал.

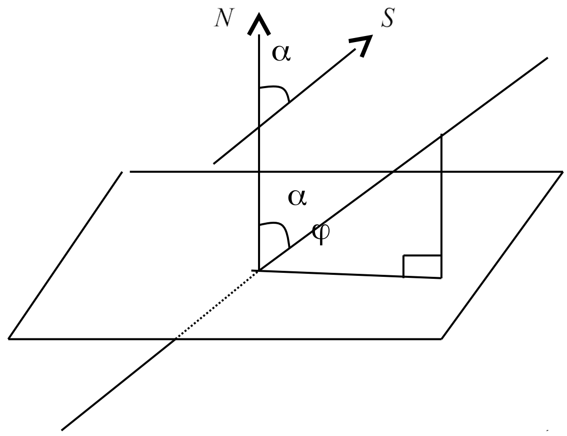
$$\boxed{\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}}$$

Екі түзу перпендикуляр болу үшін олардың бағыттаушы векторлары перпендикуляр болуы қажетті және жеткілікті, яғни олардың арасындағы бұрыштың косинусы нөлге тең.

$$m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2 = 0$$

Түзу мен жазықтық арасындағы бұрыш

<u>Анықтама.</u> Түзу мен жазықтық арасындағы бұрыш деп түзу мен оның жазықтықтағы проекциясының арасындағы кез келген бұрышты айтады.



Айталық жазықтық $N \cdot r + D = 0$ теңдеуімен, ал түзу - $r = \vec{r_0} + St$ теңдеуімен берілсін. Геометриялық кескіні бойынша (суретті қара.) ізделінді бұрыш $\alpha = 90^0 - \varphi$, мұндағы α - угол N и S векторлары арасындағы бұрыш. Бұл бұрыш төмендегі формула бойынша табылады:

$$\cos\alpha = \frac{N \cdot S}{|N||S|}$$

$$\sin\varphi = \pm\cos\alpha = \pm\frac{N \cdot S}{|N||S|}$$

Координаталық формада: $$\boxed{\sin\varphi = \pm\frac{Am + Bn + Cp}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}}$$

Кеңістікте түзу мен жазықтықтың параллельдік және перпендикулярлық шарттары

Түзу мен жазықтық параллель болу үшін жазықтықтың нормаль векторы мен түзудің бағыттайшы векторлары перпендикуляр болуы қажетті және жеткілікті. Ол үшін сол векторлардың скаляр көбейтіндісі нөлге тең болуы қажетті.

$$N \perp S, \quad N \cdot S = 0, \quad \sin\varphi = 0, \qquad Am + Bn + Cp = 0.$$

Түзу мен жазықтық перпендикуляр жазықтықтың нормаль векторы түзудің бағыттаушы векторы коллинеар болуы қажетті және жеткілікті. Бұл шарт орындалады, егер осы векторлардың скаляр көбейтіндісі нөлге тең болса.

$$\boxed{\vec{N} \times \vec{S} = 0; \qquad \frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p}}$$

Айналу беттері

<u>Анықтама.</u> Қандай да бір қисықтың қозғалмайтын *d* түзуін айналудан шыққан бет *d* осін **айналудан шыққан бет** деп аталады.

Егер тік бұрышты координат системасында беттің теңдеуі $F(x^2 + y^2, z) = 0$ түрінде берілсе, онда бет Oz осін айналудан шыққан бет болады.
Дәл сол сияқты: $F(x^2 + z^2, y) = 0$ – Оу осін айналудан шыққан бет,
$F(z^2 + y^2, x) = 0$ – Ох осін айналудан шыққан бет.

Дербес жағдайдағы айналу беттерінің теңдеулерін жазайық.

1) $\dfrac{x^2+y^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ - **айналу эллипсоиды**

2) $\dfrac{x^2+y^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$ - **бір қуысты айналу гиперболоиды**

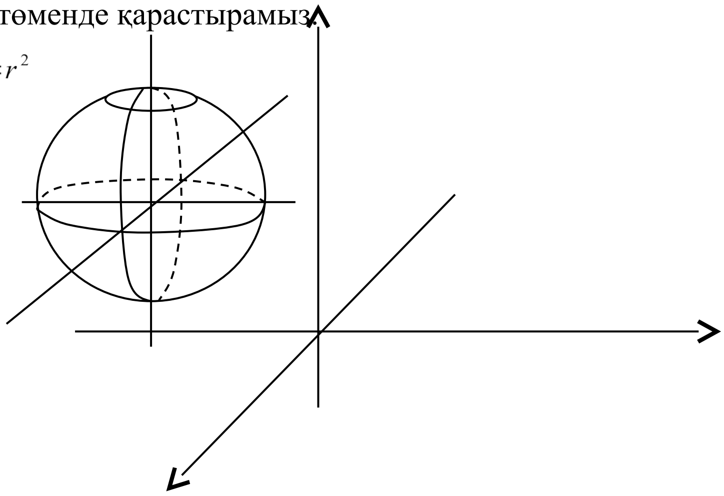
3) $\dfrac{x^2+y^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=-1$ - **екі қуысты айналу гиперболоиды**

4) $\dfrac{x^2+y^2}{p}=2z$ - **айналу параболоид**

Дәл осылайша жоғарыдағы айналу беттердің теңдеулерін айналу осьтері Ох немесе Оу болған жағдайда да жазуға болады

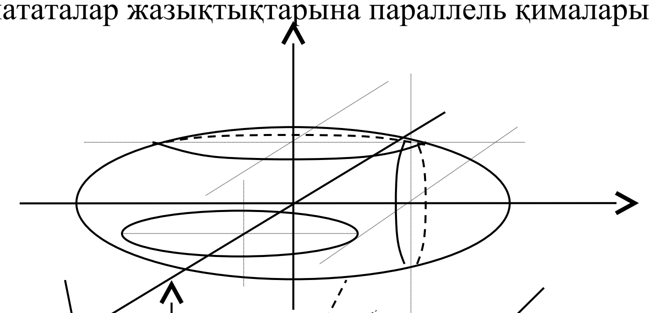
Алайда жоғарыдағы беттер жалпы жағдайдағы екінші ретті беттердің дербес жағдайы боп табылады. Олардың кейбіреулерін төменде қарастырамыз

Сфера: $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$

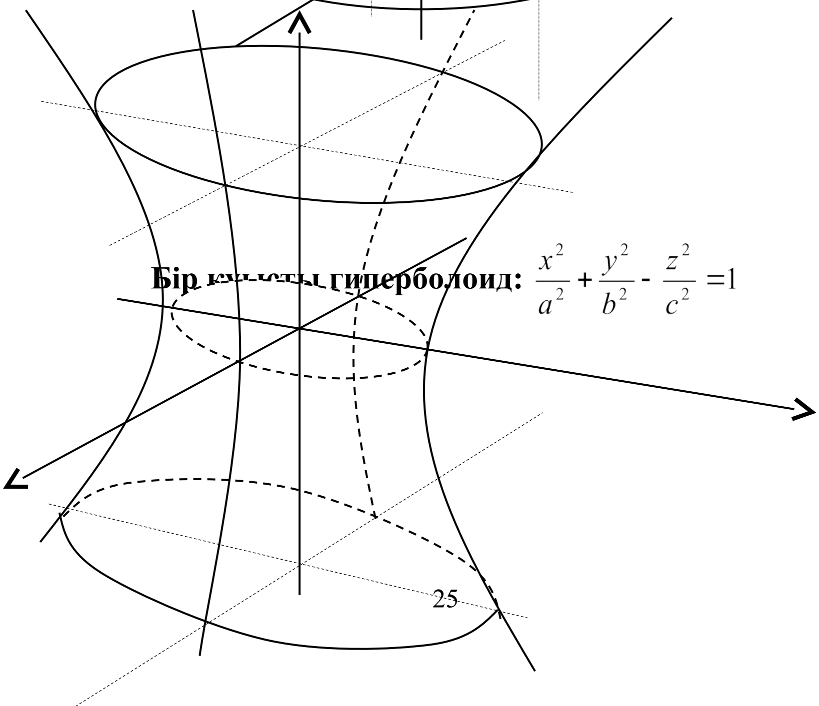


Үш осьті эллипсоид: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$

Эллипсоидтың координататалар жазықтықтарына параллель қималары эллипстер болады.

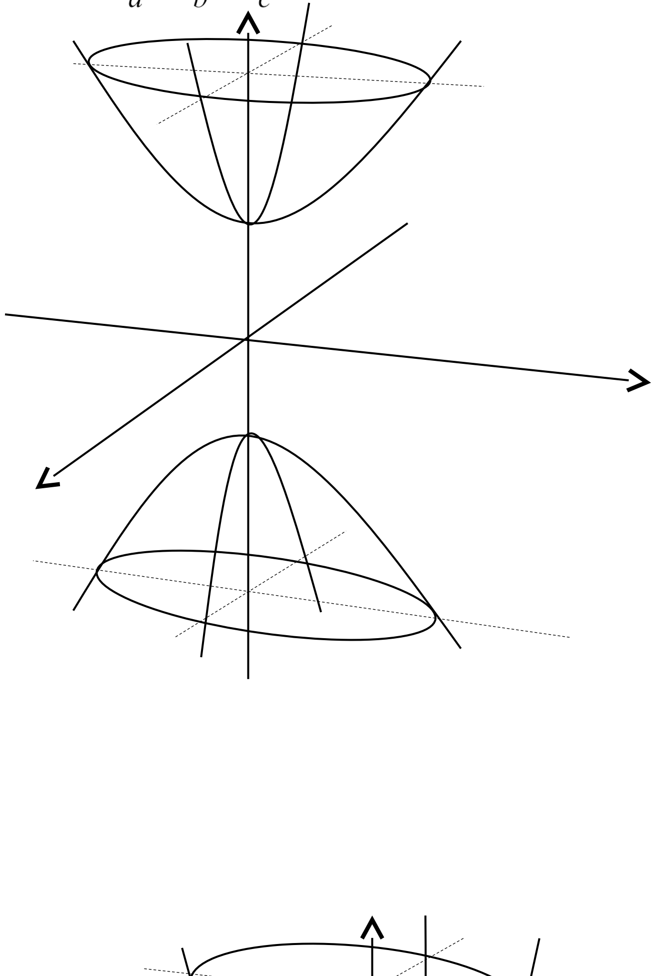


Бір қуысты гиперболоид: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$

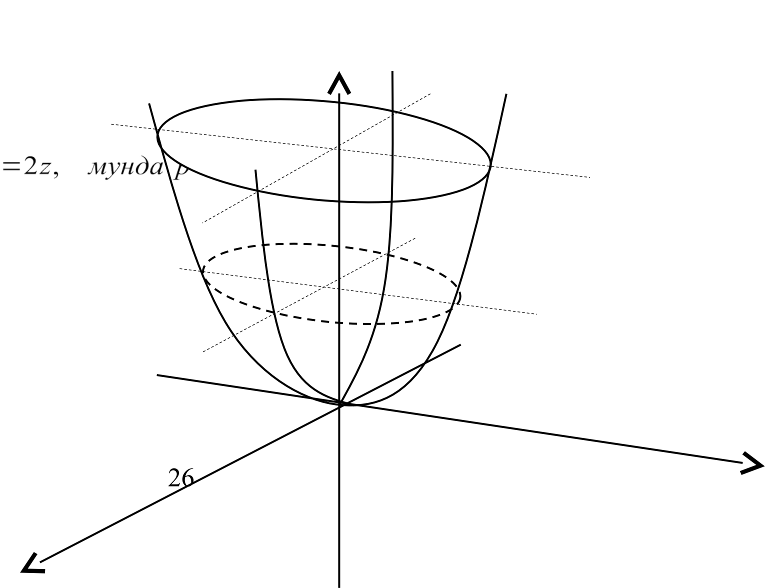


Екі куысты гиперболоид:

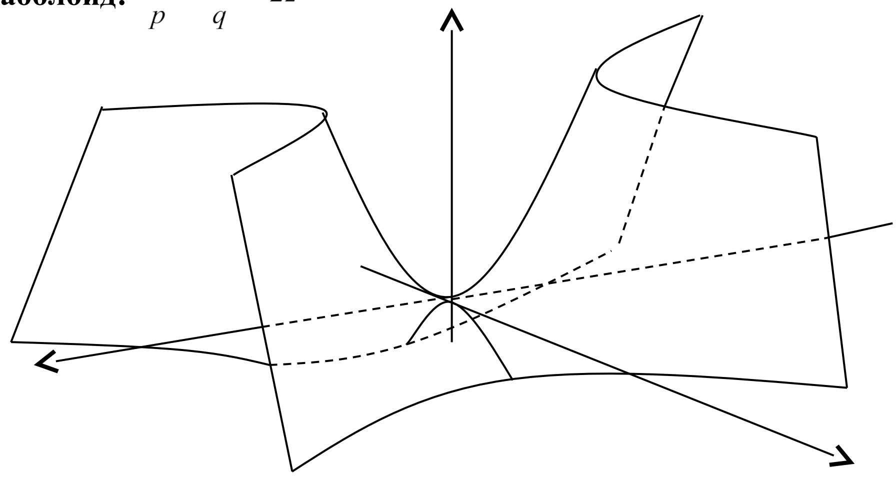
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$$



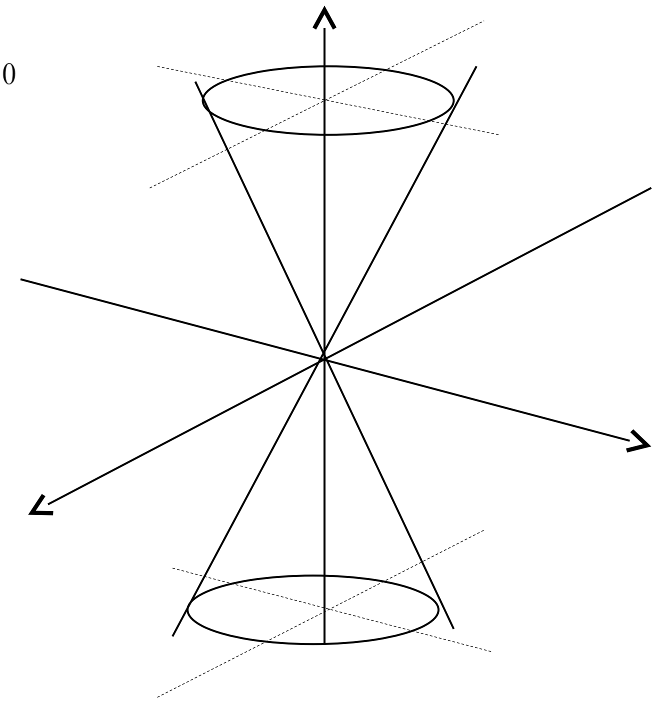
Эллипстік параболоид: $\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z, \quad \text{мунда } p$



Гиперболалық параболоид: $\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z$



Екінші ретті конус: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$



Цилиндрлік және сфералық координаталар системалары

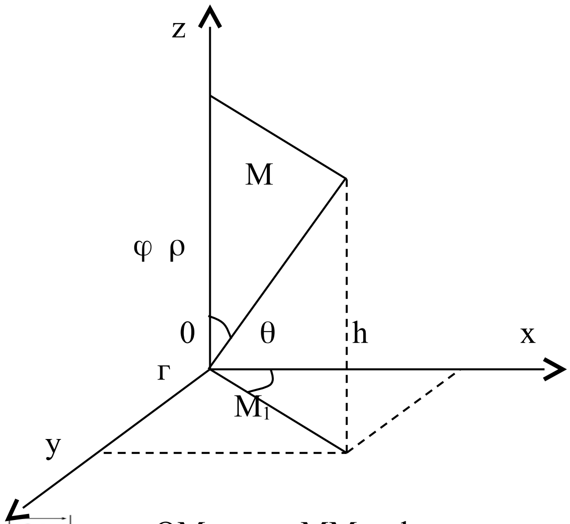
Жазықтықтағы сияқты кеңістікте де кезкелген нүктенің орны әртүрлі координат системасында үш координатасы арқылы анықталады. Цилиндрлік және сфералық координат системалары поляр координат системасының жалпыламасы боп табылады.

Кеңістікте О нүктені және сол нүктеден шығатын l сәулені және $n \perp l, \ |n| = 1$ векторын алайық. О нүкте арқылы n нормаль векторына перпендикуляр болатын жалғыз ғана жазықтық жүргізуге болады.

Цилиндрлік, сфералық және тік бұрышты декарт координат системаларының арасында сәйкестіктер енгізу үшін О нүктені тік бұрышты декарт координат системасының басымен беттестіреді, *l* сәуле – x осінің оң бағытымен, ал нормаль вектор *z* осінің бойымен кетеді.

Цилиндрлік және сфералық координат системалары қисықтың немесе беттің тік бұрышты декарт координат системасындағы теңдеулері барынша күрделі және мұндай теңдеулермен қиын операциялар жүргізу кезінде қолданылады.

Теңдеулерді цилиндрлік және сфералық системада көрсету есептеуледі барынша оңайлатады.



$|\overline{OM}| = \rho$; $OM_1 = r$; $MM_1 = h$;

Егер М нүктеден жазықтықта MM_1 перпендикулярын түсірсек, онда M_1 нүктенің жазықтықтағы полярлық координаталары (r, θ) болады.

Анықтама. М нүктесінің ц**илиндрлік координаталары** деп М нүктесінің кеңістіктегі орнын анықтайтын (r, θ, h) санын айтады.

Анықтама. М нүктесінің **сфералық координаталары** деп (r,φ,θ), санын айтады, мұндағы φ - ρ мен нормаль арасындағы бұрыш.

Цилиндрлік және тік бұрышты декарттық координаталар системаларының байланысы

Поляр координат системасы сияқты жазықтықта кеңістікте әртүрлі координат системасын байланыстыратын қатынастарды жазуға болады. Цилиндрлік және тік бұрышты декарт координат системасы үшін бұл қатынастар төмендегідей болады:

$$h = z; \quad x = r\cos\theta; \quad y = r\sin\theta; \quad \cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}; \quad \sin\theta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Сфералық координат системасының тік бұрышты декарттық системамен байланысы

Сфералық координат системасында қатынас мынадай түрде болады:

$$z = \rho\cos\varphi; \quad y = \rho\sin\theta\sin\varphi; \quad x = \rho\sin\varphi\cos\theta; \quad \rho = \sqrt{x^2+y^2+z^2};$$

$$\theta = arctg\frac{y}{x}; \quad \varphi = arctg\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}; \quad \cos\varphi = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}; \quad \sin\varphi = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}};$$

Екінші ретті беттер

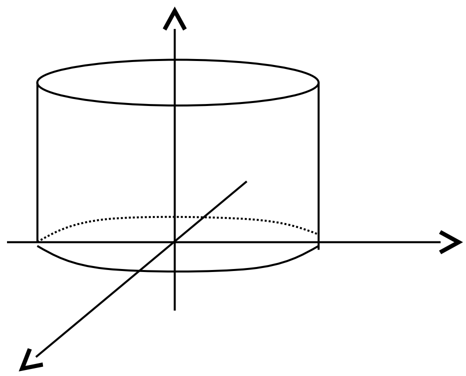
Анықтама. Екінші ретті беттер – бұл теңдеулері тік бұрышты координат системасында екінші ретті теңдеулер болатын беттер.

Цилиндрлі беттер

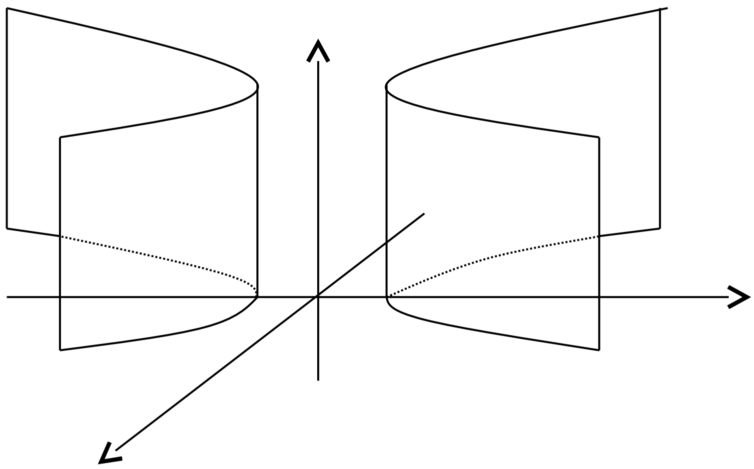
Анықтама. Цилиндрлік беттер деп қандай да бір анықталған түзуге параллель болатын сызықтардан пайда болған беттерді айтады.

Теңдеуінде құраушысы z болмайтын, яғни бағыттаушылары Oz осіне параллельи беттерді қарастырайық.Тип линии на плоскости XOY жазықтығындағы сызықтың типі (бұл сызық беттің бағыттаушысы деп аталады) цилиндрлік беттің ситпатын анықтайды. Бағыттаушысының теңдеуіне байланысты бірнеше дербес жағдайларды қарастырайық.

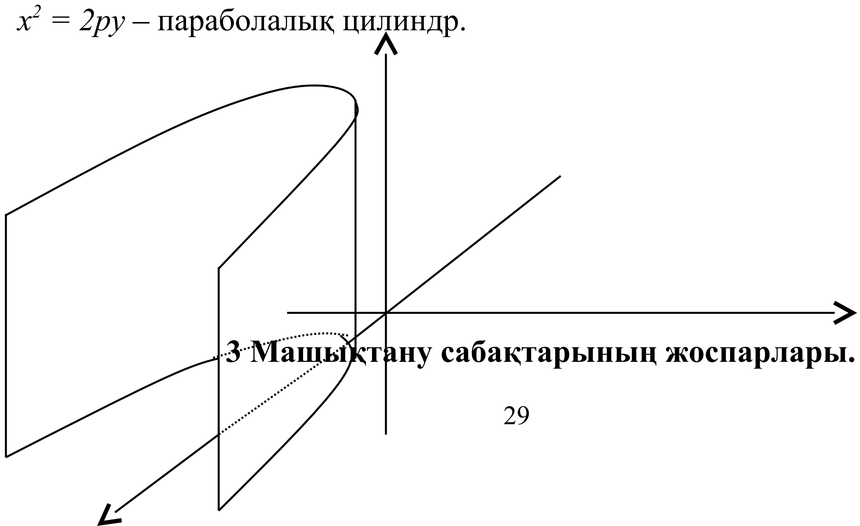
1) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$- эллипстік цилиндр.



2) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ - гиперболалық цилиндр.



2) $x^2 = 2py$ – параболалық цилиндр.



3 Машықтану сабақтарының жоспарлары.

1-сабақ.
Екінші және үшінші ретті анықтауыштар және олардың қасиеттері. Матрицалар. Оларға қолданылатын амалдар. Матрицаның рангі.
Әдебиеті: [9], [10], [13].

2-сабақ. Векторлар. Векторларға қолданылатын сызықтық амалдар. Векторлардың сызықтық тәуелділігі.Ортонормирлі базис.
Әдебиеті: [9], [10] , [13].

3-сабақ. Векторлардың скаляр, векторлық, аралас көбейтінділері, қасиеттері. Векторлық алгбраны есептер шешуде қолдану.
Әдебиеті: [9], [10] , [13].

4-сабақ. Жазықтықтағы аффиндік және тік бұрышты координаталар жүйесі. Түзудегі, жазықтықтағы және кеңістіктегі тік бұрышты координаталар жүйесі. Кесіндіні берілген қатынаста бөлу.
Әдебиеті: [9], [10] , [13].

5-сабақ. Түзудің жалпы теңдеуі және оны зерттеу. Квадрат үшмүшенің геометриялық мағынасы.
Әдебиеті: [9], [10].

6-сабақ. Екі түзудің өзара орналасуы, түзулер шоғы. Нүктеден түзуге дейінгі қашықтық. Түзулер арасындағы бұрыш. Мысалдар. Түзулердің параллельдік және перпендикулярлық шарттары.
Әдебиеті: [9], [10] , [13].

7-сабақ. Эллипс, гипербола, парабола, анықтама- лары, канондық теңдеулері және олардың қасиеттері.
Әдебиеті: [9], [10] , [13].

8-сабақ. Екінші ретті сызықтың жалпы теңдеуі. Екінші ретті сызықтардың асимптоталары, жанамалары, нормальдар, қиюшылар, олардың теңдеулері.
Әдебиеті: [9], [10] , [13].

9-сабақ. Екінші ретті сызықтың жалпы теңдеуін канондық түрге келтіру. Екінші ретті сызықтың классификациясы.
Әдебиеті: [9], [10] , [13].

10-сабақ. Кеңістіктегі түзу. Түзудің E_3 кеңістігінде берілу тәсілдері.
Әдебиеті: [9], [10] , [13].

11-сабақ. Кеңістіктегі түзулер мен жазықтықтарға берілген негізгі есептер.
Әдебиеті: [9], [10] , [13].

12-сабақ. Есептердің негізгі типтері. Геометриялық түрлендірулерді мектептің геометрия курсындағы (қозғалысқа, гомотетияға және ұқсастыққа берілген) есептерін шешуде қолдану.
Әдебиеті: [9], [10] , [13].

13-сабақ. Проективтік түрлендіру, проективтік координаталар, меншікті, меншіксіз нүктелер. Кеңейтілген түзу мен жазықтық..
Әдебиеті: [9], [10], [15], [16], [17], [18].

14-сабақ. Төрт нүктенің күрделі қатынасы, гармониялық төрттік. Кеңейтілген евклид түзуі мен жазықтығындағы проективтік координаталар жүйесі.
Әдебиеті: [16], [18].
15-сабақ. Толық төрттөбелік, гармониялық төртінші нүктені салу. Есептер шығару.
Әдебиеті: [9], [10] , [15], [16], [17], [18].

1-Тақырып. Сызықтық және векторлық алгебра. Аналитикалық геометрия.

№1-2. Машықтану сабағы.
1. 2-ші, 3-ші және n –ші ретті анықтауыштарды епестеу.
Тапсырмалар.

1. $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 0 \end{vmatrix}$ 2. $\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 5 & 10 \end{vmatrix}$

3. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$ 4. $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

5. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 5 & 0 & -1 \end{vmatrix}$ 6. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \end{vmatrix}$

7. . $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 3 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 4 \end{vmatrix}$ 8. . $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & -2 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$

9 . $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ -4 & 2 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 5 & 1 \end{vmatrix}$: 10. $\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \end{vmatrix}$

11. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$ 12. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$

13. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ 14. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 5 & 0 & -1 \end{vmatrix}$

№3-4. Машықтану сабағы.
1. Крамер формуласымен сызықтық теңдеулер жүйесін шешу.
Тапсырмалар.

1. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 1 \\ 3x_1 + 5x_2 = 4 \end{cases}$ 2. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 = 4 \\ 2x_1 + 4x_2 = 1 \end{cases}$

3. $\begin{cases} x - 3y = 2 \\ 2x - 6y = 4 \end{cases}$ 4. $\begin{cases} 3x - 6y = -3 \\ 2x + 3y = 5 \end{cases}$

5. $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 6 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 7 \\ -3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 2 \end{cases}$ 6. $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 9 \\ -x_1 + x_2 + 4x_3 = 4 \end{cases}$

7. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = -5 \\ -4x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 8 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -10 \end{cases}$ 8. $\begin{cases} 4x_1 - x_2 - x_3 = 13 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -8 \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 12 \end{cases}$

9. $\begin{cases} 4x_1 + x_2 + 3x_3 = -5 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 4 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = -9 \end{cases}$

10. $\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 - x_3 = -8 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ 4x_1 - x_2 + x_3 = 12 \end{cases}$

11. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 9 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 9 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 8 \end{cases}$

12. $\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + x_3 = 9 \\ 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 10 \\ -3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = -21 \end{cases}$

№5-6. Машықтану сабағы.

1. Матрицаға амалдар қолдану.
2. Кері матрица табу.

Тапсырмалар.

1. $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ және $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$. 2A+5B-? 2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ және $B = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 5 & 10 \end{pmatrix}$. 3A-B -?

3. $\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 9 & -6 \end{pmatrix}$-? 4. $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ және $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, AB-?

5. $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ және $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, BA-? 6. A=(2; -3), B= $\begin{pmatrix} -4 \\ 5 \end{pmatrix}$ AB-?

7. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ $\det\{A \cdot B\}$,-?

8. $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ $\det\{A \cdot B\}$,-?

9. $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ $\det\{A \cdot B\}$,-?

10. $\det\{A + B\} = 0$, $A = \begin{pmatrix} x & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -3 & 0 & x-2 \\ 2 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ $\det\{A + B\} = 0$ теңдеуін шеш.

11. $\left| \begin{pmatrix} x & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 1-2x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ x & x \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \right| = -24$, $|A \cdot B| = \det\{A \cdot B\}$. теңдеуін шеш.

12. A^{-1} кері матрицасын тап. а) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$, б) $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 4 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$,

с) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, д) $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, г) $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 4 & -2 & 1 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$,

№7-8. Машықтану сабағы.

Жүйені матрицалық жолмен шешу.

Матрицаның рангісін табу.

Тапсырмалар.

Теңдеулер жүйесін матицалық жолмен шеш.

1) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 9 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 9 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 8 \end{cases}$

2) $\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + x_3 = 9 \\ 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 10 \\ -3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = -21 \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 9 \\ 3x_1 - 5x_2 + x_3 = -4 \\ 4x_1 - 7x_2 + x_3 = 5 \end{cases}$

4) $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_3 = 2 \\ 2x_1 + x_3 = -1 \end{cases}$

Матрица рангісін тап.

5) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -4 & -2 & 3 \\ -2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ 6) $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \\ 10 & -1 & 7 \end{pmatrix}$

7) $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ 8) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

9) $A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 5 \\ 2 & -2 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ 10) $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 4 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

№9. Машықтану сабағы.

Векторлар және оларға амалдар қолдану.

Тапсырмалар.

1) $a = \{1;2;2\}$ векторының ұзындығын тап.
2) $A(2;-1;3)$ және $B(4;-2;3)$. $\overrightarrow{AB}$-?
3) $A(1;2;3)$ және $B(4;5;6)$, $|AB|$ векторының ұзындығын тап.
4) $\bar{a} = (10;10;12)$ және $\bar{b} = (-5;2;7)$, $\bar{a} + \bar{b}$-?
5) $\bar{a}$ (4;2;-7) и және $\bar{b}(-3;2;7)$, $\bar{a} - \bar{b}$-?
6) $\bar{a} = (1;2;-1)$ және $\bar{b}(-2;1;0)$, 2a+3b-?
7) $\bar{a} = (-2;1;2)$, $\bar{a}$-бірлін векторын тап.
8) $\bar{a} = (-6;2;-3)$, $\bar{a}$ -бірлік векторын тап.
9) $\bar{a} = \{3;-5;8\}$, $\bar{b} = \{-1;1;-4\}$, $|\bar{a} + \bar{b}|$-?
10) $\bar{a} = \{3;-5;8\}$ және $\bar{b} = \{-1;1;4\}$, $|\bar{a} - \bar{b}|$-?
11) $a = -i + 4j + \beta k$ және $b = \alpha i - 3j + 2k$ α және β векторылары қандай мәнде коллинеарлы.
12) $a = \{3;-1\}$, $b = \{1;-2\}$ и $c = \{-1;7\}$. $p = a + b + c$ векторының a, b базис бойынша жіктелуін тап..
13) A(1,-1,2), B(5,-6,2), C(1,3,-1) ABC үшбұрыштың B төбесінен AC қабырғасына түсірілген биіктікті тап.

№10. Машықтану сабағы.

1. Векторлардың скаляр, векторлық және аралас көбейтіндісі.

Тапсырмалар.

1) $\bar{a} = \{3;4;-7\}$ және $\bar{b} = \{2;-5;-2\}$, $(\bar{a}, \bar{в})$-?
2) $\bar{a} = \{2;0;3\}$ $\bar{b} = \{-1;3;4\}$, $(\bar{a}, \bar{в})$-?
3) $|\bar{a}| = 3$ и $|\bar{b}| = 4$, екі вектор арасындағы бұрыш $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$, $(\bar{a}, \bar{b})$-?
4) $\bar{a} = \{1;2;3\}$ $\bar{b} = \{6;4;-2\}$ екі вектор арасындағы бұрыштың косинусын тап.
5) $(\bar{a}, \bar{b}) = 2$, $|\bar{a}| = \sqrt{2}$, $|\bar{b}| = 2$ екі вектор арасындағы бұрыш тап.
6) $\bar{a} = \{1;2;1\}$ және $\bar{b} = \{3;-1;-2\}$, [a,b]-?
7) $\bar{a} = \{3;-1;-2\}$ және $\bar{b} = \{1;2;-1\}$ векторларынан құрылған параллелограмның ауданын тап.
8) $\bar{a} = \{1;2;2\}$ және $b = \{3;0;4\}$ векторларынан құрылған үшбұрыштың ауданын тап.
9) $\bar{a} = \{-2;2;1\}$, $\bar{b} = \{3;-2;5\}$ және $\bar{c} = \{1;-1;3\}$, $\bar{a}\bar{b}\bar{c}$-?
$\bar{a} = \{1;-1;3$, $b = \{-2;2;1\}$ және $\bar{c} = \{3;-2;5\}$, $\bar{a}\bar{b}\bar{c}$-?
10) $|a| = 13$; $|b| = 19$; $|a + b| = 24$. $|a - b|$ есепте
11) ABC үшбұрыш: A(3, 2, -3); B(5, 1, -1); C(1, -2, 1). Ішкі A бұрышын тап.

12) x_D-? егер A(1,2,-1), B(0,1,5), C(-1,2,1), D(x,1,3) бір жазықтықта жатса.
13) A(1,2,1), B(3,4,2), C(-1,3,3), D(0,0,5) тетраэдрдің көлемін тап.

№11. Машықтану сабағы.
1. Кеңістіктегі жазықтықтың теңдеуі.
Тапсырмалар.

1) $M_1(3;-1;2)$, $M_2(4;-1;-1)$ және $M_3(2;0;2)$ нүктелері арқылы өтетін жазықтық теңдеуін табыңдар
2) $2x+3y-6z+21=0$ жазықтығының теңдеуін нормаль түрге келтіріңдер
3) $M_1(1;2;-3)$ нүктесінің $5x-3y+z+4=0$ жазықтығын арақашықтығын табыңдар
4) $2x-3y+z-3+\lambda(x+3y+2z+1)=0$ жазықтықтар шоғырынан
5) $M_1(1;-2;3)$ нүктесі арқылы өтетін жазықтық теңдеуін табыңдар
6)$3x-3y+z-2+\lambda(x+3y+2z-2)=0$ жазықтықтар шоғырынан 7) $M_1(1;0;0)$ нүктесі арқылы өтетін жазықтық теңдеуін табыңдар
8)A(2;0;1) нүктесі арқылы өтетін және $\{2;-3;1\}$ векторына перпендикуляр болатын жазықтықтың теңдеуін құрыңдар
9) A(2;0;1) нүктесі арқылы өтетін және $3x+y-z+4=0$ жазықтығына параллел болатын жазықтықтың теңдеуін табыңдар
10) A(2;0;1) нүктесі арқылы өтетін және координат осінен бірдей кесінділер қиятын жазықтықтың теңдеуін құрыңдар
11) A(1;-2;0) нүктесінен $6x-2y+3z-12=0$ жазықтығына түсірілген перпендикулярдың ұзындығын табыңдар
12) $2x-y+z-9=0$ жазықтығының нормаль векторының координаталарын анықтаңдар
13) $3x-4y-24z+12=0$ жазықтығының oz осімен қиатын кесіндісін табыңдар
14) $\bar{a}=i-2j+k$ векторы $x+y+2z-3=0$ жазықтығымен қандай бұрыш жасайды
15) A(3;-2;1) нүктесі арқылы өтетін, $\bar{a}=\{3;-2;1\}$ векторына параллел түзудің дағдылы теңдеуін жазыңдар
16) A(2;-1;3) нүктесі арқылы өтетін, $3x-y+2=0$ жазықтығына перпендикуляр түзудің параметірлік теңдеуін құрыңдар.

№12. Машықтану сабағы.
1. Кеңістіктегі жазықтықтың теңдеуі.
Тапсырмалар.
1) Әрбір нүктесі $x=-2$ түзуінен және $(3;-4)$ нүктесінен бірдей қашықтықта болатын жазықтықтағы сызықтың теңдеуін жаз.
2) Координаттың бас нүктесінен $P(4;-7;-4)$ нүктесіне түсірілген түзу осы нүкте арқылы өтетін жазықтыққа перпендикуляр болатын жазықтықтың теңдеуін жазыңдар
3) $M_1(3;-1;2)$ және $M_2(4;-2;-1)$ нүктелері берілген. M_1 нүктесінен өтетін және $\overrightarrow{M_1M_2}$ векторына перпендикуляр болатын жазықтықтың теңдеуін құр.
4) $\overrightarrow{a_1}=\{3;1;-1\}$, $\overrightarrow{a_2}=\{1;-2;1\}$ векторларына параллель және $M_1(3;4;-5)$ нүктеден өтетін жазықтықтың теңдеуін құр.
5) $\vec{a}=\{3,-1,4\}$ векторына параллель және $M_1(2;-1;3)$, $M_2(3;1;2)$ нүктелерден өтетін жазықтықтың теңдеуін құр.
6) $M_1(3;-1;2)$, $M_2(4;-1;-1)$, $M_3(2;0;2)$нүктелерден өтетін жазықтықтың теңедеуін құр.
7) $2x-3z+5=0$ жазықтыққа параллель және $M_1(3;-2;-7)$ нүктесінен өтетін жазықтықтың теңдеуін құр.
8) $2x-y+3z-1=0$, $x+2y+z=0$ жазықтықтарына перпендикуляр және координат бас нүктеден өтетін жазықтықтың теңдеуін жаз.

9) $x-2y+3z-5=0$ жазықтығына перпендикуляр және $M_1(1;-1;-2)$, $M_2(3;1;1)$ нүктелерден өтетін жазықтықтың теңдеуін жаз .
10) Оx осіне параллель және $M_1(7;2;-3)$, $M_2(5;6;-4)$нүктелерден өтетін жазықтықтың теңдеуін жаз.
11) ох және *оу* остерінде *а=3, b*=–2 кесінділерді қиып өтетін және $\vec{l}=\{2;1;-1\}$ векторына параллель болатын жазықтықтың теңдеуін құр.
12) $M_1(1;-1;1)$, $M_2(-2;1;3)$ және $M_3(4;-5;-2)$ нүктелерінен өтетін жазықтық пен 13) $P(-1;1;-2)$ нүктесіне дейінгі *d* арақашықтықты есепте.
14) $x-2y+z+5=0$ жазықтығына перпендикуляр және $3x-2y+z-3=0$, $x-2z=0$ жазықтықтарының қилысу түзуі арқылы өтетін жазықтық теңдеуін құр .
15) $2x-y+3z-5=0$, $x+2y-z+2=0$ жазықтықтарының қилысу түзуі арқылы өтетін және $\vec{l}=\{2;-1;-2\}$ векторына параллель болатын жазықтықтың теңдеуін құр .

№13. Машықтану сабағы.
1. Кеңістіктегі түзудің теңдеуі.
Тапсырмалар.
1) $n=\{3;-2\}$ векторына перпендикуляр және $M_0(1;1)$ нүктесінен өтетін түзудің теңдеуін жаз.
2) $b=-2$ кесіндіні оу осінде ал $a=3$ кесіндіні ох осінде қиып өтетін түзудің теңдеуін жаз.
3) $x-y+1=0$ және $x-3=0$түзулер арасындағы бұрышты тап
4) $A(3;2)$, $B(5;5)$, $C(0;3)$ нүктелерде төбелері болатын АВС үшбұрышының А нүктесінен жүргізілген медиананың теңдеуін жаз.
5) $x+y-3=0$түзудің теңдеуін нормаль түрге келтір
6) $7x-5y+3=0$ және $7x-5y-2=0$параллель түзулер арасындағы арақашықтықты тап.
7) $A(5;2)$нүктеден $3x-4y+4=0$түзуге дейінгі арақашықтықты тап
8) АВС үшбұрыштың ВС қабырғасына параллель орта сызықтың теңдеуін жаз , егер $A(2;2)$, $B(5;5)$, $C(6;2)$
9) $3x-4y+1=0$ және $x+2y+7=0$түзулерінің қиылысу нүктесін тап
10) $k=-\frac{1}{3}$ бұрыштық коэффициенті бар және *оу* осінде $b=\frac{2}{3}$кесінді мен қиып өтетін түзудің теңдеуін жаз.
11) $2y-3=0$түзудің *k* бұрыштық коэффициентін анықта
12) $x-2y+1=0$ түзуіне параллель және $A(3;-1)$нүктеден өтетін түзудің теңдеуін жаз
13) $x-2y+1=0$түзуіне перпендикуляр және $A(3;-1)$нүктеден өтетін түзудің теңдеуін жаз
14) k-ның қай мәнінде $(k-2)x+(k+4)y+3k^2-8k+5=0$түзуі координат бас нүктеден өтеді
15) Абсцисс осіндегі нүкте мен $8x+15y+1=0$тузудің арасындағы арақашықтық 1 тең болатын нүктенің координатын тап

№14. Машықтану сабағы.
1. Кеңістіктегі түзудің теңдеуі.
Тапсырмалар.

1) $A(2;-1)$нүктесі мен координат бас нүктесінен өтетін түзудің теңдеуін құр
2) $A(1;-2;0)$ нүктесінен $6x-2y+3z-17=0$ жазықтығына түскен перпендикуляр ұзындығын тап
3) $A(1;-1)$, $B(-2;3)$, $C(4;2)$ нүктелерде төбелері бар үшбұрыштың А нүктеден өтетін медиананың теңдеуін жаз.
4) Төбелері $A(2;-1)$, $B(4;-9)$, $C(-1;3)$ болатын АВС ұшбұрыштың С бұрышының биссектрисасының теңдеуін жаз.

5) Төбелері $A(1;\,6)$, $B(3;\,12)$ және АС қабырғасы $2x - y + 3 = 0$ түзуіне параллель болатын АВС ұшбұрыштың АС қабырғасына параллель орта сызықтың теңдеуін жаз.
6) АВС ұшбұрыштың төбелері $A(4;\,1)$, $B(1;\,0)$ нүктелерінде және В төбесінен шығатын биссектриса теңдеуі $x - y - 1 = 0$ берілген. ВС қабырғаның теңдеуін жаз.
7) $M_0(1;1)$ нүктесі арқылы өтетін және $n = \{3; -2\}$ векторына перпендикуляр болатын түзудің теңдеуін жазыңдар
8) ох осінен $a = 3$, ал oy осінен $b = -2$-ге тең кеінді кесетін түзудің теңдеуін жазыңдар
9) $x - y + 1 = 0$ және $x - 3 = 0$ түзулерінің арасындағы бұрышты табыңдар.
10) Төбелері $A(3;2)$, $B(5;5)$, $C(0;3)$ нүктелерінде жатқан АВС үшбұрышының А төбесінен жүргізілген медианасының теңдеуін табыңдар
11) нүктесінің $3x - 4y + 4 = 0$ түзуінен арақашықтығын табыңдар
12) $y = k_1x + b_1$ және $y = k_2x + b_2$ түзулерінің арасындағы бұрыштың тангенісін табыңдар
13) Төбелері $A(2;2)$, $B(5;5)$, $C(6;2)$ нүктелерінде жатқан АВС үшбұрышының ВС қабырғасына параллель орта сызығының теңдеуін табыңдар

5 СОӨЖ (СРСП) орындау мен тапсыру графигі

№	Тақырып	Тапс. мақс. мен мазмұны	Әдеб.№, беті	балл	Орынд. мерзімі	Тексеру формасы (үлгісі)
1.	Нұсқама кеңес	Силлабуспен және СОӨЖ бен СӨЖ орындау мен тап-сыру графигімен таныстыру		1		
2.	Түзудегі, жазықтық-тағы және кеңістік-тегі тік бұрышты координаталар жүйе-сі. Векторлар, оларға қолданылатын амал-дар бойынша кеңес.	Осы тақырыпты орындау және соған байланысты есептер шығару.	[1], [2], [3], [4], [5], [6]	2	2-апта	Ауызша
3.	«Векторларға қолданылатын. амалдар» тақырыбына кеңес:	Векторлардың скаляр, векторлық, аралас көбейтінділері, қасиеттері. Векторлық алгебраны есептер шешуде қолдану.	[1], [2], [3], [4], [5], [6]	3	2-апта	Ауызша
4.	Векторлық алгебраны есептер шешуде қолдану	Тақырып бойынша 10 есепті талдап, шығару жолдарын көрсету.	[1], [2], [3], [4], [5], [6]	4	2-апта	Ауызша, реферат
5.	Жазықтықтағы түзулер	Түзулердің берілу тәсілдері.Осы тәсіл-дердің әрқайсысына ең болмағанда бір	[1], [2], [3], [4], [5], [6]	4	3-апта	Ауызша реферат

		есептен шығару.				
6.	Жазықтықтың берілу тәсілдері.	Осы тақырып бойынша әр тәсілге бірден есептер келтіру. Екі жаз. өзара орналасуын талдау.	[2], [3], [4], [5], [6]	4	3-апта	Ауызша, реферат
7.	Кеңістіктегі түзулер. Екі түзудің өзара орналасуы.	Екі түзудің өзара орналасуына есептер шығару; Екі түзу арасындағы бұрышты анықтап, мысалдар келтіру.	[1], [2], [3], [4], [5], [6]	5	4-апта	Ауызша
8.	Түзу мен жазықтық арасындағы бұрыш. Түзу мен жаз. өзара орналасуы.	Осы тақырыптар бойынша 10 шақты есептер шығару.	[1], [2], [3], [4], [5], [6]	5	4-апта	Реферат
9.	Поляр координат системасы, оның тік бұр. Декарт коорд. сист. байланысы.Конустық қима.	Осы тақырыптарды оқып, конустық қималардың ПКС-ғы теңдеулерін құруға есептер шығару (10 есеп).	[1], [4], [5], [6]	5	5-апта	конспект
10.	«Эллипс, гипербола, парабола, олардың қасиеттері» тақырыбына есептер шығару	10-15 шақты есептер шығару	[1], [4], [5], [6]	5	5-апта	конспект
11.	Асимптоталар.Жанама-лар, нормальдар, қиюшылар, олардың теңдеулері. Екінші ретті сызықтардың фокустары және директрисалары.	Есептер шығару	[1], [3], [4].	3	6-апта	Ауызша сұрау
12.	Жазықтықты бейнелеу және түрлендіру, түрлендірулер топтары. Қозғалыстың аналитикалық түрде өрнектелуі,қасиеттері. Қозғалыстың классификациясы. Ұқсас түрлендіру, гомотетия, олардың қасиеттері.	Осы тақырыпты оқып конспектілеу.	[1], [3], [4].	3	6-апта	Ауызша тексеру
13.	Геометриялық түрлендірулерді	Мектепке арналған			7-апта	Реферат

	мектептің геометрия курсының есептерін шешуде қолдану.	геометрия оқулықта- рынан есептер шы- ғару	[1], [3], [4].	5		
14.	Эллипсоид, гиперболоидтар, параболоидтар.	Тақырыпты талдап, есептер шығару	[1], [3], [4].		7-апта	Ауызша тексеру
15.	Екінші ретті беттер, олардың теңдеулерін канондық түрге келтіру.	Есептер шығару	[1], [3], [4].	4	8-апта	Жазбаша жұмыс
16.	1-ші межелік бақылау	Жаттығулар орындау	[1], [3], [4].		8-апта	
17.	Кеңейтілген евклид түзуі. Проективтік түзу.Түзу бойындағы нүктелердің реті.	Тақырыпты талдау	[11], [12], [14],	3	9-апта	Ауызша тексеру
18.	Төрт нүктенің күрделі қатынасы	Есептер шығару	[11], [12], [14],	5	9-апта	Рефератын тексеру
19.	Жазықтықтағы проективтік коорд. Системасы. Нүктенің пр. коорд. табу.	Есеп шығару.	[12],	5	10-апта	Жазбаша жұмыс
20.	ПКС-да түзудің теңдеулерін табу.	Есеп шығару.	[12]	5	10-апта	Жазбаша жұмыс
21.	Кеңейтіл.евкл. жаз-ғы біртектес аффиндік коорд-лар.	Тақырыпты талдап есетер шығару	[12]	4	11-апта	Консп.тексеру
22.	Қосақтылық (ауысымдылық) принципі.Дезарг теоремасы	Тақырыпты оқып, есептер шығару	[11], [12], [14]	5	11-апта	Ауызша тексеру
23.	Төрт нұктенің күрделі қатынасы	Есеп шығару	[11], [12], [14]	5	12-апта	Дэптер бонынша тексеру
24.	Төрт түзудің күрделі қатынасы	Есеп шығару	[11], [12], [14]	5	12-апта	Дэптер бонынша тексеру
25.	Толық төрттөбелік	Есеп шығару	[11], [12], [14]	5	13-апта	Ауызша тексеру
26.	Толық төрттөбелік. Гармониялық төртінші нүктені салу	Есеп шығару	11], [12], [14]	5	14-апта	АУЫЗША ТЕКСЕРУ
33.	2-ші межелік бақылау	Есептер шығару			14-апта	
34	Қорытынды межелік бақылау	Есептер шығару			15-апта	
35.	Қорытынды межелік бақылау	Есептер шығару			15-апта	

СӨЖ (СРС) орындау мен тапсыру графигі

№	Тақырып	Тапсырманың мақсаты мен мазмұны	Әдеб. № және беті	Балл	Орындау мерзімі	Бақылауды формасы (түрі)
1.	Кесіндіні берілген қатынаста бөлу. Вектор. Векторларға қолданылатын сызықтық амалдар.Векторлардың сызықтық тәуелділігі. Ортонормирлі базис.	Осы тақырып бойынша есептер шығару.	[10]. №1-10; [22], №552-554.	3	2-апта	Дәптер серу
2.	Векторлардың скаляр, векторлық, аралас көбейтінділері, қасиет-тері. Векторлық алгеб-раны есептер шешуде қолдану.	Векторларға қолданылатын амалдарға есептер шығару	[10]. №48-55; 63-70	3	2-апта	Орындаған жұмыстарын қорғау
3.	Жазықтықтағы координаталар жүйесі	Есептер шығару	[10].№106-110; 125-128.	4	3-апта	Ауызша қорғау, консектілері тексеру
4.	Жазықтықтағы тү-зулер, олардың бері лу тәсілдері. Түзу- дің нор- маль теңдеуі.Түзудің жалпы теңдеуі және оны зерттеу. Квад- рат үшмүшенің геометриялық мағы насы.	Түзулердің әртүрлі бері-лу тәсілде-ріне есептер шығару	[10]. №141-151	5	3-апта	Конспектіле тексеру
5.	Кеңістіктегі координаталар әдісі.	Осы тақы- рып бойын- ша әр тәсілге бірден есеп- тер келті-ру. Екі жаз. өза- ра орнала -суын талдау.	[10]. №672-675.	4	4-апта	Ауызша тексеру
6.	Векторлардың векторлық, аралас көбейтінділері, қасиет-тері.	Осы тақы- рып бойын ша әр тәсілге бірден есептер кел-тіру. Екі жаз. өзара орнала-суын талдау.	[10].№700-710.	5	4-апта	Ауызша тексеру
7.	Векторлардың аралас көбейтінділері, қасиет-тері.	Тақырыпты оқып, есеп- тер шығару .	[10].№718,730,732,733	5	5-апта	Ауызша қорғау
8.	Жазықтықтың берілу тәсілдері.		[10].№736-744; 754-756	5	5-апта	

9.	Кеңістіктегі түзулер. Екі түзудің өзара орналасуы.	Екі түзудің өзара орнала-суына есеп-тер шығару; Екі түзу ара-сындағы бұ-рышты анық-тап, мысал-дар келтіру.	[10]№787-793.	3	6-апта	Ауызша қорғау
10.	Түзу мен жазықтық		[10]. №802-805.	4	6-апта	Консп.тексе
11.	Поляр координат системасы, оның тік бұр. Декарт коорд. сист. байланысы. Конустық қима.	Конустық қималардың ПКС-ғы теңдеулерін құруға есеп-тер шығару	[10].№610,611,640,641	4	7-апта	Консп.тексе
12.	«Эллипс, гипербола, парабола, олардың қасиеттері» тақырыбына есептер шығару	10-15 шақты есептер шығару	[10].№572-577; 604-609;635-638.	5	7-апта	Ауыз тексеру
13.	Асимптоталар.Жана-малар, нормальдар, қиюшылар, олар- дың теңдеулері. Екінші ретті сызық- тардың фокустары және директриса- лары.	Есептер шығару	№664 (1-3);665,666,667 (1,2)	5	8-апта	Конспе тексеру
14.	Екінші ретті сызық-тың жалпы теңдеуін канондық түрге кел тіру. Екінші ретті сызықтың класси-фикациясы.	Есеп шщығару	[10], №669(1-3), 670 (1-3).	5	8-апта	Ауызша тексеру
15.	Эллипсоид, гиперболоидтар, параболоидтар.	Есеп шыцғару	[10], №879-882; 900-902;912,913.	5	9-апта	Конспект тексеру
16.	Екінші ретті беттер, олардың теңдеулерін канондық түрге келтіру.	Есеп шығару	[10], №1056 (1-3).	5	9-апта	Конспект тексеру
17.	Кеңейтілген евклид түзуі. Проективтік түзу.Түзу бойындағы нүктелердің реті.	Тақырыпты талдап, есеп шығару	[12], №3(в,г); №5,6.	5	10-апта	Ауызша тексеру
18.	Төрт нүктенің күрделі қатынасы		[12],№8(д,е). 9(д,е);16.	3	10-апта	Ауызша тексеру
19.	Жазықтықтағы проективтік коорд. Системасы. Нүктенің пр. коорд. табу.	Теорияны оқып, есеп шығару	[12],№35(в). , 37, 38, 42.	3	11-апта	Консп тексеру

20.	ПКС-да түзудің теңдеулерін табу.	Есеп шығару	[12],№55(в,г). 58 (в,г);	4	11-апта	Кончспект тексеру
21.	Кеңейтіл.евкл. жаз-ғы біртектес аффиндік коорд-лар.		[12],.№73; №81	4	12-апта	Конспект тексеру
22.	Қосақтылық (ауысымдылық) принципі.Дезарг теоремасы	Оқулықта шығарылған есептерді талдау	[12],№93, 97, 100. 99 (өз бетімен шығаруға.	4	12-апта	Ауызша сұр
23.	Төрт нұктенің күрделі қатынасы	Есеп шығару	[12],№. 114. 115.	5	13-апта	Ауызша тексеру
24.	Төрт түзудің күрделі қатынасы	Есеп шығару	[12],№108(а,б). 110; 111	5	13-апта	Ауызша тексеру
25.	Толық төрттөбелік	Теорияны оқып, есеп шығару	[12],№135. 140; 143	3	14-апта	Ауызша жа конспект тексеру
26.	Толық төрттөбелік. Гармониялық төртінші нүктені салу	Есеп шығару	[12],	4	14-апта	Конспект тексеріп, ауызша сұра