МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования

«Тольяттинский государственный университет»

Энергетические машины и системы управления

(наименование института полностью)

Росдистант

ВЫСШЕЕ ОБРАЗОВАНИЕ ДИСТАНЦИОННО

Кафедра /департамент /центр[1] **Энергетические машины и системы управления**__________________
(наименование кафедры/департамента/центра полностью)

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАДАНИЕ №_1__

по дисциплине (учебному курсу) «Высшая математика. Элементы высшей алгебры и геометрии»
(наименование дисциплины (учебного курса)

Вариант ____ *(при наличии)*

Студент	Муъиз Карамхудоев
	(И.О. Фамилия)
Группа	ЭМСБ-2203а
Преподаватель	Павлова Елена Сергеевна
	(И.О. Фамилия)

Тольятти 2023

РАЗДЕЛ № 1. Высшая математика. Элементы высшей алгебры и геометрии

Задача 1

Номер варианта задачи определяется с помощью таблицы по первой букве фамилии студента.

Таблица. Выбор номера варианта

Буква	А	Б	В	Г	Д	Е, Ё	Ж, З	И	К	Л

[1] Оставить нужное

№ вар.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Буква	М	Н, Ю	О, Я	П	Р, Ч	С, Ш	Т, Щ	У	Ф, Э	Х, Ц
№ вар.	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

Определить собственные значения и собственные векторы матрицы третьего порядка.

Номер варианта	Матрица
9	$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 7 & -4 \\ 2 & -2 & 5 \end{bmatrix}$

Собственные значения

λ1=9
λ2=3
λ3=3

Собственные векторы

$$V_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} V_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Расчет собственных векторов:

Найдите собственный вектор для каждого λ, используя метод исключения Гаусса-Жордана :

$\lambda_1 = 9$

$$\mathrm{A} - \lambda \times \mathrm{E} = \begin{bmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & -4 \\ 2 & -2 & -4 \end{bmatrix}$$

Используйте метод исключения Гаусса-Жордана для решения системы уравнений $\mathrm{A} - \lambda \times \mathrm{E} = 0$

Рядовые операции	Расширенная матрица	Система уравнений
Исходная матрица	$\left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{-6} & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & -4 & 0 \\ 2 & -2 & -4 & 0 \end{array}\right]$	$\begin{cases} -6x_1 & & & = 0 \\ 2x_1 & -2x_2 & -4x_3 & = 0 \\ 2x_1 & -2x_2 & -4x_3 & = 0 \end{cases}$
Нормализация $\frac{-1}{6}$R1 -> R1	$\left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & -4 & 0 \\ 2 & -2 & -4 & 0 \end{array}\right]$	$\begin{cases} x_1 & & & = 0 \\ 2x_1 & -2x_2 & -4x_3 & = 0 \\ 2x_1 & -2x_2 & -4x_3 & = 0 \end{cases}$
Сокращение R2 – (2) × R1 -> R2 R3 – (2) × R1 -> R3	$\left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -4 & 0 \\ 0 & -2 & -4 & 0 \end{array}\right]$	$\begin{cases} x_1 & & & = 0 \\ & -2x_2 & -4x_3 & = 0 \\ & -2x_2 & -4x_3 & = 0 \end{cases}$
Нормализация $\frac{-1}{2}$R2 -> R2	$\left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & -4 & 0 \end{array}\right]$	$\begin{cases} x_1 & & & = 0 \\ & x_2 & +2x_3 & = 0 \\ & -2x_2 & -4x_3 & = 0 \end{cases}$
Сокращение R3 – (-2) × R2 -> R3	$\left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$	$\begin{cases} x_1 & & & = 0 \\ & x_2 & +2x_3 & = 0 \\ & & & = 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} x_1 & & & = 0 \\ & x_2 & +2x_3 & = 0 \\ & & & = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad V_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Используйте метод исключения Гаусса-Жордана для решения системы уравнений

$$\mathrm{A} - \lambda \times \mathrm{E} = 0$$

$$\lambda_2 = 3$$

$$\mathrm{A} - \lambda \times \mathrm{E} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & -4 \\ 2 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

Рядовые операции	Расширенная матрица	Система уравнений
Исходная матрица	$\left[\begin{array}{ccc\|c} \boxed{0} & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & -4 & 0 \\ 2 & -2 & 2 & 0 \end{array}\right]$	$\begin{cases} 0x_1 & & & = & 0 \\ 2x_1 & +4x_2 & -4x_3 & = & 0 \\ 2x_1 & -2x_2 & +2x_3 & = & 0 \end{cases}$
Нормализация 5.6294995342131E+14R1 -> R1	$\left[\begin{array}{ccc\|c} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & -4 & 0 \\ 2 & -2 & 2 & 0 \end{array}\right]$	$\begin{cases} x_1 & & & = & 0 \\ 2x_1 & +4x_2 & -4x_3 & = & 0 \\ 2x_1 & -2x_2 & +2x_3 & = & 0 \end{cases}$
Сокращение R2 – (2) × R1 -> R2 R3 – (2) × R1 -> R3	$\left[\begin{array}{ccc\|c} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -4 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \end{array}\right]$	$\begin{cases} x_1 & & = & 0 \\ & 4x_2 & -4x_3 & = & 0 \\ & -2x_2 & +2x_3 & = & 0 \end{cases}$
Нормализация $\frac{1}{4}$R2 -> R2	$\left[\begin{array}{ccc\|c} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \end{array}\right]$	$\begin{cases} x_1 & & = & 0 \\ & x_2 & -1x_3 & = & 0 \\ & -2x_2 & +2x_3 & = & 0 \end{cases}$
Сокращение R3 – (-2) × R2 -> R3	$\left[\begin{array}{ccc\|c} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$	$\begin{cases} x_1 & & = & 0 \\ & x_2 & -1x_3 & = & 0 \\ & & 0x_3 & = & 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} x_1 & & & = & 0 \\ & x_2 & -1x_3 & = & 0 \\ & & 0x_3 & = & 0 \end{cases} \quad => \quad V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Используйте метод исключения Гаусса-Жордана для решения системы уравнений

$$\mathrm{A} - \lambda \times \mathrm{E} = 0$$

$$\lambda_3 = 3$$

$$\mathrm{A} - \lambda \times \mathrm{E} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & -4 \\ 2 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

Рядовые операции	Расширенная матрица	Система уравнений
Исходная матрица	$\left[\begin{array}{ccc\|c} \boxed{0} & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & -4 & 0 \\ 2 & -2 & 2 & 0 \end{array}\right]$	$\begin{cases} & & & = 0 \\ 2x_1 & +4x_2 & -4x_3 & = 0 \\ 2x_1 & -2x_2 & +2x_3 & = 0 \end{cases}$
$\mathrm{R2} \leftrightarrow \mathrm{R1}$ **Поменять местами строку 2 и ряд 1**	$\left[\begin{array}{ccc\|c} \boxed{2} & 4 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 2 & 0 \end{array}\right]$	$\begin{cases} 2x_1 & +4x_2 & -4x_3 & = 0 \\ & & & = 0 \\ 2x_1 & -2x_2 & +2x_3 & = 0 \end{cases}$
Нормализация $\frac{1}{2}\mathrm{R1} \text{->} \mathrm{R1}$	$\left[\begin{array}{ccc\|c} \boxed{1} & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 2 & 0 \end{array}\right]$	$\begin{cases} x_1 & +2x_2 & -2x_3 & = 0 \\ & & & = 0 \\ 2x_1 & -2x_2 & +2x_3 & = 0 \end{cases}$
Сокращение $\mathrm{R3} - (2) \times \mathrm{R1} \text{->} \mathrm{R3}$	$\left[\begin{array}{ccc\|c} \boxed{1} & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 6 & 0 \end{array}\right]$	$\begin{cases} x_1 & +2x_2 & -2x_3 & = 0 \\ & & & = 0 \\ & -6x_2 & +6x_3 & = 0 \end{cases}$
$\mathrm{R3} \leftrightarrow \mathrm{R2}$ **Поменять местами строку 3 и ряд 2**	$\left[\begin{array}{ccc\|c} \boxed{1} & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -6 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$	$\begin{cases} x_1 & +2x_2 & -2x_3 & = 0 \\ & -6x_2 & +6x_3 & = 0 \\ & & & = 0 \end{cases}$
Нормализация $\frac{-1}{6}\mathrm{R2} \text{->} \mathrm{R2}$	$\left[\begin{array}{ccc\|c} \boxed{1} & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$	$\begin{cases} x_1 & +2x_2 & -2x_3 & = 0 \\ & x_2 & -x_3 & = 0 \\ & & & = 0 \end{cases}$
Сокращение $\mathrm{R1} - (2) \times \mathrm{R2} \text{->} \mathrm{R1}$	$\left[\begin{array}{ccc\|c} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$	$\begin{cases} x_1 & & & = 0 \\ & x_2 & -x_3 & = 0 \\ & & & = 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} x_1 & & & = 0 \\ & x_2 & -x_3 & = 0 \\ & & & = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad V_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Задача 2

Доказать совместность системы и решить её тремя способами: по формулам Крамера, методом Гаусса и средствами матричного исчисления.

Номер вар.	Система линейных уравнений
9	$\begin{cases} 2x_1 -¿ x_2 +¿ x_3 +¿ x_4 ¿ 3, \\ 2x_1 -¿ x_2 +¿ 2x_3 -¿ x_4 ¿ 2, \\ 6x_1 -¿ 3x_2 +¿ 4x_3 -¿ 3x_4 ¿ -1. \end{cases}$

A - это основная матрица системы,
B - матрица-столбец свободных членов,
C - расширенная матрица системы :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 \\ 6 & -3 & 4 & -3 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix},\ C = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 2 & -1 & 2 \\ 6 & -3 & 4 & -3 & -1 \end{array}\right)$$

Решение методом Крамера

Для решения системы методом Крамера сначала вычислим определитель основной матрицы системы :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 \\ 6 & -3 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 2 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 = 0$$

- от 2 строки отнимаем 1 строку, умноженную на 1; от 3 строки отнимаем 1 строку, умноженную на 3
- от 3 строки отнимаем 2 строку, умноженную на 1

Ответ:Так как детерминант матрицы равен нулю, то система не не может быть решена этим методом (система не имеет решений или имеет множество решений).

Решить систему линейных уравнений методом Гаусса

Решение:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 3 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 2 \\ 6x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 3x_4 = -1 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Перепишем систему уравнений в матричном виде и решим его методом Гаусса

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 2 & -1 & 2 \\ 6 & -3 & 4 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

1-ую строку делим на 2

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -0.5 & 0.5 & 0.5 & 1.5 \\ 2 & -1 & 2 & -1 & 2 \\ 6 & -3 & 4 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

от 2 строки отнимаем 1 строку, умноженную на 2; от 3 строки отнимаем 1 строку, умноженную на 6

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -0.5 & 0.5 & 0.5 & 1.5 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -6 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

от 1 строки отнимаем 2 строку, умноженную на 0.5; от 3 строки отнимаем 2 строку, умноженную на 1

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -0.5 & 0 & 1.5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

3-ую строку делим на -4

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -0.5 & 0 & 1.5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2.25 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

от 1 строки отнимаем 3 строку, умноженную на 1.5; к 2 строке добавляем 3 строку, умноженную на 2

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -0.5 & 0 & 0 & -1.375 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3.5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2.25 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Ответ:

Система имеет множество решений:

$$\begin{cases} x_1 - 0.5x_2 = -1.375 \\ x_3 = 3.5 \\ x_4 = 2.25 \end{cases}$$

Решить систему линейных уравнений матричным методом

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 \\ 6 & -3 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{B} \quad \text{значит} \quad \mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B}$$

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 \\ 6 & -3 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 2\cdot 0\cdot 0\cdot 0 = 0$$

Ответ. Ответ: так как детерминант матрицы равен нулю, то система не не может быть решена этим методом (система не имеет решений или имеет множество решений).

Задача 3

Исследовать и найти общее решение системы линейных однородных уравнений.

Номер вар.	Система линейных уравнений
	¿ $3x_1+2x_2+5x_3+4x_4=0$, ¿ $2x_1+3x_2+6x_3+8x_4=0$, ¿ $x_1-6x_2-9x_3-20x_4=0.$

- Перепишем систему уравнений в матричном виде и решим его методом Гаусса
- 1-ую строку делим на 3

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & 5 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 6 & 8 & 0 \\ 1 & -6 & -9 & -20 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & \frac{2}{3} & \frac{5}{3} & \frac{4}{3} & 0 \\ 2 & 3 & 6 & 8 & 0 \\ 1 & -6 & -9 & -20 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

- от 2 строки отнимаем 1 строку, умноженную на 2; от 3 строки отнимаем 1 строку, умноженную на 1
- 2-ую строку делим на 5/3

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & \frac{2}{3} & \frac{5}{3} & \frac{4}{3} & 0 \\ 0 & \frac{5}{3} & \frac{8}{3} & \frac{16}{3} & 0 \\ 0 & -\frac{20}{3} & -\frac{32}{3} & -\frac{64}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & \frac{2}{3} & \frac{5}{3} & \frac{4}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 1.6 & 3.2 & 0 \\ 0 & -\frac{20}{3} & -\frac{32}{3} & -\frac{64}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

от 1 строки отнимаем 2 строку, умноженную на 2/3; к 3 строке добавляем 2 строку, умноженную на 20/3

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0.6 & -0.8 & 0 \\ 0 & 1 & 1.6 & 3.2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Ответ:

Система имеет множество решений:

$$\begin{cases} x_1 + 0.6x_3 - 0.8x_4 = 0 \\ x_2 + 1.6x_3 + 3.2x_4 = 0 \end{cases}$$