

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого  
Институт машиностроения, материалов и транспорта  
Высшая школа машиностроения

## Отчёт

Дисциплина: «Связанные задачи гидро и аэроупругости»

Тема: «Численное моделирование ламинарного потока в канале»

Студенты гр. 3331501/70601

Осман А. А.

Преподаватель

Гатаулин Я. А.

«   » \_\_\_\_\_ 2022г.

Санкт-Петербург  
2022

## Оглавление

Цель работы.....	3
Задача.....	3
Исходные данные.....	3
Рассчитываемые параметры.....	3
Математическая модель.....	4
Создание геометрии.....	4
Создание сетки.....	5
Расчёт в Fluent.....	6
Анализ результатов решения.....	7
Векторное поле скоростей.....	7
Профили скорости.....	9
Графики скоростей, давления и касательных напряжений.....	11
Сравнение аналитического решения с полученным в программе ANSYS Fluent.....	14
Вывод.....	17
Список литературы.....	17

## Цель работы

Провести численный расчет во Fluent стационарного ламинарного течения вязкой несжимаемой жидкости в трубки кольцеобразного сечения для разных значений числа Рейнольдса: 100, 200, 400.

## Задача

- 1) Построить геометрию и расчетную сетку;
- 2) Выполнить расчет потока для заданных чисел Рейнольдса;
- 3) Сравнить рассчитанный коэффициент сопротивления с теоретическими значениями.

## Исходные данные

Параметры геометрии трубы:

- Поперечное сечение: кольцо;
- Внешний диаметр  $D=1\text{ м}$ ;
- Внутренний диаметр  $d=0,5\text{ м}$ ;
- Длина канала:  $L=2\text{ м}$ ;

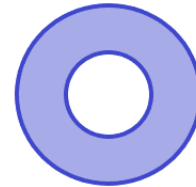


Рисунок 1 – сечение трубы

Параметры жидкости:

- Плотность  $\rho=200\frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$ ,
- Коэффициент динамической вязкости  $\mu=1\text{ Па}\cdot\text{с}$ ;
- Числа Рейнольдса:  $\Re=100, 200, 400$ .

Граничные условия:

- 1) Скорость на входе:  $V=1, 2, 4\text{ м/с}$ ;
- 2) Давление на выходе:  $P=0$ ;
- 3) Условие прилипания на стенках:  $V=0$ ;

## Рассчитываемые параметры

В рассматриваемой задаче течение определяется числом Рейнольдса, определяемым по формуле:

$$\Re = \frac{\rho V D}{\mu},$$

где  $\rho$  – плотность жидкости,  $\text{кг/м}^3$ ;  $V$  – скорость потока,  $\text{м/с}$ ;  $D$  – диаметр трубы,  $\text{м}$ ;  $\mu$  – коэффициент динамической вязкости жидкости,  $\text{Па}\cdot\text{с}$ .

Параметры течения, соответствующие заданным числам Рейнольдса представлены в таблице 1.

Таблица 1 – Параметры потока

Re	100	200	400
$\mu$ , Па с	1	1	1
$D$ , м	1	1	1
$d$ , м	0.5	0.5	0.5
$\rho$ , $\text{кг/м}^3$	200	200	200
$V$ , м/с	1	2	4

## Математическая модель

В качестве математической модели выбрана модель несжимаемой жидкости, течение – ламинарное, задача – стационарная.

Уравнение несжимаемости:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

Уравнения Навье-Стокса:

$$OX: \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} + \rho w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right);$$

$$OY: \rho u \frac{\partial v}{\partial x} + \rho v \frac{\partial v}{\partial y} + \rho w \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right);$$

$$OZ: \rho u \frac{\partial w}{\partial x} + \rho v \frac{\partial w}{\partial y} + \rho w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right).$$

## Создание геометрии

Для создания геометрии трубы использовалась программа DesignModeler. Геометрия была получена с помощью эскиза и операции вытягивания.

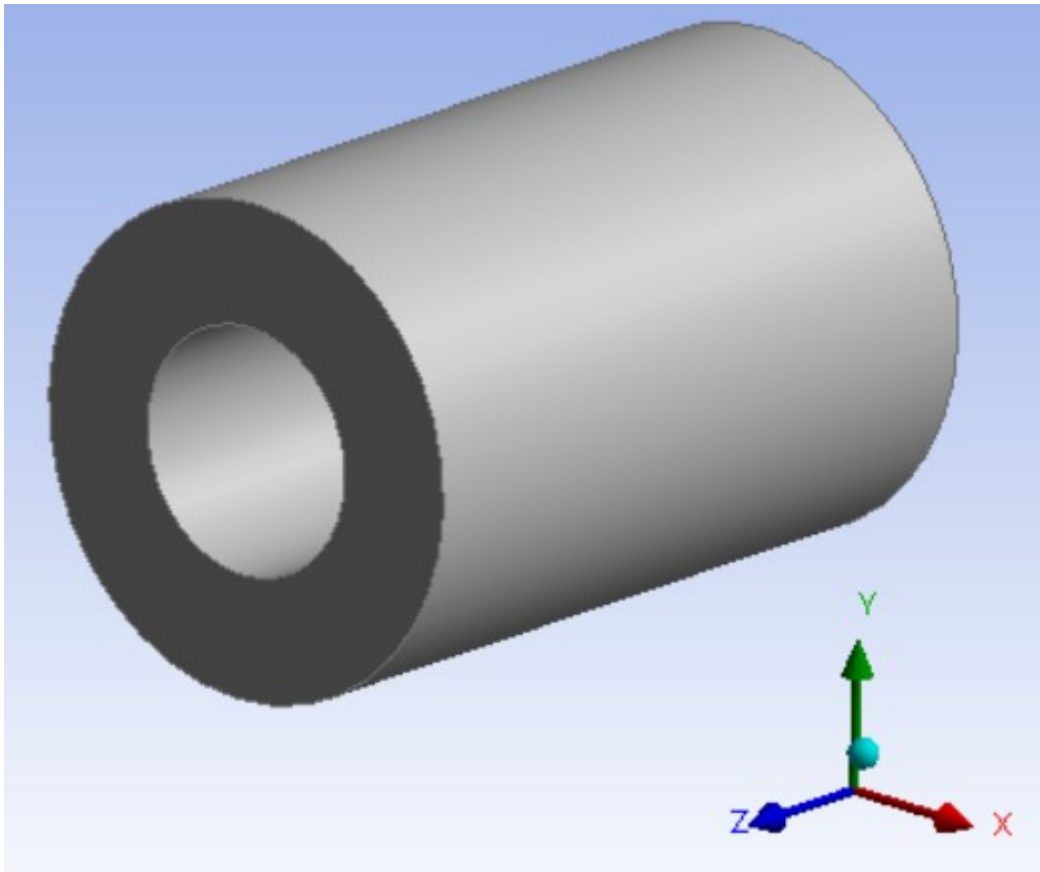


Рисунок 2 – геометрия трубы для расчёта

### Создание сетки

Расчётная сетка создана в программе ANSYS Meshing. Для построения сетки использован метод протяжки (Sweep), на торце задано разбиение линий, как показано на рисунке 3 (а), также использовалась опция Inflation для создания сгущения сетки к стенкам трубы (рисунок 3 (б)).

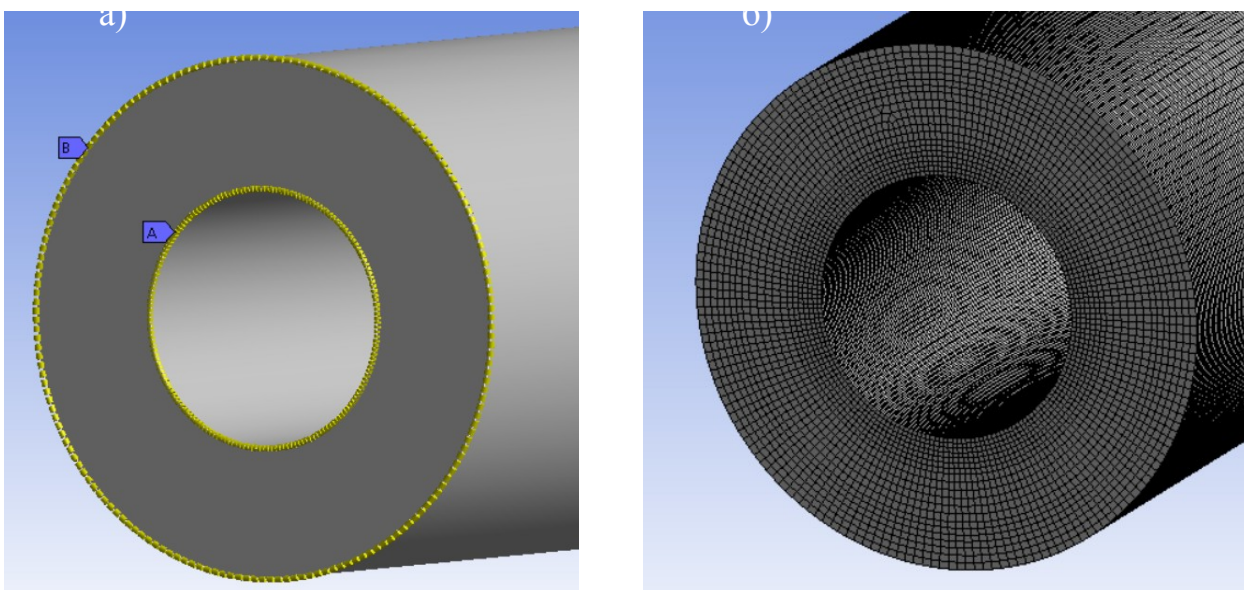


Рисунок 3 (а, б)

По длине трубы в направлении оси  $Z$  задано количество разбиений и сгущение сетки к началу трубы (рисунок 4).



Рисунок 4

Количество элементов в расчётной сетке составило 440440 шт.  
Входу в канал, выходу и стенкам даны названия.

### Расчёт в Fluent

В программе Fluent настроена точность, заданы параметры течения, материала, а также граничные условия.

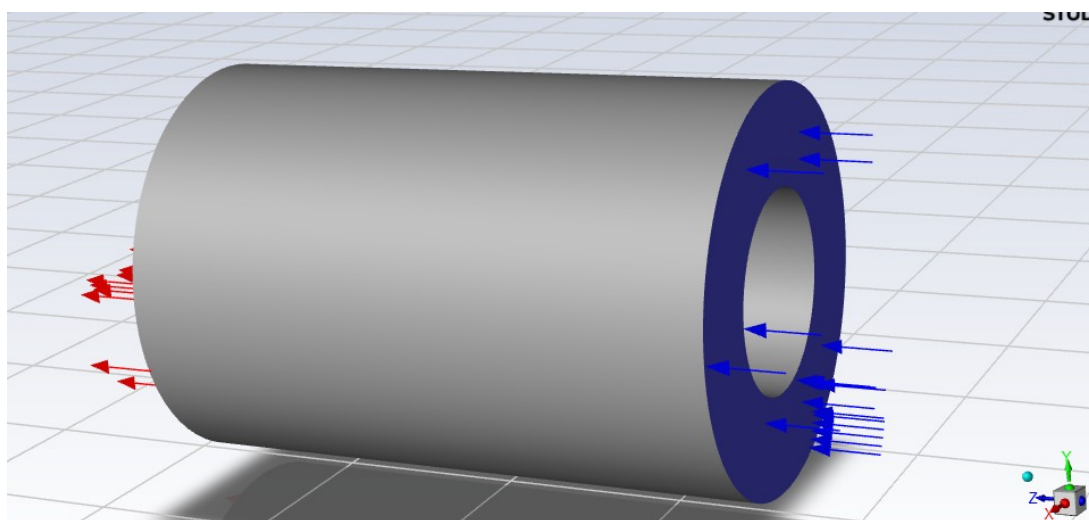


Рисунок 5 – граничные условия.

Проведён расчёт для 100 итераций, сходимость решения для  $Re = 400$  представлена на рисунке 6.

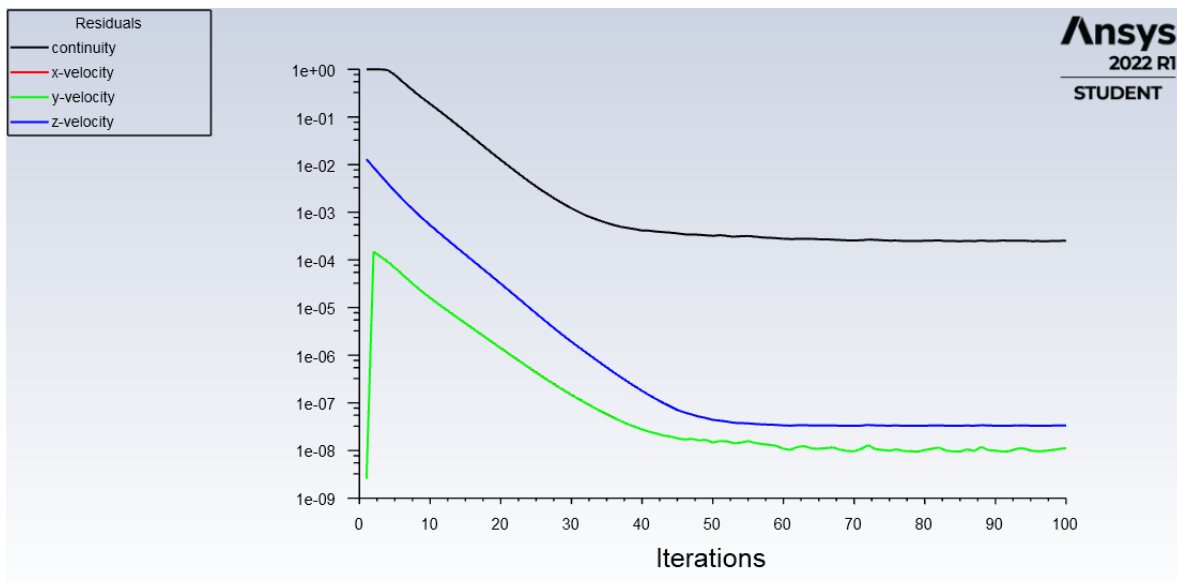


Рисунок 6 – сходимость решения.

## Анализ результатов решения

### Векторное поле скоростей.

На рисунках ниже представлены векторные поля скоростей исследуемых потоков в центральном сечении ( $X=0$ ).

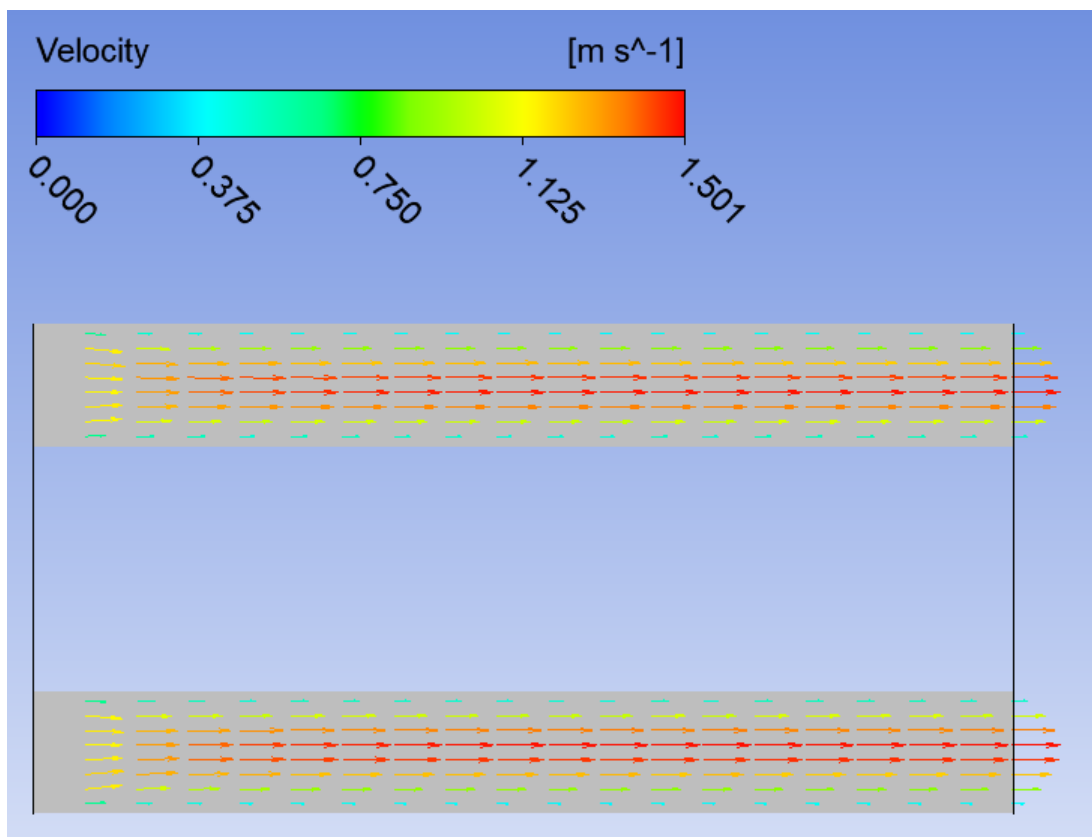


Рисунок 7 - векторное поле скоростей для  $Re = 100$

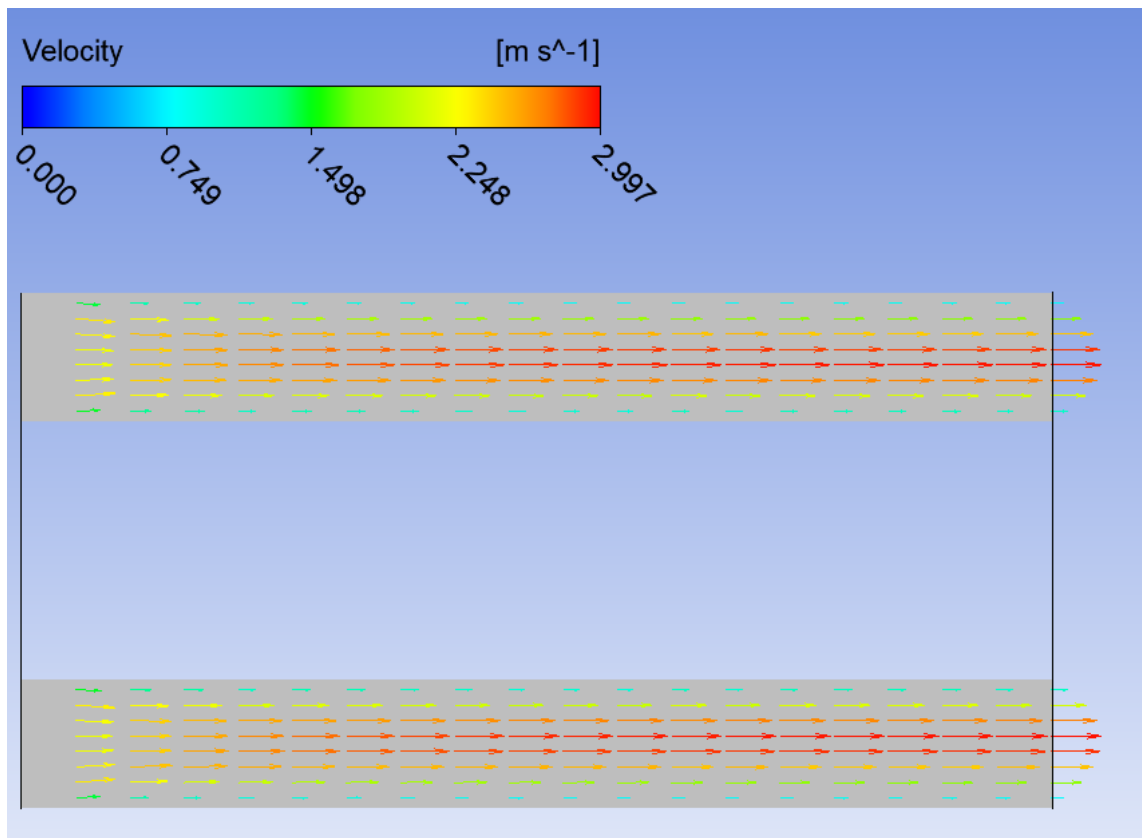


Рисунок 8 - векторное поле скоростей для  $Re = 200$

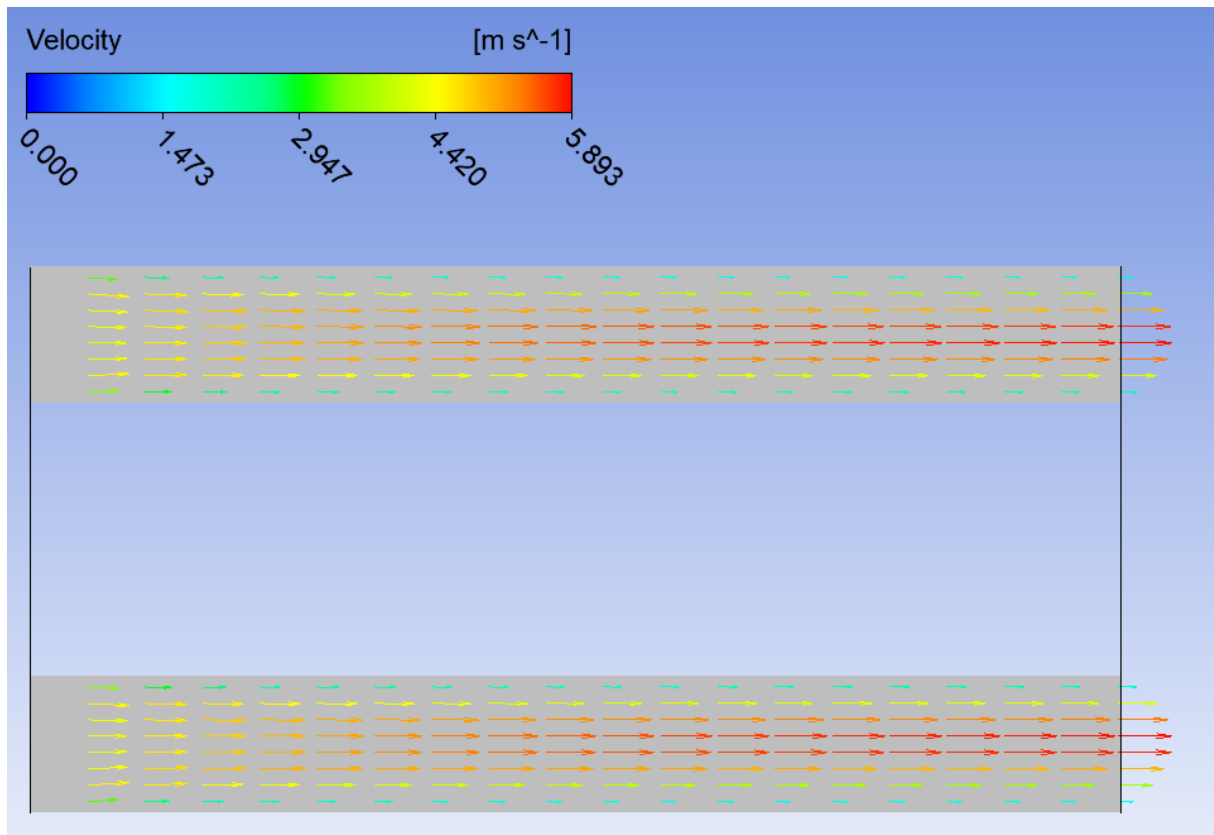


Рисунок 9 - векторное поле скоростей для  $Re = 400$



Максимальные скорости потока для разных чисел Рейнольдса представлены в таблице 2.

Таблица 2 – максимальные расчётные скорости потока

Re	100	200	400
V <sub>max</sub> , м/с	1.501	2.997	5.893

### Профили скорости

На рисунках ниже представлены профили скоростей для разных чисел Рейнольдса для половины сечения трубы.

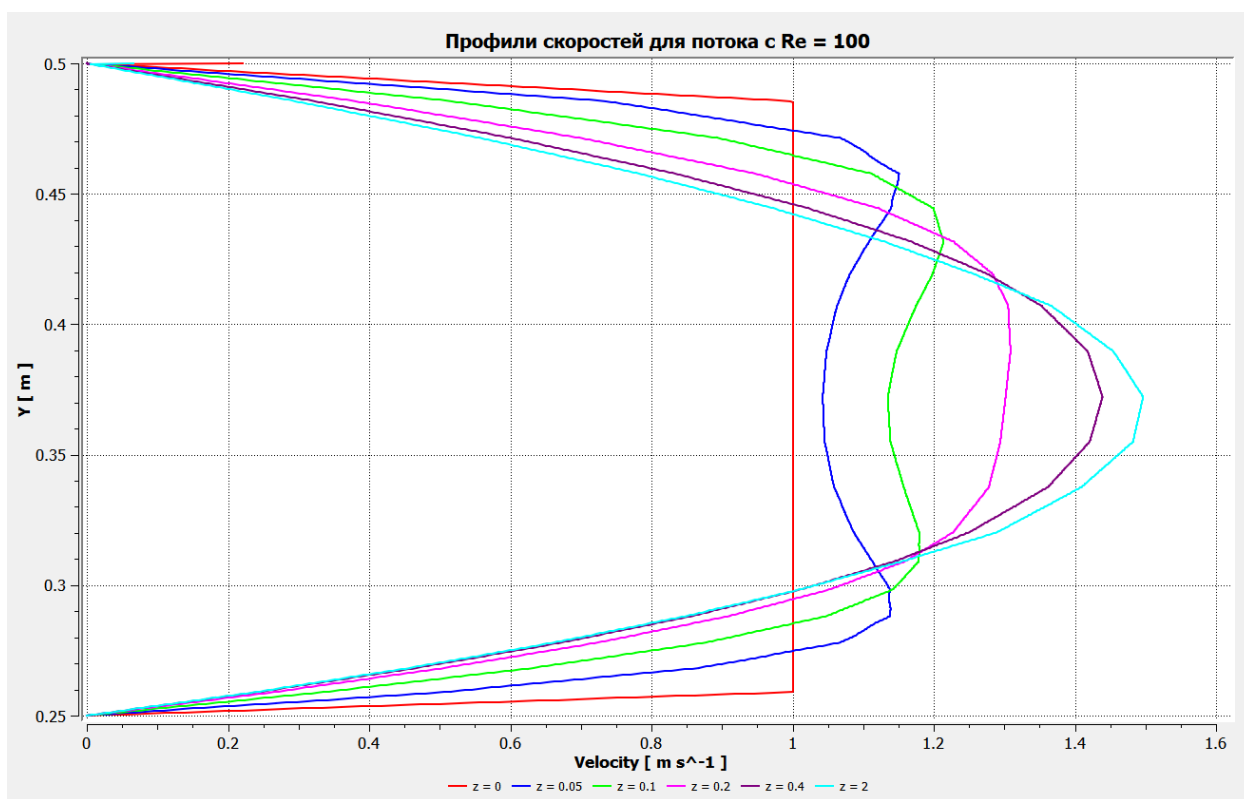


Рисунок 10 - профили скоростей для Re = 100

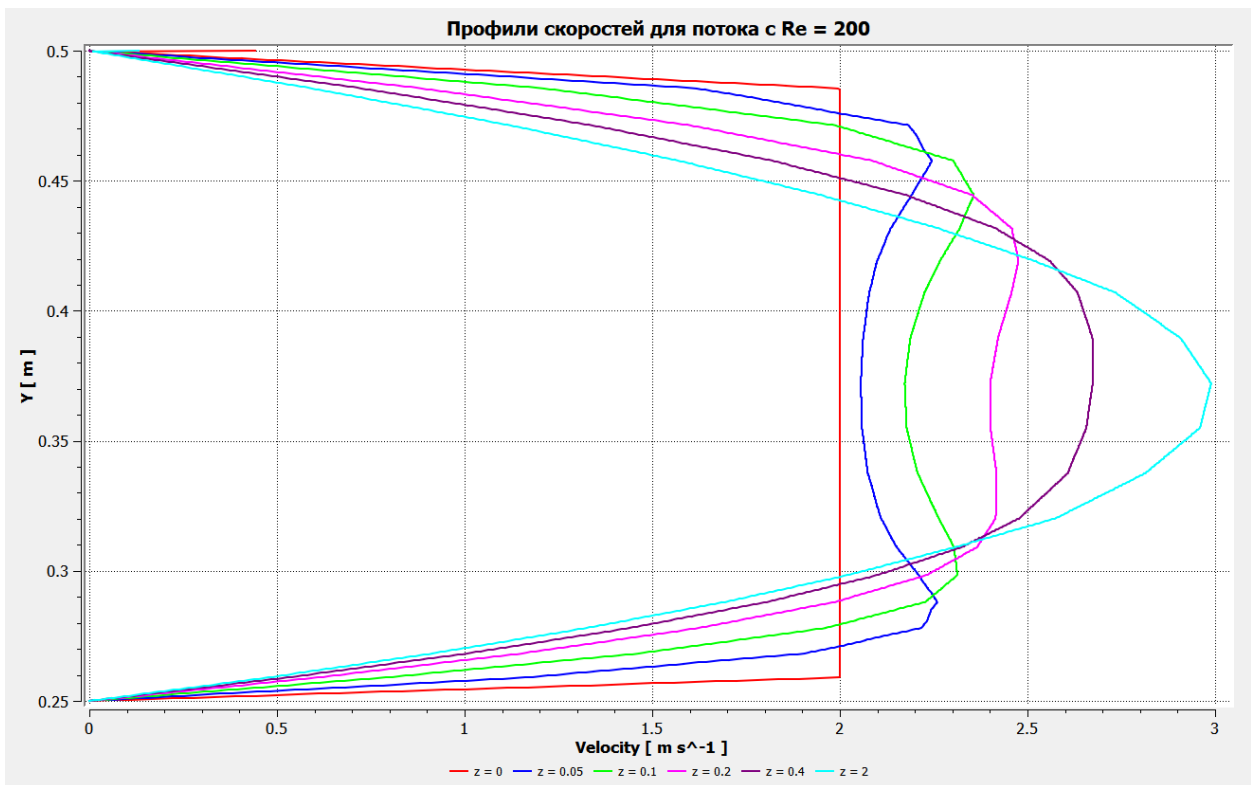


Рисунок 11 - профили скоростей для  $Re = 200$

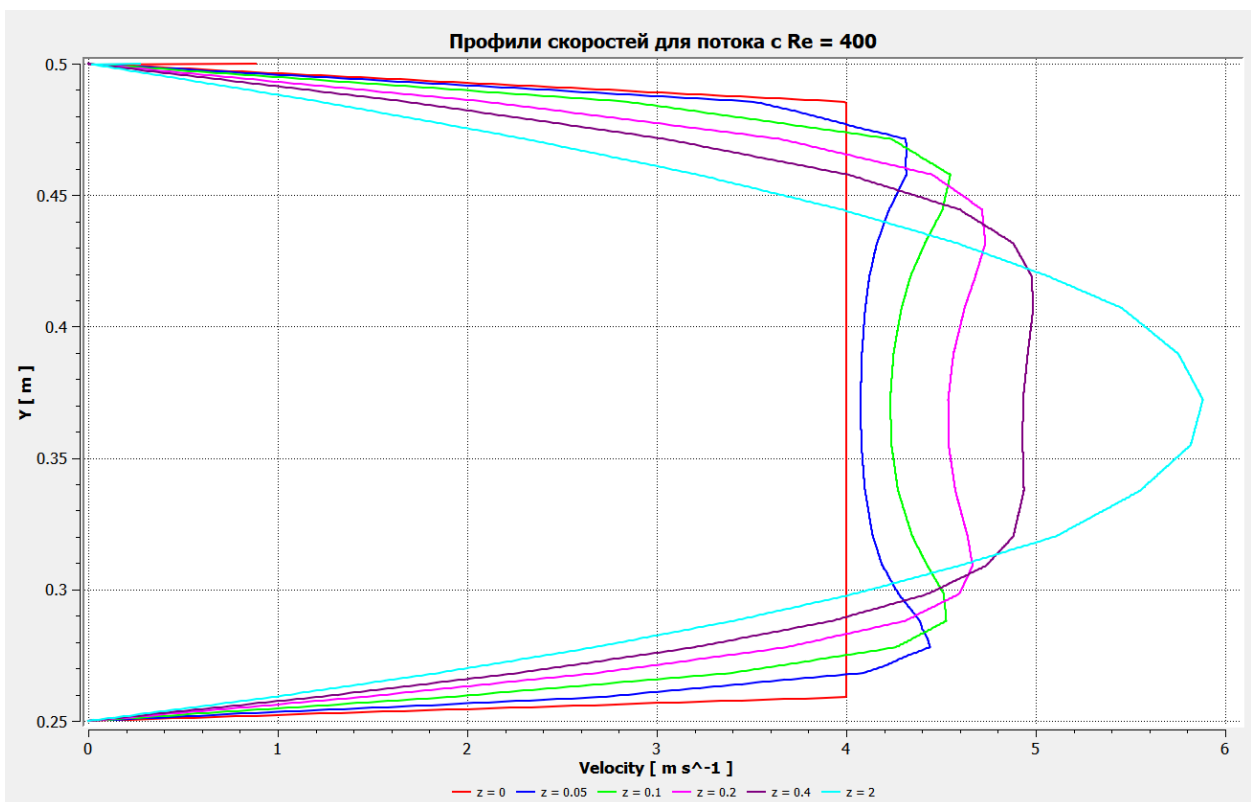


Рисунок 11 - профили скоростей для  $Re = 400$

Из графиков видно, что на вход задается поток скорости равный расчётному значению, следуя далее по каналу он приобретает M-образную форму, а затем приобретает вид параболы Пуазейля.

## Графики скоростей, давления и касательных напряжений

На рисунках ниже представлен графики распределения максимальных скоростей, давления и касательных напряжений по всей длине трубы вдоль проекции срединной цилиндрической поверхности трубы, изображённой на рисунке 12 (далее упоминаемой как средняя линия течения).



Рисунок 12 – линия сбора исследуемых показателей расчёта

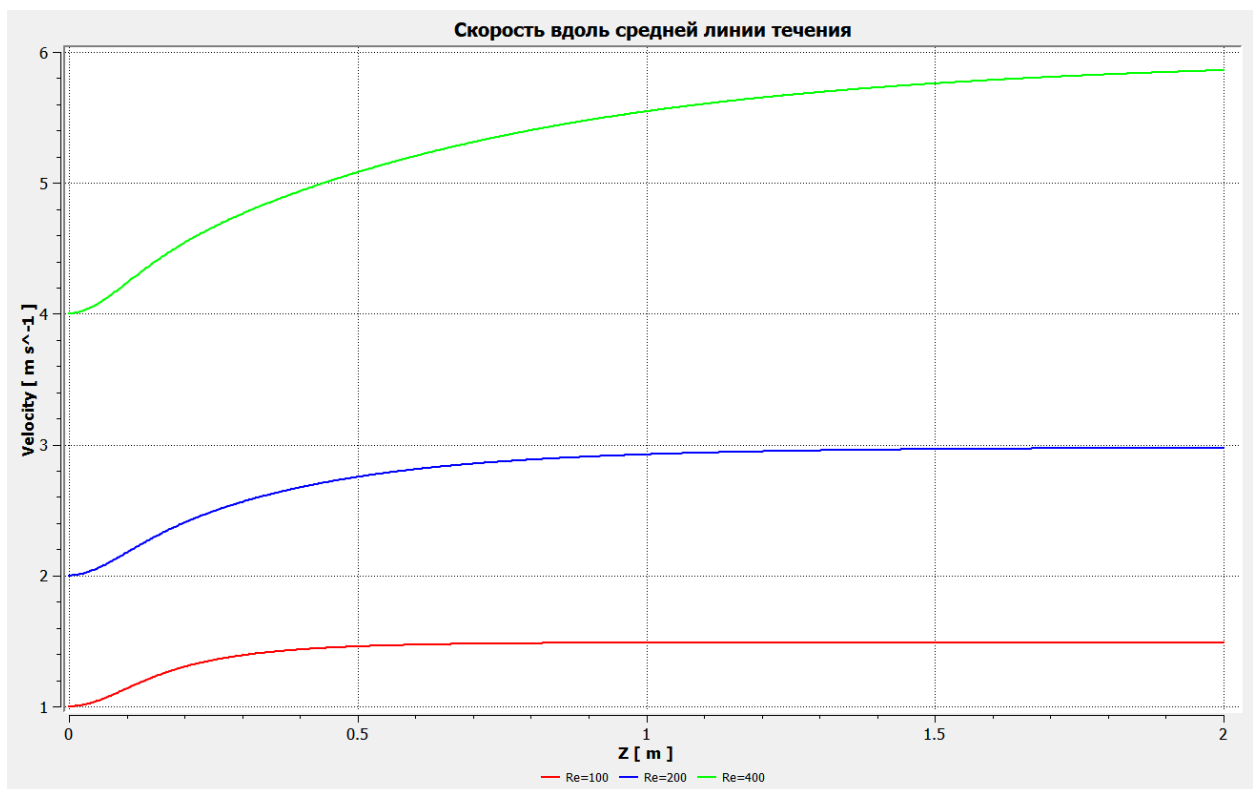


Рисунок 13 – распределение скоростей потоков вдоль средней линии течения.

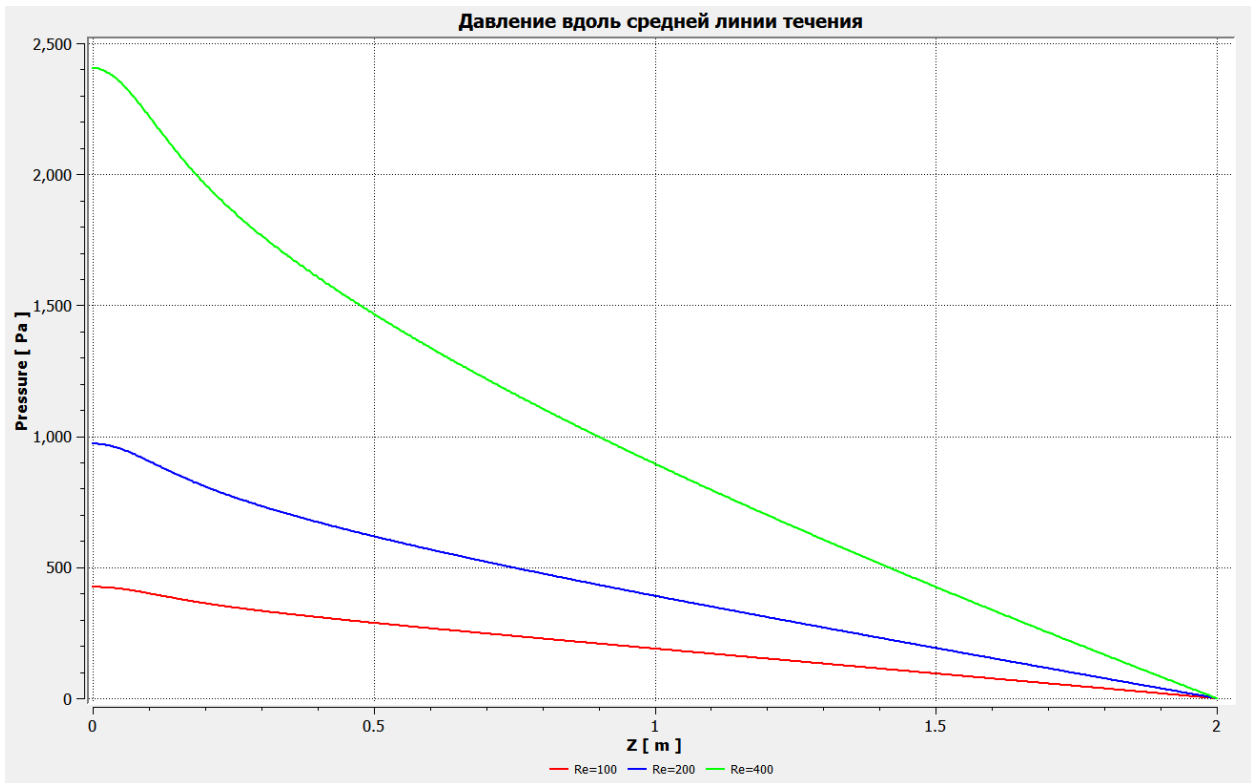


Рисунок 14 – распределение давления вдоль средней линии течения.

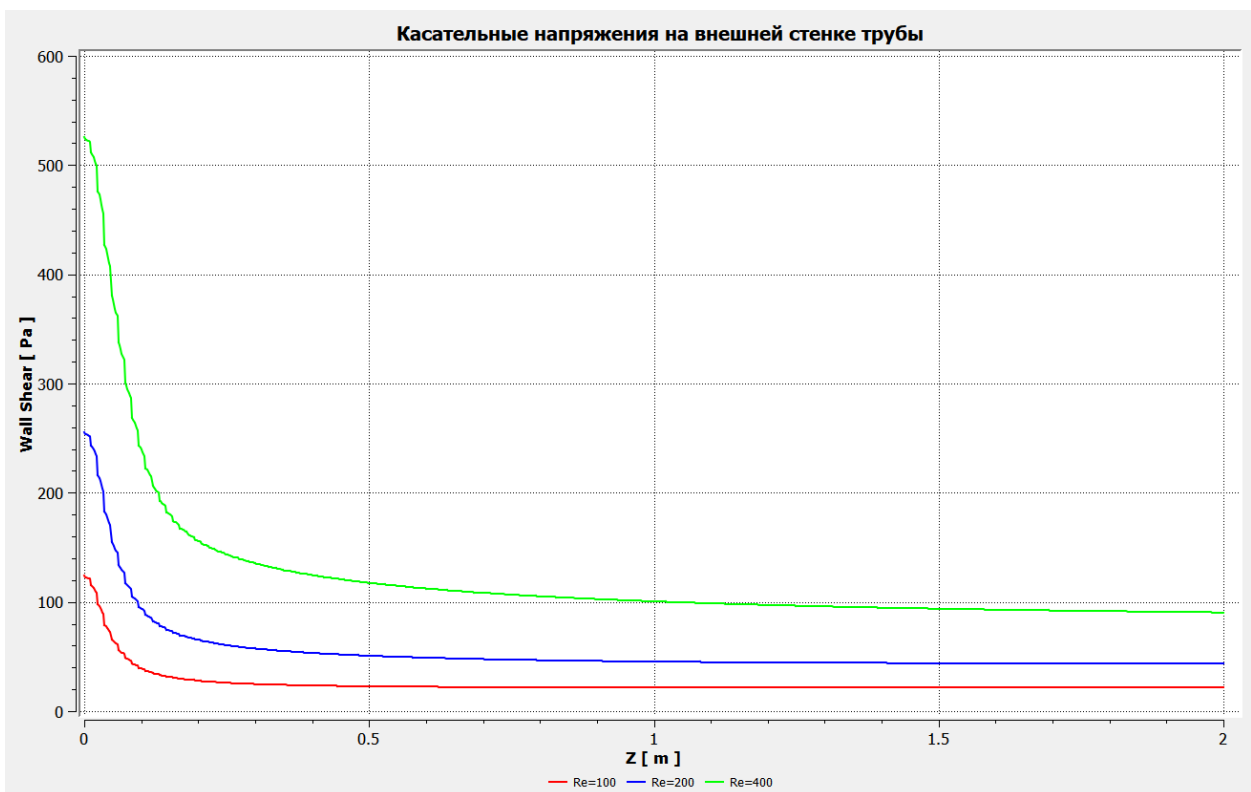


Рисунок 15 - распределение касательных напряжений на внутренней стенке трубы вдоль средней линии течения.

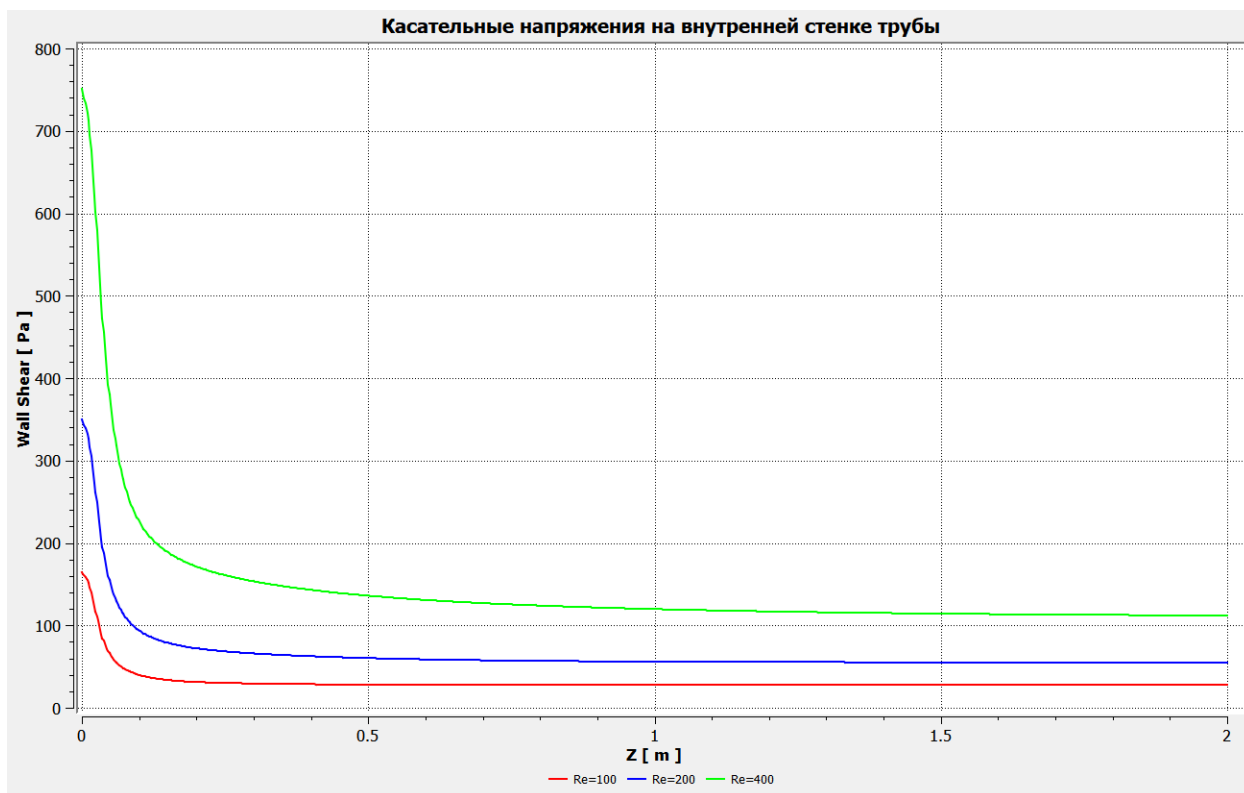


Рисунок 15 - распределение касательных напряжений на внутренней стенке трубы вдоль средней линии течения.

Из полученных графиков скорости можно определить длину начального участка, как расстояние от входа до места, где скорость потока составляет 98% от максимальной. Для  $Re=100$  длина начального участка составляет примерно 0.78 м. Для  $Re=200$  – примерно 1.2 м. Для  $Re=400$  течение при длине трубы 2 м не успело стать установившимся. Удлинение трубы для более подробного изучения потока с  $Re=400$  осложнено ограничениями студентческой версии ANSYS по количеству элементов.

Из графиков распределения касательных напряжений на внешней и внутренней стенках трубы можно заметить, что на входе напряжения на внешней стенке трубы значительно меньше напряжений на внутренней стенке, однако на установившемся участке значения напряжений становятся близкими. Данная асимметрия на входе наиболее ярко заметна на поле скоростей:

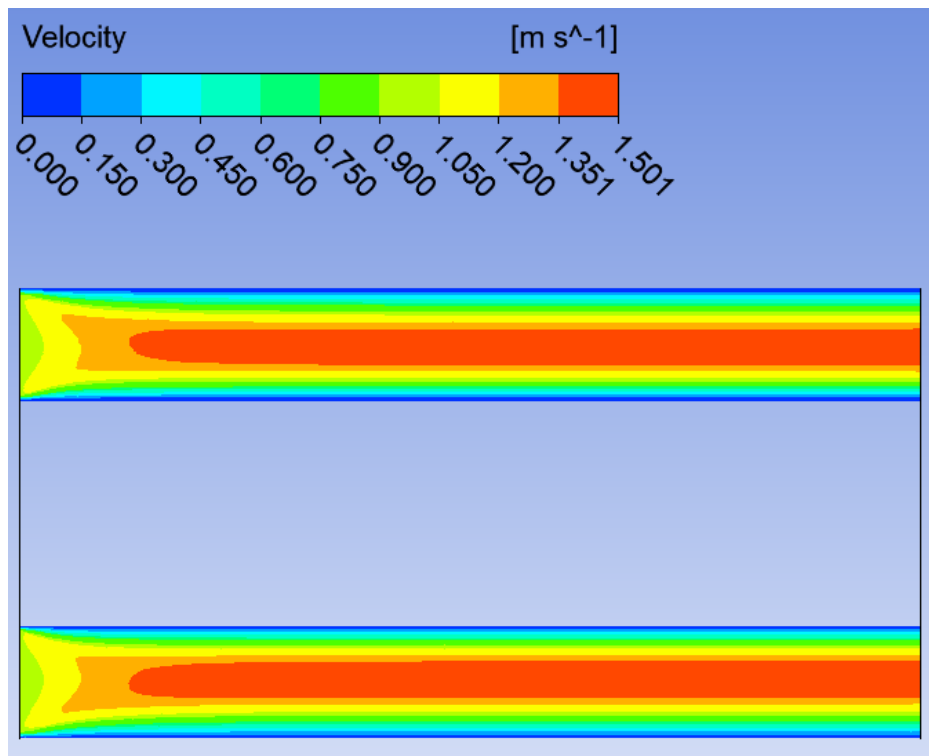


Рисунок 16 – поле скоростей для Re=100

## Сравнение аналитического решения с полученным в программе ANSYS Fluent

Аналитическое решение для скорости в установившемся течении, а также для средней скорости вычисляются по формуле:

$$\omega = \frac{\Delta p}{4 \mu l} z$$

$$\omega_{cp} = \frac{\Delta p}{8 \mu l} \left[ r_{внеш}^2 + r_{внутр}^2 - \frac{r_{внеш}^2 - r_{внутр}^2}{\ln(r_{внеш}/r_{внутр})} \right]$$

где  $\Delta p$  — разница давлений (рассчитывается для участка с установившимся течением);  $l$  — длина исследуемого участка с установившимся течением (для длины начального участка взято значение рассчитанное в ANSYS за неимением точной расчётной формулы);

$$\frac{\Delta p_{\text{зr}=100}}{l} = 210 \text{ Па/м.}$$

$$\frac{\Delta p_{\text{зr}=200}}{l} = 400 \text{ Па/м.}$$

$$\frac{\Delta p_{\text{зr}=200}}{l} = 850 \text{ Па/м.}$$

Тогда, учитывая параболическую форму профиля скорости на установившемся течении, аналитические значения скорости для потоков:

Re=100:

$$\omega_{max} = \frac{-210}{4} i$$

$$\omega_{cp} = \frac{210}{8} i$$

Re=200:

$$\omega_{max} = \frac{-400}{4} i$$

$$\omega_{cp} = \frac{400}{8} i$$

Re=400:

$$\omega_{max} = \frac{-850}{4} i$$

$$\omega_{cp} = \frac{850}{8} i$$

Таблица 3 – сравнение расчётных и аналитических значений скоростей потока для разных чисел Рейнольдса

Re	100	200	400
$V_{max}$ , м/с	1.501	2.997	5.893
$\omega_{max}$ , м/с	1.222	2.27	4.948
$\delta$ , %	19	22	16

где  $V_{max}$  – расчётная максимальная скорость,  $\omega_{max}$  — аналитически найденная максимальная скорость потока,  $\delta$  – погрешность.

Таблица 4 – сравнение расчётных и аналитических значений средних скоростей потока для разных чисел Рейнольдса

Re	100	200	400
$V_{cp}$ , м/с	1	2	4
$\omega_{cp}$ , м/с	1.102	2.1	4.462
$\delta$ , %	10	5	11

где  $V_{cp}$  – расчётная максимальная скорость,  $\omega_{cp}$  — аналитически найденная максимальная скорость потока,  $\delta$  – погрешность.

Данные решения можно назвать только приближенными в связи с тем, что некоторые величины рассчитаны не аналитическим способом.

Полученные значения максимальной скорости получились достаточно точными, погрешность не превышает 11%.

Теоретические значения коэффициентов сопротивления  $\lambda$  определялись по формуле [2]:

$$\lambda = \frac{64}{Re}.$$

Тогда:

$$\lambda = \frac{64}{100} = 0.64 \text{ — для } Re=100.$$

$$\lambda = \frac{64}{200} = 0.32 \text{ — для } Re=200.$$

$$\lambda = \frac{64}{400} = 0.16 \text{ — для } Re=400.$$

Численное значение коэффициента сопротивления  $\lambda$  определялось по формуле с использованием значений, полученных в Ansys CFD-Post:

$$\Delta p = \lambda \cdot \frac{l}{d} \cdot \frac{\rho \cdot \omega_{cp}^2}{2} \rightarrow \lambda = \frac{2 \cdot \Delta p \cdot d}{l \cdot \rho \cdot \omega_{cp}^2}.$$

где  $d$  — гидравлический диаметр трубы ( $d = d_{\text{внеш}} - d_{\text{внутр}}$ );  $l$  — длина исследуемого участка с установившемся течением;  $\rho$  — плотность;  $\omega_{cp}$  — средняя скорость потока, рассчитываемая по формуле:

Тогда расчётный коэффициент сопротивления для исследуемых чисел Рейнольдса:



Re=100:  $\lambda=0.432$

Re=200:  $\lambda=0.221$

Re=400:  $\lambda=0.107$

Таблица 4 – сравнение расчётных и аналитических значений коэффициентов сопротивления потока для разных чисел Рейнольдса

Re	100	200	400
$\lambda_{\text{точн}}$	0.64	0.32	0.16
$\lambda_{\text{расч}}$	0.432	0.221	0.107
$\delta, \%$	32	30	33

где

$\lambda_{\text{точн}}$  – расчётный коэффициент сопротивления потока,  $\lambda_{\text{расч}}$  — аналитически найденный коэффициент сопротивления потока,  $\delta$  – погрешность.

## Вывод

В данной работе был проведён численный расчет стационарного ламинарного течения вязкой несжимаемой жидкости в трубки кольцеобразного сечения для разных значений числа Рейнольдса: 100, 200, 400 с использованием расчётной программы Fluent.

Были построены геометрия, расчётная сетка, проанализированы поля скоростей в потоке, профили скорости и построены распределения давления и касательных напряжений на внутренней и внешней стенках трубы.

Были рассчитаны и вычислены аналитически средняя скорость (максимальная погрешность составила 11%), максимальная скорость (максимальная погрешность составила 22%), а также коэффициент сопротивления потока (максимальная погрешность составила 33%).

## Список литературы

- 1) Лойцянский Л. Г. (1950). *Механика жидкости и газа*. Ленинград: Государственное издательство технико-теоретической литературы.