

**Дополнительные задачи**  
**по дисциплине "Управление финансовыми рисками наукоёмких организаций"**

**1. Оценка риска портфеля ценных бумаг**

**Задача 1.1.** Менеджер управлял портфелем ценных бумаг в течение 4 лет. Начальные инвестиции составили 20 млн. руб. В конце первого года стоимость портфеля выросла до 21 млн. руб. В начале второго года дополнительно приобретено ценных бумаг на сумму в 2 млн. руб. В конце второго года стоимость портфеля составила 26 млн. руб. В начале третьего года произведена продажа ценных бумаг из состава портфеля, сократившая его стоимость на 3 млн. руб. В конце третьего года стоимость портфеля составила 25 млн. руб. В начале четвёртого года дополнительно приобретено ценных бумаг на сумму в 2 млн. руб. В конце года стоимость портфеля составила 30 млн. руб. Определить риск портфеля, измеренный выборочным стандартным отклонением.

**Решение.** Составляется статистический ряд годовых доходностей портфеля ценных бумаг. С этой целью производится расчёт этих доходностей:

$$r_1 = \frac{21}{20} - 1 = 0,05 (5\%); \quad r_2 = \frac{26}{21+2} - 1 = 0,1304 (13,04\%);$$
$$r_3 = \frac{25}{26-3} - 1 = 0,087 (8,7\%); \quad r_4 = \frac{30}{25+2} - 1 = 0,1111 (11,11\%).$$

Рассчитывается выборочное стандартное отклонение за год на основе полученных доходностей:

$$\bar{r} = \frac{5 + 13,04 + 8,7 + 11,11}{4} = 9,462\%;$$
$$\sigma^2 = \frac{(5 - 9,462)^2 + (13,04 - 9,462)^2 + (8,7 - 9,462)^2 + (11,11 - 9,462)^2}{4} = 9;$$
$$\sigma = 3\%.$$

**Задача 1.2.** Фактическая доходность портфеля *A* равна 21 %, стандартное отклонение доходности равно 14 %. Доходность и стандартное отклонение портфеля *B* соответственно равны 25 % и 18 %. Безрисковая процентная ставка равна 8 % годовых. Определить с помощью коэффициента Шарпа, какой портфель управлялся эффективнее.

**Решение.**  $k_{SA} = \frac{r_A - r_f}{\sigma_A} = \frac{21 - 8}{14} = 0,93;$   $k_{SB} = \frac{r_B - r_f}{\sigma_B} = \frac{25 - 8}{18} = 0,94.$

Портфель *B* управлялся эффективнее.

**Задача 1.3.** В начале года размер инвестиций в портфель ценных бумаг составил 30 млн. руб. По окончании первого квартала стоимость портфеля составила 32 млн. руб. На следующий день дополнительно было приобретено ценных бумаг на сумму 4 млн. руб. По окончании второго квартала стоимость портфеля составила 35 млн. руб., и он был увеличен ещё на 2 млн. руб. По окончании третьего квартала стоимость портфеля составила 37 млн. руб., и часть ценных бумаг из его состава на сумму 2 млн. руб. были проданы. В конце года стоимость портфеля составила 38 млн. руб. Безрисковая процентная ставка равна 8 % годовых. Определить коэффициент Шарпа портфеля в годовом исчислении (в задаче использовать выборочное стандартное отклонение).

**Решение.**

$$k_{SP} = \frac{r_P - r_f}{\sigma_P},$$

где  $k_{SP}$  - коэффициент Шарпа портфеля ценных бумаг;

$r_P$  - годовая доходность портфеля ценных бумаг;

$r_f$  - безрисковая процентная ставка;

$\sigma_P$  - выборочное стандартное отклонение (риск) портфеля ценных бумаг в годовом исчислении.

$$r_P = (1 + r_1)(1 + r_2)(1 + r_3)(1 + r_4) - 1 = \frac{32}{30} \cdot \frac{35}{36} \cdot \frac{37}{37} \cdot \frac{38}{35} - 1 = 0,1259 \text{ (12,59 \%)};$$

$$\sigma_P = \sigma \sqrt{4} \text{ (}\sigma \text{ - стандартное отклонение доходности портфеля за квартал).}$$

Для расчёта  $\sigma$  необходимо построить статистический ряд квартальных доходностей:

$$r_1 = \frac{32}{30} - 1 = 0,0667; \quad r_2 = \frac{35}{36} - 1 = -0,0278; \quad r_3 = \frac{37}{37} - 1 = 0; \quad r_4 = \frac{38}{35} - 1 = 0,0857;$$

$$\bar{r} = \frac{0,0667 - 0,0278 + 0 + 0,0857}{4} = 0,03115 \text{ (3,115 \%)};$$

$$\sigma^2 = \frac{(6,67 - 3,115)^2 + (-2,78 - 3,115)^2 + (0 - 3,115)^2 + (8,57 - 3,115)^2}{4} = 21,71;$$

$$\sigma = 4,66 \% ; \quad \sigma_P = 9,32 \% ;$$

$$k_{SP} = \frac{12,59 - 8}{9,32} = 0,49.$$

**Задача 1.4.** Инвестор приобретает рискованный актив  $A$  по 800 тыс. руб. за счёт собственных средств, занимает 200 тыс. руб. под 12 % годовых и также

инвестирует их в актив  $A$ . Ожидаемая доходность актива  $A$  равна 30 % годовых, стандартное отклонение доходности 20 %. Какую доходность может получить инвестор через год с вероятностью 68,3 %. Доходность актива распределена нормально.

**Решение.** Можно ожидать, что с вероятностью 68,3 % доходность портфеля через год будет находиться в интервале  $\pm\sigma_P$  относительно ожидаемой доходности  $\mu_P$ . Поэтому необходимо рассчитать стандартное отклонение доходности портфеля  $\sigma_P$  и  $\mu_P$ .

$$\sigma_P^2 = X_1^2 \sigma_1^2 + X_2^2 \sigma_2^2 + 2X_1 X_2 \text{cov}_{1,2}.$$

Удельный вес актива  $A$  в портфеле  $X_1$  равен  $\frac{800 + 200}{800} = 1,25$ .

Удельный вес занятых средств в портфеле  $X_2$  равен  $\frac{200}{800} = 0,25$ .

Так как дисперсия заёмных средств равна нулю ( $\sigma_2^2 = 0$ ) и ковариация доходности актива  $A$  с заёмными средствами равна нулю ( $\text{cov}_{1,2} = 0$ ), то дисперсия доходности портфеля будет равна  $\sigma_P^2 = X_1^2 \sigma_1^2 = 1,25^2 \cdot 20^2 = 625$ .

$$\sigma_P = 25 \%$$

Ожидаемая доходность портфеля равна  $\mu_P = 1,25 \cdot 30 + (-0,25) \cdot 12 = 34,5 \%$ .

Таким образом через год доходность портфеля с вероятностью 68,3 % будет находиться в интервале  $(34,5 \pm 25)\%$  или от  $34,5 - 25 = 9,5 \%$  до  $34,5 + 25 = 59,5 \%$ .

**Задача 1.5.** Инвестор приобретает рискованный актив  $A$  на 300 тыс. руб. и актив  $B$  на 200 тыс. руб. за счёт собственных средств, занимает 200 тыс. руб. под 12 % годовых и покупает на 150 тыс. руб. актив  $A$  и на 50 тыс. руб. актив  $B$ . Ожидаемая доходность актива  $A$  равна 20 %, актива  $B$  - 15 % годовых, стандартное отклонение доходности актива  $A$  в расчёте на год составляет 14 %, актива  $B$  - 10 %, ковариация доходностей активов равна 0,7. Какую доходность может получить инвестор через год с вероятностью 95,4 %. Доходности активов распределены нормально.

**Решение.** Можно ожидать, что с вероятностью 95,4 % доходность портфеля через год будет находиться в интервале  $\pm 2\sigma_P$  относительно ожидаемой доходности  $\mu_P$ . Поэтому необходимо рассчитать стандартное отклонение доходности портфеля  $\sigma_P$  и  $\mu_P$ .

Удельный вес актива  $A$  в портфеле  $X_1$  равен  $\frac{300 + 150}{300 + 200} = 0,9$ .

Удельный вес актива  $B$  в портфеле  $X_2$  равен  $\frac{200 + 50}{300 + 200} = 0,5$ .

Удельный вес занятых средств в портфеле  $X_3$  равен  $\frac{200}{300 + 200} = 0,4$ .

$$\mu_p = 0,9 \cdot 20 + 0,5 \cdot 15 + (-0,4) \cdot 12 = 20,7 \%$$

$$\sigma_p = \sqrt{0,9^2 \cdot 14^2 + 0,5^2 \cdot 10^2 + 2 \cdot 0,9 \cdot 0,5 \cdot 0,7} = 13,58 \%$$

Таким образом через год доходность портфеля с вероятностью 95,4 % будет находиться в интервале  $(20,7 \pm 2 \cdot 13,58)\%$  или от  $20,7 - 2 \cdot 13,58 = -6,46\%$  до  $20,7 + 2 \cdot 13,58 = 47,86\%$ .

## 2. Расчёт показателя *VaR*

**Задача 2.1.** Определить однодневный *VaR* с доверительной вероятностью 90 % для портфеля стоимостью 10 млн. руб., в который входят акции только одной компании. Стандартное отклонение доходности акции в расчёте на день равно 1,5 %.

**Решение.**

$$VaR_p = P_p k_{1-\alpha} \sigma_p,$$

где  $VaR_p$  - *VaR* портфеля;

$P_p$  - стоимость портфеля;

$\sigma_p$  - стандартное отклонение доходности портфеля, соответствующее времени, за которое рассчитывается *VaR*;

$k_{1-\alpha}$  - квантиль (количество стандартных отклонений, соответствующее уровню доверительной вероятности  $1 - \alpha$ ). Для  $P_p = 90\%$   $k_{1-\alpha} = 1,28$ .

$$VaR_p = 10 \cdot 1,28 \cdot 0,015 = 0,192 \text{ млн. руб.}$$

**Задача 2.2.** Определить однодневный *VaR* с доверительной вероятностью 95 % для портфеля стоимостью 10 млн. руб., в который входят акции двух компаний. Удельный вес первой акции в стоимости портфеля составляет 60 %, второй - 40 %. Стандартное отклонение доходности первой акции в расчёте на один день равно 1,58 %, второй акции - 1,9 %, коэффициент корреляции доходностей акций равен 0,8.

**Решение.** Определяется стандартное отклонение доходности портфеля:

$$\sigma_p = \sqrt{0,6^2 \cdot 1,58^2 + 0,4^2 \cdot 1,9^2 + 2 \cdot 0,6 \cdot 0,4 \cdot 1,58 \cdot 1,9 \cdot 0,8} = 1,62 \%$$

Определяется *VaR* портфеля:

$$VaR_p = 10 \cdot 1,65 \cdot 0,0162 = 0,2673 \text{ млн. руб.}$$

**Задача 2.3.** Портфель инвестора состоит из акций компаний *A* и *B*. Коэффициент корреляции между доходностями этих акций равен 0,4. Однодневный  $VaR_A$  с доверительной вероятностью 95 % по акциям компании *A*

равен 20 тыс. руб., а однодневный  $VaR_B$  с доверительной вероятностью 95 % по акциям компании  $B$  равен 30 тыс. руб. Определить  $VaR_P$  портфеля, состоящего из данных бумаг.

**Решение.**

$$VaR_P = \sqrt{(VaR_A)^2 + (VaR_B)^2 + 2VaR_A VaR_B corr} = \\ \sqrt{20000^2 + 30000^2 + 2 \cdot 20000 \cdot 30000 \cdot 0,4} = 42190,05 \text{ руб.}$$

**Задача 2.4.** Портфель инвестора состоит из акций компаний  $A$  и  $B$ . Коэффициент корреляции между доходностями этих акций равен 0,6. Однодневный  $VaR_A$  с доверительной вероятностью 95 % по акциям компании  $A$  равен 50 тыс. руб., а однодневный  $VaR_B$  с доверительной вероятностью 95 % по акциям компании  $B$  равен 70 тыс. руб. Определить  $VaR_P$  портфеля, состоящего из данных бумаг. Решение представить в матричной форме.

**Решение.**

$$VaR_P = \sqrt{V^T \rho V},$$

где  $V$  - матрица-столбец значений  $VaR$  для каждой бумаги;

$V^T$  - транспонированная матрица-столбец (матрица-строка) значений  $VaR$  для каждой бумаги;

$\rho$  - корреляционная матрица размером  $n \times n$  ( $n$  - число активов в портфеле).

$$VaR_P = \sqrt{(50 \ 70) \begin{pmatrix} 1 & 0,6 \\ 0,6 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 50 \\ 70 \end{pmatrix}} = \sqrt{\begin{pmatrix} 50 & 42 \\ 30 & 70 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 50 \\ 70 \end{pmatrix}} = \\ \sqrt{50^2 + 50 \cdot 42 + 70 \cdot 30 + 70^2} = 107,7 \text{ тыс. руб.}$$

**Задача 2.5.** Портфель инвестора состоит из акций компаний  $A$ ,  $B$  и  $C$ . Коэффициент корреляции между доходностями акций компаний  $A$  и  $B$  равен 0,4;  $A$  и  $C$  - 0,5;  $B$  и  $C$  - 0,8. Однодневный  $VaR_A$  с доверительной вероятностью 95 % по акциям компании  $A$  равен 100 тыс. руб., однодневный  $VaR_B$  с доверительной вероятностью 95 % по акциям компании  $B$  равен 140 тыс. руб., однодневный  $VaR_C$  с доверительной вероятностью 95 % по акциям компании  $C$  равен 185 тыс. руб. Определить  $VaR_P$  портфеля, состоящего из данных бумаг. Решение представить в матричной форме.

**Решение.**

$$VaR_p = \sqrt{V^T \rho V} = \sqrt{(100 \ 140 \ 185) \begin{pmatrix} 1 & 0,4 & 0,5 \\ 0,4 & 1 & 0,8 \\ 0,5 & 0,8 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 100 \\ 140 \\ 185 \end{pmatrix}} = 367,38 \text{ тыс. руб.}$$

**Задача 2.6.** Российский инвестор купил акций компании  $A$  на \$400 тыс. Стандартное отклонение доходности акции в расчёте на день составляет 1,26 %. Курс доллара - 29 руб. Стандартное отклонение валютного курса в расчёте на один день составляет - 0,35 %. Коэффициент корреляции между курсом доллара и доходностью акции компании  $A$  равен 0,25. Определить  $VaR$  портфеля инвестора в рублях с доверительной вероятностью 95 %.

**Решение.** Риск инвестора обусловлен двумя факторами: возможным падением котировок акции компании  $A$  и падением курса доллара США. Поэтому оба фактора риска должны учитываться при расчёте  $VaR$  портфеля. Рублёвый эквивалент стоимости акций составляет  $400 \cdot 29 = 11600$  тыс. руб. Дисперсия доходности портфеля с учётом валютного риска равна:

$$\sigma_p^2 = \sigma_A^2 + \sigma_K^2 + 2\sigma_A\sigma_K\rho_{AK} = 1,26^2 + 0,35^2 + 2 \cdot 1,26 \cdot 0,35 \cdot 0,25 = 1,9306;$$

$$\sigma_p = 1,38946 \%$$

$$\text{Однодневный } VaR_p = 11600 \cdot 1,65 \cdot 0,0138946 = 256,94 \text{ тыс. руб.}$$

**Задача 2.7.** Российский инвестор купил акций компании  $A$  на \$400 тыс. Стандартное отклонение доходности акции в расчёте на день составляет 1,26 %. Курс доллара - 29 руб. Стандартное отклонение валютного курса в расчёте на один день составляет - 0,35 %. Коэффициент корреляции между курсом доллара и доходностью акции компании  $A$  равен 0,25. Определить  $VaR$  по акциям и по валютной позиции с доверительной вероятностью 95 %. На основе полученных данных рассчитать  $VaR$  портфеля инвестора.

**Решение.**

$$VaR_A = 11600 \cdot 1,65 \cdot 0,0126 = 241,164 \text{ тыс. руб.}$$

$$VaR_K = 11600 \cdot 1,65 \cdot 0,0035 = 66,99 \text{ тыс. руб.}$$

$$VaR_p = \sqrt{(241,164 \ 66,99) \begin{pmatrix} 1 & 0,25 \\ 0,25 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 241,164 \\ 66,99 \end{pmatrix}} = 265,94 \text{ тыс. руб.}$$

**Задача 2.8.** Российский инвестор купил акций компании  $A$  на \$200 тыс. Стандартное отклонение доходности акции в расчёте на день составляет 1,26 %. Курс доллара - 29 руб. Стандартное отклонение валютного курса в расчёте на один день составляет - 0,35 %. Ковариация между курсом доллара и доходностью акции компании  $A$  равна 0,11025. Определить  $VaR$  портфеля

инвестора в рублях с доверительной вероятностью 95 %. Дисперсию портфеля представить в матричном виде.

**Решение.** Риск инвестора обусловлен двумя факторами: возможным падением котировок акции компании  $A$  и падением курса доллара США. Поэтому оба фактора риска должны учитываться при расчёте  $VaR$  портфеля. Рублёвый эквивалент стоимости акций составляет  $200 \cdot 29 = 5800$  тыс. руб.

В матричном виде дисперсия портфеля может быть представлена в следующем виде:

$$\sigma_P^2 = (1 \ 1) \begin{pmatrix} 1,26^2 & 0,11025 \\ 0,11025 & 0,35^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1,9306; \quad \sigma_P = 1,38946 \%$$

$$\text{Однодневный } VaR_P = 5800 \cdot 1,65 \cdot 0,0138946 = 132,97 \text{ тыс. руб.}$$

**Задача 2.9.** Российский инвестор купил акций компании  $A$  на \$200 тыс., а акций компании  $B$  на \$300 тыс. Стандартное отклонение доходности акции компании  $A$  в расчёте на день составляет 1,26 %, а акций компании  $B$  - 1,5 %. Курс доллара - 29 руб. Стандартное отклонение валютного курса в расчёте на один день составляет - 0,35 %. Ковариация между курсом доллара и доходностью акции компании  $A$  равна 0,11025, а ковариация между курсом доллара и доходностью акции компании  $B$  равна 0,281. Ковариация между доходностями акций компании  $A$  и компании  $B$  равна 1,512. Определить  $VaR$  портфеля инвестора в рублях с доверительной вероятностью 95 %. Дисперсию

портфеля рассчитывать по формуле  $\sigma_P^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n X_i X_j \text{cov}_{ij}$ .

**Решение.** Риск инвестора обусловлен тремя факторами: возможным падением курсов акций компаний  $A$  и  $B$ , а также падением курса доллара США.

$$VaR_P = 1,65 P_P \sigma_P.$$

$$P_P = 500 \cdot 29 = 14500 \text{ руб.}$$

$$\sigma_P^2 = \sigma_K^2 + X_A^2 \sigma_A^2 + X_B^2 \sigma_B^2 + 2X_A \text{cov}_{A,K} + 2X_B \text{cov}_{B,K} + 2X_A X_B \text{cov}_{A,B}.$$

Удельный вес акций  $A$  в портфеле равен:  $X_A = \frac{200}{500} = 0,4$ , а акций  $B$  -

$$X_B = \frac{300}{500} = 0,6.$$

$$\sigma_P^2 = 2,3377; \quad \sigma_P = 1,529 \%$$

$$VaR_P = 1,65 \cdot 14500 \cdot 0,01529 = 365,8 \text{ тыс. руб.}$$

**Задача 2.10.** Стоимость портфеля 10 млн. руб. Портфель состоит из акций пяти компаний. Удельный вес акций в портфеле составляет:  $X_1 = 10 \%$ ;

$X_2 = 20\%$ ;  $X_3 = 25\%$ ;  $X_4 = 15\%$ ;  $X_5 = 30\%$ . Беты акций относительно фондового индекса равны:  $\beta_1 = 0,5$ ;  $\beta_2 = 0,63$ ;  $\beta_3 = 0,8$ ;  $\beta_4 = 1,1$ ;  $\beta_5 = 1,3$ . Стандартное отклонение доходности индексного портфеля для одного дня составляет  $\sigma_1 = 1,5\%$ . Определить однодневный  $VaR_P$  портфеля с доверительной вероятностью 99 %.

**Решение.**  $VaR_P = k_{1-\alpha} \sigma_1 \beta_P P_P$ ;  $\beta_P = \sum_{i=1}^n X_i \beta_i$ ;  
 $\beta_P = 0,1 \cdot 0,5 + 0,2 \cdot 0,65 + 0,25 \cdot 0,8 + 0,15 \cdot 1,1 + 0,3 \cdot 1,3 = 0,935$ ;

$VaR_P = 2,33 \cdot 0,015 \cdot 0,935 \cdot 10000 = 326,783$  тыс. руб.

### 3. Расчёт форвардных цен актива

**Задача 3.1.** Цена спот акции 10 руб., безрисковая процентная ставка равна 10 %. Определить трёхмесячную форвардную цену акции.

**Решение.**  $F = S \left( 1 + r_f \frac{T}{\text{база}} \right) = 10 \left( 1 + 0,1 \cdot \frac{3}{12} \right) = 10,25$  руб.

(база - продолжительность финансового года)

**Задача 3.2.** Цена спот краткосрочной облигации 95 %. Безрисковая процентная ставка равна 10 %. Определить форвардную цену облигации с поставкой через два месяца.

**Решение.**  $F = S \left( 1 + r_f \frac{T}{\text{база}} \right) = 95 \left( 1 + 0,1 \cdot \frac{2}{12} \right) = 96,58\%$ .

**Задача 3.3.** Бескупонная облигация погашается через 120 дней. 30-дневная форвардная ставка без риска через 90 дней равна 10,94 % годовых. Определить 90-дневную форвардную цену бескупонной облигации. Финансовый год равен 365 дням.

**Решение.** Для вычисления форвардной цены бескупонной облигации помимо ранее рассмотренной формулы может быть использовано дисконтирование номинала по форвардной ставке:

$$F = \frac{100}{1 + 0,1094 \cdot \frac{30}{365}} = 99,11\%$$

**Задача 3.4.** Котировка спот доллара США к рублю равна: 28,3 руб. (цена покупателя) и 28,4 (цена продавца). 3-месячная рублёвая ставка по депозиту равна 4 %, а по кредиту - 10 % годовых. 3-месячная долларовая ставка по



депозиту равна 2 %, а по кредиту - 6 % годовых. Определить теоретические значения верхней и нижней границы форвардного курса доллара США к рублю.

**Решение.** 
$$F_{\text{в}} = S_{\text{ask}} \frac{1 + r_{\text{к}}^R \frac{T}{\text{база}}}{1 + r_{\text{д}}^I \frac{T}{\text{база}}}, \quad F_{\text{н}} = S_{\text{bid}} \frac{1 + r_{\text{д}}^R \frac{T}{\text{база}}}{1 + r_{\text{к}}^I \frac{T}{\text{база}}},$$

где  $F_{\text{в}}$  - верхняя граница форвардного курса;

$F_{\text{н}}$  - нижняя граница форвардного курса;

$S_{\text{ask}}$  - цена продавца;

$S_{\text{bid}}$  - цена покупателя;

$r_{\text{к}}^R$  и  $r_{\text{к}}^I$  - ставки по кредиту на рублёвом рынке и рынке иностранной валюты;

$r_{\text{д}}^R$  и  $r_{\text{д}}^I$  - ставки по депозиту на рублёвом рынке и рынке иностранной валюты.

$$F_{\text{в}} = 28,4 \cdot \frac{1 + 0,1 \cdot \frac{3}{12}}{1 + 0,02 \cdot \frac{3}{12}} = 28,96 \text{ руб}; \quad F_{\text{н}} = 28,3 \cdot \frac{1 + 0,04 \cdot \frac{3}{12}}{1 + 0,06 \cdot \frac{3}{12}} = 28,16 \text{ руб}.$$

#### 4. Расчёт цены форвардного контракта

**Задача 4.1.** Форвардный контракт на акцию был заключён некоторое время назад. До его окончания остаётся 90 дней. Цена поставки акции по контракту равна 86 руб. Цена спот акции равна 90 руб. Безрисковая процентная ставка составляет 10 % годовых. Лицо с **длинной позицией** перепродает контракт на вторичном рынке. Определить цену контракта. Финансовый год равен 365 дням.

**Решение.** Цена контракта  $f$  определяется по следующей формуле:

$$f = S - \frac{F_0}{1 + r_f \frac{T}{\text{база}}},$$

где  $F_0$  - цена поставки акции по контракту (контрактная цена);

$S$  - цена спот акции в момент перепродажи контракта;

$T$  - время до истечения форвардного контракта;

база - продолжительность финансового года;

$r_f$  - безрисковая процентная ставка.

$$f = 90 - \frac{86}{1 + 0,1 \cdot \frac{90}{365}} = 6,07 \text{ руб.}$$

Комментарий к полученному результату. Цена поставки 86 руб. в настоящее время эквивалентна 83,93 руб., т.е. акция должна иметь справедливую цену такой, чтобы через 90 дней она стоила 86 руб. Сейчас же она стоит 90 руб., т.е. новый владелец контракта покупает акцию дешевле рынка. Поэтому он должен доплатить продавцу разницу в 6,07 руб.

**Задача 4.2.** Форвардный контракт на акцию был заключён некоторое время назад. До его окончания остаётся 90 дней. Цена поставки акции по контракту равна 86 руб. Цена спот акции равна 90 руб. Безрисковая процентная ставка составляет 10 % годовых. Лицо с **короткой позицией** перепродает контракт на вторичном рынке. Определить цену контракта. Финансовый год равен 365 дням.

**Решение.** Цена контракта  $-f$  определяется по следующей формуле:

$$-f = -S + \frac{F_0}{1 + r_f \frac{T}{\text{база}}} = -90 + \frac{86}{1 + 0,1 \cdot \frac{90}{365}} = -6,07 \text{ руб.}$$

Комментарий к полученному результату. Цена поставки 86 руб. в настоящее время эквивалентна 83,93 руб., т.е. акция должна иметь справедливую цену такой, чтобы через 90 дней она стоила 86 руб. Сейчас же она стоит 90 руб., т.е. новый владелец контракта продаёт акцию дешевле рынка. Поэтому он должен получить от продавца компенсацию, равную 6,07 руб. Следовательно, чтобы освободиться от обязательств по контракту, продавец контракта должен уплатить новому владельцу 6,07 руб.

**Задача 4.3.** Форвардный контракт на акцию был заключён некоторое время назад. До его окончания остаётся 90 дней. Цена поставки акции по контракту равна 100 руб. Безрисковая процентная ставка составляет 7 % годовых. Какой должна быть цена спот акции на момент перепродажи контракта, чтобы его стоимость была равной нулю. Финансовый год равен 365 дням.

**Решение.** Цена контракта  $-f$  определяется по следующей формуле:

$$f = S - \frac{F_0}{1 + r_f \frac{T}{\text{база}}} = 0; \quad S = \frac{F_0}{1 + r_f \frac{T}{\text{база}}} = \frac{100}{1 + 0,07 \cdot \frac{90}{365}} = 98,30 \text{ руб.}$$

**Задача 4.4.** Форвардный контракт на акцию был заключён некоторое время назад. До его окончания остаётся 3 месяца. Цена поставки акции по контракту равна 100 руб. 3-месячная форвардная цена акции составляет 105 руб. Безрисковая процентная ставка равна 5 % годовых. Лицо с **длинной позицией** перепродает контракт на вторичном рынке. Определить цену контракта. Финансовый год равен 12 месяцам.

**Решение.** Формулу  $f = S - \frac{F_0}{1 + r_f \frac{T}{\text{база}}}$  можно привести к виду:

$f = \frac{F - F_0}{1 + r_f \frac{T}{\text{база}}}$  ( $F = S \left( 1 + r_f \frac{T}{\text{база}} \right)$  - форвардная цена акции в момент перепродажи контракта).

$$f = \frac{105 - 100}{1 + 0,05 \frac{3}{12}} = 4,94 \text{ руб.}$$

**Задача 4.5.** Форвардный контракт на акцию был заключён некоторое время назад. До его окончания остаётся 120 дней. Цена поставки акции по контракту равна 80 руб. Цена спот акции - 90 руб. Безрисковая процентная ставка равна 10 % годовых. Лицо с **длинной позицией** перепродает контракт на вторичном рынке по цене 12 руб. Возможен ли арбитраж? Перечислить действия арбитражёра и определить прибыль на момент истечения контракта. Финансовый год равен 365 дням.

**Решение.** Определяется теоретическая цена контракта:

$$f = S - \frac{F_0}{1 + r_f \frac{T}{\text{база}}} = 90 - \frac{80}{1 + 0,1 \cdot \frac{120}{365}} = 12,55 \text{ руб.}$$

Так как теоретическая цена не равна фактической цене, то арбитраж возможен.

Действия арбитражёра на споте:

- 1) производится "короткая" продажа акции по цене 90 руб. (акция занимается у брокера и продаётся по рыночной цене);
- 2) покупается форвардный контракт за 12 руб.;
- 3) оставшаяся денежная сумма  $90 - 12 = 78$  руб. размещается на депозите в банке под 10 % годовых на срок 120 дней.

Действия арбитражёра в момент истечения контракта:

1) снимаются деньги с депозита в сумме  $78 \cdot \left(1 + 0,1 \cdot \frac{120}{365}\right) = 80,56$  руб.;

2) исполняется форвардный контракт и покупается акция за 80 руб.;

3) акция возвращается брокеру.

Арбитражная прибыль составила  $80,56 - 80 = 0,56$  руб.

## 5. Расчёт форвардной цены акции, по которой выплачиваются дивиденды

**Задача 5.1.** Цена спот акции 100 руб. На акцию через 3 месяца будут выплачены дивиденды в размере 2 руб. Определить 3-месячную форвардную цену акции, если контракт истекает сразу после выплаты дивидендов. Безрисковая процентная ставка равна 8 % годовых.

**Решение.** Если дивиденды по акции выплачиваются в последний день действия форвардного контракта, то форвардная цена акции  $F$  определяется по следующей формуле:

$$F = S \left(1 + r_f \frac{T}{\text{база}}\right) - \text{div} = 100 \cdot \left(1 + 0,08 \cdot \frac{3}{12}\right) - 2 = 100 \text{ руб.}$$

**Задача 5.2.** Цена спот акции 100 руб. На акцию через 2 месяца будут выплачены дивиденды в размере 5 руб. Определить 3-месячную форвардную цену акции, если безрисковая процентная ставка на 2 месяца  $r_{f1}$  равна 4,4 % годовых, на 3 месяца  $r_{f2}$  - 4,6 % годовых.

**Решение.** Если дивиденды по акции выплачиваются в течение действия форвардного контракта, то форвардная цена акции  $F$  определяется по следующей формуле:

$$F = (S - \text{div}^*) \left(1 + r_{f2} \frac{T_2}{\text{база}}\right),$$

где 
$$\text{div}^* = \frac{\text{div}}{1 + r_{f1} \frac{T_1}{\text{база}}} = \frac{5}{1 + 0,044 \cdot \frac{2}{12}} = 4,96 \text{ руб.}$$

$$F = (100 - 4,96) \left(1 + 0,46 \cdot \frac{3}{12}\right) = 96,13 \text{ руб.}$$

**Задача 5.3.** Цена спот акции 100 руб. На акцию через 2 месяца будут выплачены дивиденды в размере 5 руб. Безрисковая процентная ставка на 2 месяца  $r_{f2}$  равна 4,4 % годовых, на 3 месяца  $r_{f3}$  - 4,6 % годовых. Определить 3-месячную форвардную цену акции на основе 1-месячной форвардной ставки через 2 месяца  $r_{f2,3}$ .

$$\text{Решение. } F = S \left( 1 + r_{f3} \frac{T_3}{\text{база}} \right) - \text{div} \left( 1 + r_{f2,3} \frac{T_3 - T_2}{\text{база}} \right),$$

где  $r_{f2,3}$  - форвардная ставка без риска для периода  $T_3 - T_2$ .

$$r_{f2,3} = \left( \frac{1 + r_{f3} \frac{T_3}{\text{база}}}{1 + r_{f2} \frac{T_2}{\text{база}}} - 1 \right) \frac{\text{база}}{T_3 - T_2} = \left( \frac{1 + 0,046 \cdot \frac{3}{12}}{1 + 0,044 \cdot \frac{2}{12}} - 1 \right) \cdot \frac{12}{3 - 2} = 0,0496 \text{ (4,96 \%)};$$

$$F = 100 \cdot \left( 1 + 0,046 \cdot \frac{3}{12} \right) - 5 \cdot \left( 1 + 0,0496 \cdot \frac{3 - 2}{12} \right) = 96,13 \text{ руб.}$$

**Задача 5.4.** Цена спот акции 200 руб. Через 3 месяца на акцию будут выплачены дивиденды в размере 10 руб. Безрисковая процентная ставка на 3 месяца  $r_{f3}$  равна 5,4 % годовых, на 5 месяцев  $r_{f5}$  - 6 % годовых. Фактическая 5-месячная форвардная цена акции равна 194,88 руб. Определить, возможен ли арбитраж.

**Решение.** Теоретическая форвардная цена акции  $F$  равна

$$F = (S - \text{div}^*) \left( 1 + r_{f5} \frac{T_5}{\text{база}} \right) = \left( 200 - \frac{10}{1 + 0,054 \cdot \frac{3}{12}} \right) \cdot \left( 1 + 0,06 \cdot \frac{5}{12} \right) = 194,88 \text{ руб.}$$

Теоретическая форвардная цена равна фактической, поэтому арбитраж не возможен.

## 6. Расчёт форвардной цены товара

**Задача 6.1.** Цена спот пшеницы равна 2000 руб. за тонну. Безрисковая процентная ставка для 90 дней составляет 6 % годовых. Расходы по хранению и страхованию тонны пшеницы за этот период составляют 50 руб. Определить 90-дневную форвардную цену пшеницы. Финансовый год равен 365 дням.

$$\text{Решение. } F = S \left( 1 + r_f \frac{T}{\text{база}} \right) + C,$$

где  $C$  - расходы по хранению и страхованию товара на период  $T$ .

$$F = 2000 \cdot \left( 1 + 0,06 \cdot \frac{90}{365} \right) + 50 = 2079,59 \text{ руб.}$$

**Задача 6.2.** Цена спот пшеницы равна 2000 руб. за тонну. Безрисковая процентная ставка для 180 дней составляет 6,5 % годовых. Расходы по хранению и страхованию пшеницы за этот период составляют 10 % годовых от спотовой цены. Определить 180-дневную форвардную цену пшеницы. Финансовый год равен 365 дням.

**Решение.** 
$$F = S \left( 1 + r_f \frac{T}{\text{база}} \right) + Sc \frac{T}{\text{база}} = S \left[ 1 + (r + c) \frac{T}{\text{база}} \right],$$

где  $c$  - годовой процент от стоимости товара, уплачиваемый за хранение и страхование товара.

$$F = 2000 \left[ 1 + (0,065 + 0,1) \frac{180}{365} \right] = 2162,74 \text{ руб.}$$

## 7. Расчёт внутренней доходности фьючерсных контрактов

**Задача 7.1.** Курс спот акции 100 руб. Определить внутреннюю доходность фьючерсного контракта, если 3-месячная фьючерсная цена равна 105 руб.

**Решение.** Внутренняя доходность фьючерсного контракта определяется из следующего выражения:

$$F = S \left( 1 + r \frac{T}{\text{база}} \right).$$

$$r = \left( \frac{F}{S} - 1 \right) \frac{\text{база}}{T} = \left( \frac{105}{100} - 1 \right) \cdot \frac{12}{3} = 0,2 (20 \%).$$

**Задача 7.2.** Курс спот акции, по которой не выплачиваются дивиденды, равен 50 руб. Безрисковая процентная ставка по депозиту составляет 5 %, а по кредиту - 16 % годовых. Оценить возможность совершения арбитражной операции, если 30-дневная фьючерсная цена равна: а) 50,76 руб.; б) 50,2 руб. Продолжительность финансового года (база) равна 365 дням.

**Решение:**

а) внутренняя доходность фьючерсного контракта равна:

$$r = \left( \frac{50,76}{50} - 1 \right) \cdot \frac{365}{30} = 0,1849 (18,49 \%).$$

Внутренняя доходность фьючерсного контракта выше ставки по кредиту, поэтому арбитраж возможен;

б) внутренняя доходность фьючерсного контракта равна:

$$r = \left( \frac{50,2}{50} - 1 \right) \cdot \frac{365}{30} = 0,0487 (4,87 \%).$$

Внутренняя доходность фьючерсного контракта ниже ставки по депозиту, поэтому арбитраж возможен.

## 8. Расчёт коэффициента хеджирования

**Задача 8.1.** Портфель инвестора состоит из акций трёх компаний. Акция компании  $A$  входит в портфель на сумму 500 тыс. руб., акция компании  $B$  входит в портфель на сумму 300 тыс. руб., акция компании  $C$  входит в портфель на сумму 200 тыс. руб. Бета акции  $A$  равно 0,9; - акции  $B$  равно 1,2; -акции  $C$  равно 1,5. На фондовый индекс торгуется фьючерсный контракт. Фьючерсная цена индекса равна 700 пунктам. Стоимость одного пункта индекса фьючерсного контракта равна 100 руб. Инвестор ожидает падения курса акций на следующий день и решает хеджировать свой портфель с помощью фьючерсных контрактов на фондовый индекс. Какое количество фьючерсных контрактов ему необходимо открыть?

**Решение.** Требуемое количество фьючерсных контрактов может быть определено на основании следующего выражения:

$$n = h \frac{P_p}{P_f},$$

где  $h$  - коэффициент хеджирования;

$P_p$  - стоимость портфеля ценных бумаг;

$P_f$  - стоимость фьючерсного контракта.

Можно считать, что  $h = \beta_p$ .

$$\beta_p = X_A \beta_A + X_B \beta_B + X_C \beta_C = 0,5 \cdot 0,9 + 0,3 \cdot 1,2 + 0,2 \cdot 1,5 = 1,11;$$

$$n = 1,11 \cdot \frac{1000000}{100 \cdot 700} = 15,85 \approx 16.$$

**Задача 8.2.** Портфель инвестора состоит из акций трёх компаний. Акция компании  $A$  входит в портфель на сумму 500 тыс. руб., акция компании  $B$  входит в портфель на сумму 300 тыс. руб., акция компании  $C$  входит в портфель на сумму 200 тыс. руб. Бета акции  $A$  равно 0,9; - акции  $B$  равно 1,2; -акции  $C$  равно 1,5. На фондовый индекс торгуется фьючерсный контракт. Фьючерсная цена индекса равна 700 пунктам. Стоимость одного пункта индекса фьючерсного контракта равна 100 руб. Инвестор ожидает роста курса акций на следующий день и решает увеличить бету своего портфеля до уровня 1,3 с помощью фьючерсных контрактов на фондовый индекс. Какое количество фьючерсных контрактов ему необходимо открыть?

**Решение.** 
$$n = h \frac{P_p}{P_f}; \quad h = \beta_n - \beta_p,$$

где  $\beta_n$  - новое бета портфеля, которое желает получить инвестор;

$\beta_p$  - текущая бета портфеля.

$$n = (1,3 - 1,11) \cdot \frac{1000000}{100 \cdot 700} = 2,71 \approx 3, \text{ т.е. следует купить три контракта.}$$

## 9. Расчёт форвардного валютного курса

**Задача 9.1.** Фактические спот и форвардные курсы доллара США равны соответственно 28,6 и 28,63 руб. Рублёвая безрисковая процентная ставка для 35 дней составляет 3,5 % годовых. Аналогичная долларова процентная ставка равна 2 %. Продолжительность финансового года (база) равна 365 дням. Определить, возможно ли проведение арбитражной операции. Рассчитать арбитражную прибыль и перечислить действия арбитражёра.

**Решение.** Рассчитывается теоретический форвардный курс:

$$k_F = 28,6 \cdot \frac{1 + 0,35 \cdot \frac{35}{365}}{1 + 0,02 \cdot \frac{35}{365}} = 28,64106 \text{ руб.}$$

Результаты расчёта показывают, что доллар с поставкой через 35 дней недооценён. Следовательно арбитраж возможен.

Действия арбитражёра на споте (расчёт ведётся на один доллар США):

- 1) покупается форвардный контракт;
- 2) осуществляется "короткая" продажа доллара США. Арбитражёр занимает доллар под 2 % годовых на 35 дней и продаёт его, т.е. конвертирует по спот-курсу 28,6 руб.;
- 3) полученная сумма размещается на рублёвом депозите на 35 дней под 3,5 % годовых.

Действия арбитражёра через 35 дней:

- 1) снимаются деньги с рублёвого депозита в сумме  $28,6 \cdot \left( 1 + 0,035 \cdot \frac{35}{365} \right) = 28,69599$  руб.;

- 2) исполняется форвардный контракт (покупается доллар по курсу 28,63 руб., т.е. конвертируются 28,69599 руб. в доллары США):  $28,69599 / 28,63 = \$1,002305$ ;

- 3) гасится долларовый кредит в сумме  $1 \cdot \left( 1 + 0,02 \cdot \frac{35}{365} \right) = \$1,001918$ .

Прибыль арбитражёра равна  $\$1,002305 - \$1,001918 = \$0,000387$ .

**Задача 9.2.** Фактические спот и форвардные курсы доллара США равны соответственно 28,6 и 28,65 руб. Рублёвая безрисковая процентная ставка для 35 дней составляет 3,5 % годовых. Аналогичная долларова процентная ставка равна 2 %. Продолжительность финансового года (база) равна 365 дням. Определить, возможно ли проведение арбитражной операции. Рассчитать арбитражную прибыль и перечислить действия арбитражёра.



**Решение.** Рассчитывается теоретический форвардный курс:

$$k_F = 28,6 \cdot \frac{1 + 0,35 \cdot \frac{35}{365}}{1 + 0,02 \cdot \frac{35}{365}} = 28,64106 \text{ руб.}$$

Результаты расчёта показывают, что доллар с поставкой через 35 дней переоценён. Следовательно арбитраж возможен.

Действия арбитражёра на споте (расчёт ведётся на один доллар США):

- 1) продаётся форвардный контракт;
- 2) берётся рублёвый кредит в сумме 28,6 руб. на 35 дней под 3,5 % годовых;
- 3) покупается \$1 и размещается на депозите в банке на 35 дней под 2 % годовых.

Действия арбитражёра через 35 дней:

- 1) снимаются деньги с долларового депозита в сумме  $\$1 \cdot \left(1 + 0,02 \cdot \frac{35}{365}\right) = \$1,001918$ ;
- 2) исполняется форвардный контракт, по которому доллары продаются за рубли по курсу 28,65 руб. В результате арбитражёр получает:  $1,001918 \cdot 28,65 = 28,70495$  руб.;

- 3) гасится рублёвый кредит в сумме  $28,6 \cdot \left(1 + 0,035 \cdot \frac{35}{365}\right) = 28,69599$  руб.

Прибыль арбитражёра равна  $28,70495 - 28,69599 = 0,008959$  руб.

**Задача 9.3.** Фактические спот и форвардный курсы доллара США равны соответственно 28,6 и 28,63 руб. Рублёвая безрисковая процентная ставка для 35 дней составляет 3,5 % годовых. Аналогичная долларовая процентная ставка равна 2 %. Продолжительность финансового года (база) равна 365 дням. Определить, возможно ли проведение арбитражной операции. Рассчитать арбитражную прибыль в долларах США по контракту в \$1 млн. и перечислить действия арбитражёра.

**Решение.** Рассчитывается теоретический форвардный курс:

$$k_F = 28,6 \cdot \frac{1 + 0,35 \cdot \frac{35}{365}}{1 + 0,02 \cdot \frac{35}{365}} = 28,64106 \text{ руб.}$$

Результаты расчёта показывают, что доллар с поставкой через 35 дней недооценён. Следовательно арбитраж возможен.

Действия арбитражёра на споте:

1) заключается форвардный контракт на покупку \$1 млн. через 35 дней с ценой исполнения 28,63 руб.;

2) осуществляется "короткая" продажа \$1 млн. Арбитражёр занимает доллары под 2 % годовых на 35 дней и продаёт их, т.е. конвертирует по спот-курсу 28,6 руб. Сумму, которую должен занять арбитражёр, можно рассчитать следующим образом:

$$\frac{28,63}{\left(1 + 0,35 \cdot \frac{35}{365}\right)} \cdot 1000000 = \$968543,0539$$

. После продажи долларов

арбитражёр получает сумму в рублях, равную  $968543,0539 \cdot 28,6 = 27700331,34$  руб.

3) полученная сумма размещается на рублёвом депозите на 35 дней под 3,5% годовых.

Действия арбитражёра через 35 дней:

1) снимаются деньги с рублёвого депозита в сумме  $27700331,34 \cdot \left(1 + 0,035 \cdot \frac{35}{365}\right) = 28630000$  руб.;

2) исполняется форвардный контракт (покупается доллар \$1 млн. по курсу 28,63 руб., при этом расходуется сумма, равная 28630000 руб.);

3) гасится долларовый кредит в сумме

$$\$968543,0539 \cdot \left(1 + 0,02 \cdot \frac{35}{365}\right) = \$970400,5335.$$

Прибыль арбитражёра равна  $\$1000000 - \$970400,5335 = \$29599,46648$ .

## 10. Расчёт форвардной процентной ставки

**Задача 10.1.** Имеются две бескупонные облигации номиналом 1000 руб. Первая облигация погашается через 60 дней. Её цена равна 987,02 руб. Вторая облигация погашается через 90 дней. Её цена равна 979,71 руб. Рассчитать форвардную процентную ставку для 30 дней через 60 дней, определяемую доходностями облигаций. Продолжительность финансового года (база) равна 365 дням.

**Решение.** Цена бескупонной облигации равна  $P = \frac{N}{1 + r \cdot \frac{T}{\text{база}}}$ . Из этой

формулы следует, что  $1 + r \cdot \frac{T}{\text{база}} = \frac{N}{P}$ .

На равновесном рынке форвардная процентная ставка  $r_{2,1}$  может быть определена из следующего равенства:

$$1 + r_2 \cdot \frac{T_2}{\text{база}} = \left( 1 + r_1 \cdot \frac{T_1}{\text{база}} \right) \left( 1 + r_{2,1} \cdot \frac{T_2 - T_1}{\text{база}} \right).$$

$$r_{2,1} = \left( \frac{1 + r_2 \cdot \frac{T_2}{\text{база}}}{1 + r_1 \cdot \frac{T_1}{\text{база}}} - 1 \right) \frac{\text{база}}{T_2 - T_1} = \left( \frac{N/P_2}{N/P_1} - 1 \right) \frac{\text{база}}{T_2 - T_1} = \left( \frac{P_1}{P_2} - 1 \right) \frac{\text{база}}{T_2 - T_1}.$$

$$r_{90-60} = \left( \frac{987,02}{979,71} - 1 \right) \cdot \frac{365}{90 - 60} = 0,0908 \text{ (9,08 \%)}.$$

**Задача 10.2.** Процентная ставка спот для двух лет равна 10 % годовых, для трёх лет - 11 % годовых. Определить форвардную процентную ставку для одного года через два года.

**Решение.** Зависимость между форвардной и спотовой процентными ставками на основе сложного процента имеет следующий вид:

$$(1 + r_n)^n = (1 + r_m)^m (1 + r_{n-m})^{n-m},$$

где  $r_n$  - процентная ставка спот для более продолжительного периода  $T_n$ ;

$r_m$  - процентная ставка спот для менее продолжительного периода  $T_m$ ;

$r_{n-m}$  - форвардная процентная ставка для периода  $T_n - T_m$ .

$$r_{n-m} = \sqrt[n-m]{\frac{(1 + r_n)^n}{(1 + r_m)^m}} - 1 = \sqrt[3-2]{\frac{(1 + 0,11)^3}{(1 + 0,1)^2}} - 1 = 0,1303 \text{ (13,03 \%)}.$$

**Задача 10.3.** Имеются две бескупонные облигации номиналом 1000 руб. Первая облигация погашается через 2 года. Её цена равна 826,45 руб. Вторая облигация погашается через 3 года. Её цена равна 674,97 руб. Рассчитать форвардную процентную ставку для одного года через два года, определяемую доходностями облигаций.

**Решение.** Цена бескупонной облигации равна  $P = \frac{N}{(1+r)^n}$ , откуда

$$(1+r)^n = \frac{N}{P}.$$

$$r_{n-m} = \sqrt[n-m]{\frac{(1+r_n)^n}{(1+r_m)^m}} - 1 = \sqrt[n-m]{\frac{N/P_n}{N/P_m}} - 1 = \sqrt[n-m]{\frac{P_m}{P_n}} - 1.$$

$$r_{3-2} = \frac{826,45}{674,97} - 1 = 0,2244 \text{ (22,44 \%)}.$$