Тема 1. Задачи исследования операций с целочисленными переменными

§ 1. Типы задач целочисленного программирования

В своей практической хозяйственной деятельности человек часто встречается с задачами, в которых переменные в силу их физического смысла могут принимать только целочисленные значения. К таким задачам относятся: задачи о раскрое, о размещении производства, о назначениях, о производстве неделимой продукции и многие другие.

При построении моделей таких задач надо вводить дополнительные условия целочисленности переменных. С таким дополнительным условием задачи исследований операций называются целочисленными. Изучением таких задач занимается целочисленное (дискретное) программирование. Если все остальные ограничения, кроме условия целочисленности являются линейными, то такие задачи называются задачами линейного целочисленного программирования (З.Л.Ц.П).

З.Л.Ц.П. бывают 2-х типов: задачи с неделимостями и задачи выбора вариантов или экстремальные комбинаторные задачи. В задачах с неделимостями переменные по-своему физическому смыслу не могут принимать дробные значения. Это задачи о выпуске неделимой продукции (автомобили, телевизоры и т.д.), о раскрое (количество деталей раскраиваемых тем или иным способом), задачи распределения станков по видам работ и т.д.

В задачах с неделимостями З.Л.Ц.П. формулируется также, как и соответствующая З.Л.П., но к системе ограничений добавляется требование целочисленности переменных. Если это требование накладывается на все переменные, то задача называется полностью целочисленной, если только на часть –частично целочисленной.

Второй тип задач – задачи выбора вариантов, часто встречаются в планировании и управлении. В задачах выбора переменные могут принимать только два значения: ноль или единица. Такие переменные называются булевыми переменными.

Одной из наиболее простых и первых задач такого типа – является задача о назначениях, сформулированная венгерским математиком Эгервари в 1932 г. Систематические исследования по целочисленному программированию начинаются с 1955 г. – когда на 2-м симпозиуме по математическому программированию была сформулирована задача о бомбардировщике, известная также, как задача о ранце.

§2. *Модель целочисленных задач исследования операций.*

Рассмотрим некоторые характерные задачи, требующие целочисленного решения. Некоторые задачи формально не являются целочисленными, но имеют целочисленные решения при любых целочисленных данных. К таким задачам относятся задачи сводящиеся к целочисленным. Рассмотрим постановку и математическую модель транспортной задачи.

Транспортная задача.

В пунктах A_1, A_2, . . . ,A_m сосредоточен некоторый однородный груз в количестве a_1, a_2,…,a_m соответственно. Этот груз надо вывести в пункты B_1, B_2,…, B_n в количестве b_1, b_2,…,b_n соответственно. Известна стоимость $C_{ij}, i=\overline{1,m}; j=\overline{1,n}$ перевозки единицы груза из пункта A_i $(i=\overline{1,m})$ в пункт B_j $(j=\overline{1,n})$. Обозначим через x_{ij} $(i=\overline{1,m}; j=\overline{1,n})$ количество груза, перевезенного из пункта A_i в пункт B_j . И пусть суммарные запасы грузов равны суммарным потребностям в них, т.е.

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j .$$

Необходимо найти такие значения перевозок:

$$x_{ij} \geq 0,\ i=\overline{1,m}; j=\overline{1,n}, \qquad (2.1)$$

которые удовлетворяют условиям

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, i=\overline{1,m}$$
$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, j=\overline{1,n} \qquad (2.2)$$

и минимизируют общую стоимость транспортировки грузов, т.е.

$$Z=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} C_{ij}x_{ij} \to \min \qquad (2.3)$$

Транспортная задача, т.е. задача (2.1) – (2.3) формально целочисленной не является, так мак на переменные задачи x_{ij} требование целочисленности не накладывается.

Заметим, что при любых целых значениях a_1, a_2,…,a_m и b_1, b_2, …,b_n транспортная задача всегда имеет целочисленный оптимальный план независимо от значений C_{ij}.

Действительно, решая задачу методом потенциалов замечаем, что
а) исходный опорный план является целочисленным;
б) при переходе от одного опорного плана к другому целочисленность сохраняется. Отсюда и следует целочисленность оптимального плана.

Для всех задач, сводящихся к транспортной существует целочисленный оптимальный план, при условии, что a_i ($i=\overline{1,m}$) и b_j ($j=\overline{1,n}$) являются целыми числами.

Задача о ранце. Для перевозки n видов неделимых предметов используется m видов ресурсов (транспортных средств), заданных в количестве $b_1, b_2,\ldots,b_m$.

Известны:
цена одного предмета j-го вида: C_j, $j=\overline{1,n}$; расход i-го ресурса для перевозки одного предмета j-го вида: $a_{ij}, i=\overline{1,m}; j=\overline{1,n}$.

Требуется определить сколько предметов каждого типа надо перевезти, чтобы суммарная стоимость ценность этих предметов была максимальной. Обозначим через x_j –количество выбранных для перевозки предметов j-го вида, $j=\overline{1,n}$. Математическая модель задачи запишется так:

Найти значения x_j, $j=\overline{1,n}$, которые удовлетворяют условиям:

$$x_j \geq 0,\ j=\overline{1,n} \qquad (2.4)$$

$$x_j \text{ – целые},\ j=\overline{1,n} \qquad (2.5)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i, i=\overline{1,m} \qquad (2.6)$$

и максимизируют функцию:

$$Z=\sum_{j=1}^{n} C_j x_j \to \max \qquad (2.7)$$

Условие (2.5) учитывает требование неделимости предметов, (2.6) – ограничения по ресурсам, (2.7) – выражает суммарную стоимость перевезенных предметов.

Частным случаем задачи (2.4) – (2.7) является задача, в которой любой из заданного набора предметов j = 1, 2, …, n, может быть выбран или нет. Переменные x_j могут принимать только два значения: 0 (предмет не выбирается) или 1 (предмет выбирается).

Математическая модель задачи запишется так:

Найти такие значения x_j, $j=\overline{1,n}$, которые удовлетворяют условиям:

$$x_j = \begin{cases} 0, \text{предмет не выбирается;} \\ 1, \text{предмет выбирается,} \end{cases} \qquad (2.8)$$

$$j = \overline{1,n}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, i = \overline{1,m} \qquad (2.9)$$

и максимизируют функцию

$$Z = \sum_{j=1}^{n} C_j x_j \to \max \qquad (2.10)$$

Задача (2.4) – (2.7) является задачей с неделимостями, а задача (2.8) – (2.10) – задачей выбора (с булевыми переменными).

<u>Задача о назначениях.</u> Имеется n работ и n исполнителей. Известны затраты C_{ij}, $i = \overline{1,n}; j = \overline{1,n}$ на выполнение i-ым исполнителем j-ой работы. Требуется назначить каждого исполнителя на одну и только одну работу так, чтобы суммарные затраты были минимальными. Обозначим через x_{ij} переменные, равные единице, если i-ый исполнитель назначен на j-ю работы и нулю – в противном случае.

Математическая модель задачи:

Найти значения x_{ij}, удовлетворяющие условиям:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, \text{если } i - \text{ый исполнитель выполняет } j - \text{ю работу;} \\ 0, \text{в противном случае,} \end{cases} \qquad (2.11)$$

$$j = \overline{1,n}; i = \overline{1,n}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, i = \overline{1,n} \qquad (2.12)$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, j = \overline{1,n} \qquad (2.13)$$

и минимизирующие функцию суммарных затрат, т.е.

$$Z = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} C_{ij} x_{ij} \to \min \qquad (2.14)$$

Условие (2.12) означает, что каждому исполнителю будет представлена работа и только одна; условие (2.13) , что на каждую работу будет назначен исполнитель и притом только один.

Условия (2.11) вообще говоря, сильно усложняют решение задачи. Однако, для данной задачи эти условия можно заменить на более простые: $x_{ij} \ge 0$, $j = \overline{1,n}$, $i = \overline{1,n}$. Это можно сделать, так как задачи (2.11) – (2.14) является частным случаем транспортной задачи, для которой всегда имеется целочисленное решение при целых величинах потребностей и запасов.

Особенности задач. В задачах целочисленного программирования область решений является невыпуклой и несвязной, поэтому решение таких задач связано с определенными трудностями. Казалось бы естественным решить вместо задачи целочисленного программирования соответствующую задачу линейного программирования, и если компоненты решения окажутся нецелыми числами, то округлить их до ближайших целых чисел. Очень часто полученное таким способом решение не только не является оптимальным, но оказывается и недопустимым. Оптимум в таких задачах может находится как на границе, так и внутри области и решений соответствующей З.Л.П.

Убедимся в этом на следующем примере.

<u>Пример.</u>

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$

x_1, x_2 – целые

$$\begin{cases} 2x_1 + 11x_2 \leq 38 \\ x_1 + x_2 \leq 7 \\ 4x_1 - 5x_2 \leq 5 \end{cases}$$

$Z = 2x_1 + x_2 \rightarrow \max$

Областью допустимых решений соответствующей задачи линейного программирования является многоугольник OABCD (см.рис.1), а оптимальное решение достигается в точке $X_1^*(4\frac{4}{9};2\frac{5}{9})$.

Отбросив обратные доли координат точки X_1^*, получим точку $X_ц(4;2)$, которая области допустимых решений задачи не принадлежит (нарушается третье ограничение). На самом деле оптимальное решение задачи целочисленного программирования достигается в точке $X_ц^*(3;2)$, которая в отличие от задачи линейного программирования не принадлежат границе области допустимых решений.

<u>Определение.</u> Точки, координатами которых является целые числа, называется целочисленными.

Рис.1 (см. в конце темы)

Таким образом, для решения задач целочисленного программирования необходимы специальные методы. Они делятся на три группы:

1. Методы отсечения или отсекающих плоскостей.
2. Комбинаторные методы.
3. Методы случайного поиска или эвристические методы

Познакомимся с идеями первых двух групп методов.

§3. Общая характеристика методов отсечения

Рассмотри задачу линейного целочисленного программирования (З.Л.Ц.П.):

$$Z = \sum_{j=1}^{n} C_j x_j \to \max \qquad (3.1)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, i = \overline{1,m} \qquad (3.2)$$

$$x_j \ge 0, \ j = \overline{1,n} \qquad (3.3)$$

$$x_j \text{ –целые, } j = \overline{1,n} \qquad (3.4)$$

где a_{ij} и b_i ($i = \overline{1,m}; j = \overline{1,n}$) – целые числа.

Пусть условия (3.2) , (3.3) определяют некоторый многогранник D_1, а условия (3.2) – (3.4) – множество $D_ц$ целочисленных точек решений исходной З.Л.Ц.П.

Для решения этой задачи можно использовать методы отсечения. Идея этих методов впервые была опубликована в работах американских математиков Данцига, Фалкерсона и Джонсона. Для задач целочисленного программирования эта идея впервые была описана Данцигом. Она заключается в следующем.

Пусть нам удалось построить выпуклую оболочку $D'_ц$ множества решений $D_ц$ задачи целочисленного программирования, так называемый, целочисленный многогранник $D'_ц$. Тогда задачу целочисленного программирования нахождения максимума целевой функции Z в области $D_ц$ можно заменить задачей линейного программирования отыскания максимума целевой функции Z в области $D'_ц$ так как оптимальное решение этой последней задачи совпадает с оптимальным решением исходной задачи (2.1) – (2.4). Так как выпуклую оболочку построить сразу трудно, Данциг предложил итерационный метод решения этой задачи. На каждом k-ом шаге строится промежуточный многогранник D_k, являющийся приближением к целочисленному, и решается соответствующая задача линейного программирования. Многогранник D_k получается отсечением от многогранника D_{k-1} некоторой его части, не содержащей целочисленных точек. Отсечение осуществляется введением дополнительного ограничения. Это ограничение обладает двумя свойствами:

1) ему удовлетворяют все целочисленные решения исходного З.Л.Ц.П.
2) оптимальное нецелочисленное решение З.Л.П. не удовлетворяет этому ограничению.

Такое ограничение называется правильным отсечением.

На основе этой идеи американский математик Гомори предложил алгоритм решения задач целочисленного программирования, он обосновал правила построения дополнительных ограничений, т.е. многогранников D_k и доказал сходимость алгоритма.

§4. Алгоритм Гомори.

Первый шаг. Решим задачу максимизации функции Z на многограннике D_1, т.е. задачу линейного программирования. (3.1) – (3.3) симплексным методом, предварительно приведя ее к стандартному виду. Через конечное число шагов получим оптимальную таблицу:

СП БП	x_1	x_2	…	x_n	x_{n+1}	x_{n+2}	…	x_{n+m}	b_i
x_{i1}	a'_{11}	a'_{12}	…	a'_{1n}	a'_{1n+1}	a'_{1n+2}	…	a'_{1n+m}	b'_1
x_{i2}	a'_{21}	a'_{22}	…	a'_{2n}	a'_{2n+1}	a'_{2n+2}	…	a'_{2n+m}	b'_2
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
x_{im}	a'_{m1}	a'_{m2}	…	a'_{mn}	a'_{mn+1}	a'_{mn+2}	…	a'_{mn+m}	b'_m
Z	q_1	q_2	…	q_n	q_{n+1}	q_{n+2}	…	q_{n+m}	Q

где x_{i1}, x_{i2}, …, x_{im} – базисные переменные множества всех переменных $\{x_1, x_2, \ldots, x_{n+m}\}$. В этой таблице: $q_j \geq 0$, $j = \overline{1, n+m}; b_i' \geq 0, i = \overline{1, m}$. Оптимальные значения базисных переменных:

[illegible] (4.1),

а свободные переменные равны нулю. Эти условия определяют оптимальное решение задачи (3.1) – (3.3), точку многогранника $D^{(1)}$. Если все b_i' – целые числа, то решение (4.1) является оптимальным решением задачи (3.1) – (3.4).

Если среди значений $b_i', i = \overline{1, m}$ есть хотя бы одно не целое – переходим ко второму шагу.

<u>Второй шаг</u>. Построение дополнительного ограничения – правильного сечения.

Пусть b_i' – не целое. Строим правильное отсечение по формуле:

$$\sum_{j=1}^{n+m} \alpha_{ij} x_j \geq \beta_i, \qquad (4.2)$$

где $\left.\begin{matrix} \alpha_{ij} = a_{ij}' - [a_{ij}'], \\ \beta_i = b_i' - [b_i'] \end{matrix}\right\}$, (4.3)

где $\lfloor a_{ij}' \rfloor$ и $\lfloor b_i' \rfloor$ - целые части чисел a_{ij}' и b_i' соответственно.

Так как все $b_i' \geq 0$, то $\beta_i > 0$. Значения α_{ij}, соответствующие целым значениям a_{ij}' равны нулю.

<u>Третий шаг</u>. Ограничение (4.2) добавляем к системе (3.2), (3.3) и решаем новую З.Л.П.

$$Z = \sum_{j=1}^{n} C_j x_j \to \max \qquad (3.1)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i, i = \overline{1, m} \qquad (3.2)$$

$$\sum_{j=1}^{n+m} \alpha_{ij} x_j \geq \beta_i \qquad (4.2)$$

$$x_j \geq 0, \ j = \overline{1, n} \qquad (3.3)$$

Условия (3.2), (3.3), (4.2) определяют многогранник D^2 ,которому принадлежат все целочисленные точки области D^1, но не принадлежит оптимальная нецелочисленная точка многогранника D^1.

Решаем задачу (3.1) – (3.3), (4.2) М-методом. Если полученное при этом оптимальное решение будет целочисленным, то оно и будет оптимальным решением исходной З.Л.Ц.П., если нет, то повторяем второй и третий шаги до тех пор, пока не будет получено оптимальное целочисленное решение, либо мы убедимся в неразрешимости задачи (3.1) – (3.4).

Если в симплексной таблице появится строка с нецелочисленным свободным членом, а остальные элементы этой – целые числа, то это означает, что соответствующее уравнение не имеет целочисленного решения и исходная З.Л.Ц.П. неразрешима.

Замечания:

1) При решении каждой новой З.Л.П. ограничение типа (4.2) приведенное к эквивалентному уравнению можно вводить непосредственно в оптимальную таблицу решения предыдущей задачи.
2) Студенты изучившие тему «Двойственный симплекс-метод», могут применять его для решения задач построенных на третьем шаге.

<u>Пример.</u>

Решить З.Л.Ц.П. методом Гомори.

$$Z = 4x^1 + 5x^2 \rightarrow \max$$

[illegible]

<u>1-й шаг.</u> Приведем к стандартному виду исходную З.Л.П. и решим ее симплекс-методом.

$$x_j \geq 0;\ j = \overline{1,5}$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 10 \\ x_1 + 4x_2 + x_4 = 11 \\ 3x_1 + 3x_2 + x_5 = 13 \end{cases} \qquad (4.4)$$

$$Z = 4x^1 + 5x^2 + 0\cdot x^3 + 0\cdot x^4 + 0\cdot x^5 \rightarrow \max$$

	C^j	4	5	0	0	0	b^i	$\min\limits_{a_{is}>0} \frac{b_i}{a_{is}}$
C^i	x^j / x^i	x^1	x^2	x^3	x^4	x^5		
0	x^3	3	2	1	0	0	10	10/2
0	x^4	1	4	0	1	0	11	11/4 min
0	x^5	3	3	0	0	1	13	13/3
Z		-4	-5↑	0	0	0	0	
0	x^3	10/4	0	1	-2/4	0	18/4	18/4:10/4=18/10 min
5	x^2	1/4	1	0	1/4	0	11/4	11/4:1/4=11
0	x^5	9/4	0	0	-3/4	1	19/4	19/4:9/4=19/9
Z		-11/4↑	0	0	5/4	0	55/4	
4	x^1	1	0	4/10	-2/10	0	18/10	
5	x^2	0	1	-1/10	3/10	0	23/10	
0	x^5	0	0	-9/10	-3/10	1	7/10	
Z		0	0	11/10	7/10	0	187/10	

Оптимальное решение:

$X^* = (18/10;\ 23/10;\ 0;\ 0;\ 7/10);\ Z(X^*) = 187/10$

Решение нецелочисленное, переходим ко второму шагу.

2-ой шаг. Строим правильное отсечение по любой из строк, соответствующих нецелочисленной переменной, например по 3-й строке, соответствующей базисной переменной x_3.

$\alpha_{31}x_1 + \alpha_{32}x_2 + \alpha_{33}x_3 + \alpha_{34}x_4 + \alpha_{35}x_5 \geq \beta_3$.

В этом неравенстве α_{31}, α_{32} и α_{35} равны нулю, они соответствуют значением $a'_{31} = 0; a'_{32} = 0; a'_{35} = 1$.

$$\alpha_{33} = -\frac{9}{10} - \left[-\frac{9}{10}\right] = -\frac{9}{10} - (-1) = \frac{1}{10},$$

$$\alpha_{34} = -\frac{3}{10} - \left[-\frac{3}{10}\right] = -\frac{3}{10} - (-1) = \frac{7}{10},$$

$$\beta_3 = \frac{7}{10} - \left[\frac{7}{10}\right] = \frac{7}{10} - 0 = \frac{7}{10}.$$

Новое ограничение имеет вид:

$$\frac{1}{10}x_3 + \frac{7}{10}x_4 \geq \frac{7}{10} \qquad (4.5)$$

3-й шаг. Вводим это ограничение в систему ограничений исходной З.Л.П. (4.4) и полученную задачу приводим к стандартному виду. Неравенство (4.5) эквивалентно уравнению

$\frac{1}{10}x_3 + \frac{7}{10}x_4 - x_6 = \frac{7}{10}$, где $x_6 \geq 0$.

Новая З.Л.П. имеет вид:

$$x_j \geq 0;\ j = \overline{1,6}$$

(4.6)

$Z = 4x^1 + 5x^2 + 0 \cdot x^3 + 0 \cdot x^4 + 0 \cdot x^5 + 0 \cdot x^6 \to \max$

Первые 3 уравнения задачи эквивалентны уравнения приведенным к базисным переменным x^1, x^2, x^5, которые выписываем из последней таблицы решения исходной З.Л.П.; с учетом этого задача (4.6) будет иметь вид:

$$x_j \geq 0;\ j = \overline{1,6}$$

$$\begin{cases} x_1 + 4/10x_3 - 2/10x_4 = 18/10 \\ x_2 - 1/10x_3 + 3/10x_4 = 23/10 \\ -9/10x_3 - 3/10x_4 + x_5 = 7/10 \\ 1/10x_3 + 7/10x_4 - x_6 = 7/10 \end{cases} \qquad (4.7)$$

$Z = 4x^1 + 5x^2 + 0 \cdot x^3 + 0 \cdot x^4 + 0 \cdot x^5 + 0 \cdot x^6 \to \max$

Так как в четвертом уравнении переменная x_6 входит со знаком минус, введем в него базисную искусственную переменную $x_6 \geq 0$ и решим следующую M-задачу.

$$x_j \geq 0;\ j = \overline{1,7}$$

(4.8)

$T = 4x^1 + 5x^2 + 0 \cdot x^3 + 0 \cdot x^4 + 0 \cdot x^5 + 0 \cdot x^6 - Mx^7 \to \max$

C^j / C^i / x^j x^i		4	5	0	0	0	0	$-M$	b^i	$\min\limits_{a_{is}>0} \frac{b_i}{a_{is}}$
C^i	x^j x^i	x^1	x^2	x^3	x^4	x^5	x^6	x^7		
4	x^1	1	0	4/10	-2/10	0	0	0	18/10	—
5	x^2	0	1	-1/10	3/10	0	0	0	23/10	23/10:3/10=23/3
0	x^5	0	0	-9/10	-3/10	1	0	0	7/10	—
-*M*	X^7	0	0	1/10	7/10	0	-1	1	7/10	7/10:7/10=1min
T		0	0	-1/10*M*+11/10	-7/10*M*+7/10↑	0	*M*	0	-7/10*M*+187/10	
4	x^1	1	0	3/7	0	0	-2/7	2/7	2	
5	x^2	0	1	-1/7	0	0	3/7	-3/7	2	
0	x^5	0	0	-6/7	0	1	-3/7	3/7	1	
0	x^4	0	0	1/7	1	0	-10/7	10/7	1	
T		0	0	1	0	0	1	*M*-1	18	

Оптимальное решение *M*-задачи: $\tilde{X}^*$=(2, 2, 0, 1, 1, 0, 0); $T_{\max} = T(\tilde{X}^*) = 18$.

Искусственная переменная $x_7 = 0$, поэтому оптимальным решением задачи (4.7) будет соответствующее решение:

X^*=(2, 2, 0, 1, 1, 0); $Z_{\max} = T_{\max} = 18$.

Значения всех переменных целочисленные, поэтому оптимальное целочисленное решение исходной З.Л.Ц.П.:

$X^*_ц$= (2;2); $Z_{\max}$ = 18.

Задачу (4.6) можно решить двойственным симплекс-методом. Для этого 4-е уравнение умножим на «–1» (левую и правую части), уравнение будет иметь базисную переменную x_6, но исходное решение системы уравнений полученной задачи будет базисным, но не опорным. Это уравнение: $-\frac{1}{10}x_3 - \frac{7}{10}x_4 \quad + x_6 = -\frac{7}{10}$ введем непосредственно в последнюю оптимальную симплекс-таблицу решения исходной З.Л.П., добавив к ней столбец и строку соответствующие переменной x_6. исходная таблица будет иметь вид.

C_j / C_i		4	5	0	0	0	0	b_i
C_i	x_j x_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
4	x_1	1	0	4/10	-2/10	0	0	18/10
5	x_2	0	1	-1/10	3/10	0	0	23/10

0	x_5	0	0	-9/10	-3/10	1	0	7/10
0	x_6	0	0	-1/10	-7/10	0	1	-7/10
Z		0	0	11/10	7/10	0	0	187/10

Исходное базисное, но не опорное решение выписываем из этой таблицы: $X_0 = (18/10, 23/10, 0,0,7/10,-7/10)$

Двойственный симплекс-метод устраняет отрицательность в свободных членах b_i и сохраняет неотрицательность оценок в Z-строке.

Правила двойственного симплекс-метода.

В качестве разрешающей строка r выбираем строку с $b_i < 0$. Если таких строк несколько выбираем любую из них. Разрешающий столбец выбираем по правилу:

$$\max_{a_{rj}<0} \frac{\Delta_j}{a_{rj}} = \frac{\Delta_s}{a_{rs}},$$ т.е.

элементы Z-строки делим на соответствующие отрицательные элементы разрешающей строки r и из этих отношений выбираем максимальное.

Столбец s, соответствующей максимальному отношению будет разрешающим, а элемент a_{rs} – разрешающим элементом.

В рассмотренном примере, в таблице строка соответствующая отрицательному свободному члену: – 7/10 будет разрешающей.

Находим разрешающий элемент:

$$\max_{a_{rj}<0} \frac{\Delta_j}{a_{rj}} = \max(11/10:(-1/10);7/10:(-7/10)) = \max(-11;-1) = -1.$$

Разрешающий элемент: –7/10. Отметим его в таблице и выполним одно полное исключение неизвестной, одну итерацию, получим следующую таблицу, отличающуюся от оптимальной таблицы решения M-задачи только столбцом x_7. Из нее выписываем ранее полученное решение.

C_i	C_j	4	5	0	0	0	0	b_i
	x_j / x_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
4	x_1	1	0	3/7	0	0	-2/7	2
5	x_2	0	1	-1/7	0	0	3/7	2
0	x_5	0	0	-6/7	0	1	-3/7	1
0	x_4	0	0	1/7	1	0	-10/7	1
Z		0	0	1	0	0	1	18

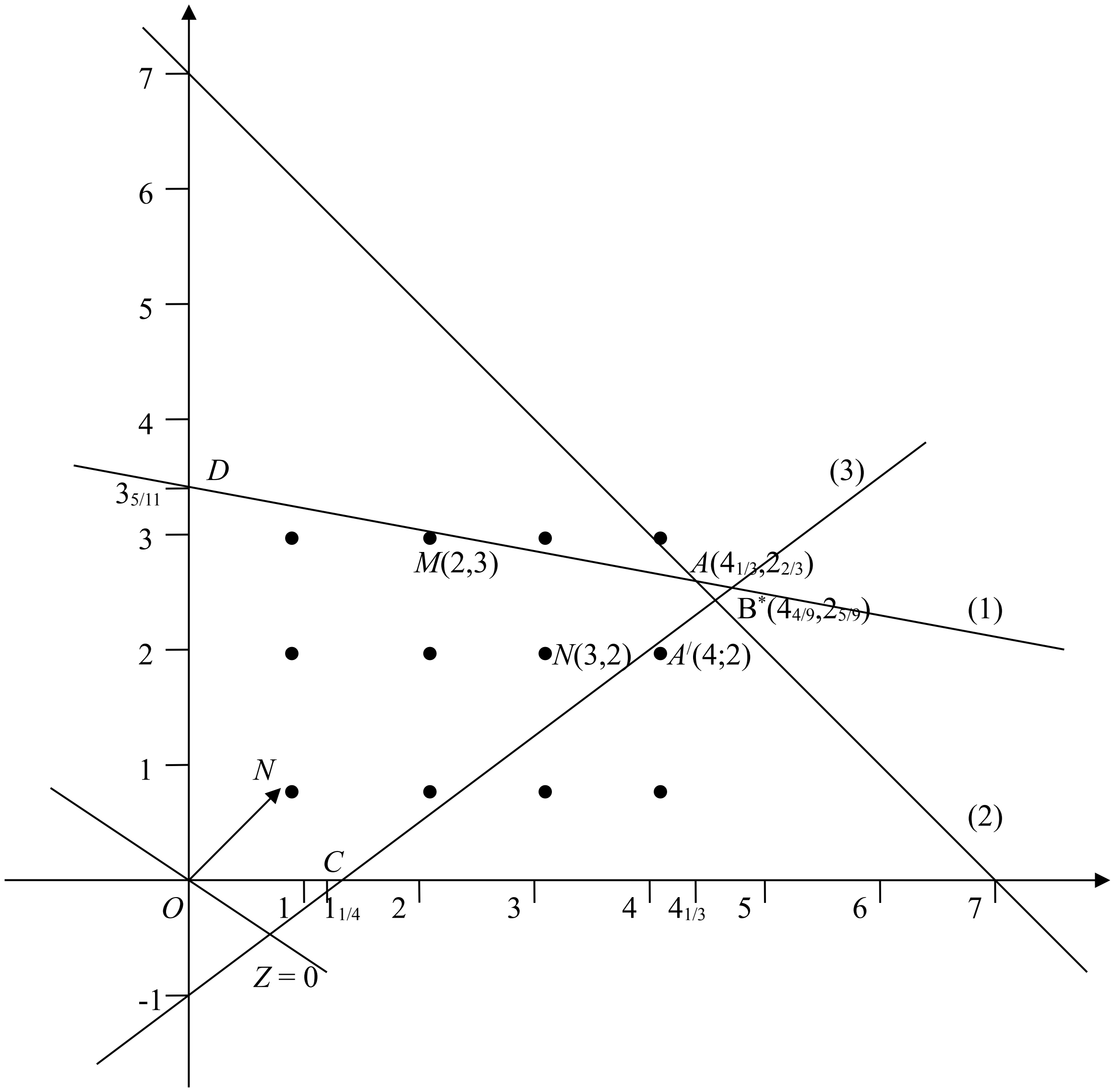
7
6
5
4
D
$3_{5/11}$
3
2
1
-1
(3)
(1)
(2)
$M(2,3)$
$A(4_{1/3},2_{2/3})$
$B^*(4_{4/9},2_{5/9})$
$N(3,2)$
$A'(4;2)$
N
C
O
1
$1_{1/4}$
2
3
4
$4_{1/3}$
5
6
7
$Z = 0$

Рис. 1