Раздел 3. Математические и инструментальные методы портфельного анализа

Портфельный анализ. Модель Марковица. Формирование таблицы вариантов инвестиционных портфелей. Поддержка решений при оптимизации портфельных инвестиций в условиях стабильной и нестабильной экономики.

Тема 3.1. Портфельный анализ. Модель Марковица

Портфельная теория Марковица (англ. mean-variance analysis) — подход, основанный на анализе ожидаемых средних значений и вариаций случайных величин) — разработанная Гарри Марковицем методика формирования инвестиционного портфеля, направленная на оптимальный выбор активов, исходя из требуемого соотношения доходность/риск. Сформулированные им в 1950-х годах идеи составляют основу современной портфельной теории (https://ru.wikipedia.org/wiki/Портфельная_теория_Марковица).

Можно рассмотреть два различных подхода к формированию портфеля.

Первый связан с выбором активов, доходность которых стабильна, но существует не нулевая вероятность потери активов. Тогда цель портфельного анализа состоит в определении оптимального набора активов, при котором риски потерь являются минимальными. Данная стратегия портфельного анализа выражена рекомендацией: «не храните яйца (деньги) в одной корзине (в одном банке, одном активе)».

Второй подход, для которого применима теория Марковица, состоит в выборе совокупности компенсационных активов. Считается, что доходность активов является случайной величиной, но вероятности их полных потерь нулевые. Тогда цель портфельного анализа состоит в выборе совокупности активов, которая обеспечит высокую среднюю доходность (критерий 1) и минимальное отклонение уровня дохода от этого среднего (критерий 2 – риск должен быть минимальным). Снижение риска достигается использованием компенсационных активов, коэффициент корреляции доходностей которых является отрицательным. Модель Марковица позволяет выбрать *оптимальный набор компенсационных активов с высокой средней доходностью.*

При записи модели используются свойства математического ожидания и формула математического ожидания суммы случайных величин. Пусть для формирования оптимального портфеля выбраны n активов, доходность которых на период инвестирования – случайные величины $Q_i,\ i=1,\dots,n$ с математическими ожиданиями $\bar{Q}_i,\ i=1,\dots,n$ и дисперсиями $D[Q_i],\ i=1,\dots,n$. Пусть $x_i,\ i=1,\dots,n$ – доли использования каждого актива в формируемом портфеле, которые удовлетворяют условиям:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i=1,\ x_i\geq 0,\ \ i=1,\dots,n. \qquad (3.1)$$

Тогда доходность портфеля Q_P на периоде инвестирования – случайная величина, которая зависит от доходности активов и определяется по следующей формуле:

$$Q_P=\sum_{i=1}^{n} x_i\cdot Q_i. \qquad (3.2)$$

Найдем математическое ожидание (среднее значение) доходности $\bar{Q}_P$:

$$M[Q_P]=M\left[\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot Q_i\right]=\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot M[Q_i].$$

Формулу для средней доходности портфеля можно записать в более наглядном виде:

$$\bar{Q}_P=\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \bar{Q}_i. \tag{3.3}$$

Из формулы (3.3) следует, что средняя доходность формируемого портфеля определяется средними доходностями активов и долями их включения в портфель.

Найдем выражение для дисперсии доходности портфеля $D[Q_P]$:

$$D[Q_P]=M[(Q_P-\bar{Q}_i)^2]=M\left[\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot (Q_i-\bar{Q})\right)^2\right].$$

Откуда получаем формулу для дисперсии портфеля в матричной записи:

$$D[Q_P]=x \cdot K \cdot x^T. \tag{3.4}$$

Здесь вектор $x=(x_1,\, x_2, \ldots, x_n)$ – доли активов размерностью (1 × n); x^T – вектор столбец долей активов размерностью (n × 1); K – ковариационная матрица активов, которая отражает взаимозависимость доходностей выбранных активов, размерностью (n × n).

Модель Марковица предписывает выбор оптимального вектора $x^{¿}$ долей, при котором средняя доходность портфеля должна быть не меньше заданной инвестором величины P_0 (ограничение на критерий 1), а уровень риска отклонения доходности от средней величины был бы минимальным (минимизация критерия 2). Математически модель записывается с использованием выражений (3.1), (3.3), (3.4) в следующем виде. Найти $x^{¿}$ из условий:

$$D[Q_P]=x \cdot K \cdot x^T \rightarrow \min; \tag{3.5}$$

$$\bar{Q}_P=\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \bar{Q}_i \geq P_0; \tag{3.6}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i=1,\ x_i \geq 0,\ i=1, \ldots, n. \tag{3.7}$$

Задание 3.1. Доказать, что средний уровень доходности портфеля $\bar{Q}_P$ изменяется в пределах: $Q_{MIN}=\min(\bar{Q}_1;\, \bar{Q}_1; \ldots; \bar{Q}_n) \leq \bar{Q}_P \leq \max(\bar{Q}_1;\, \bar{Q}_1; \ldots; \bar{Q}_n)=Q_{MAX}$, т.е. от минимальной средней Q_{MIN} до максимальной средней Q_{MAX} доходностей выбранных активов:

$$Q_{MIN} \leq \bar{Q}_P \leq Q_{MAX}. \tag{3.8}$$

Учитывая утверждение в задании 3.1, аналитику следует рекомендовать инвестору указанные там границы для выбора требуемой доходности P_0.

Рассмотрим уровни риска для оценок реальной доходности портфеля. Обозначим границы доходности портфеля: **%Низ** и **%Верх**. Математическая статистика дает следующие доверительные интервалы для реальной доходности портфеля (см. формулу (3.2)):

%Низ $¿ Q_P \le$ **%Верх**, где **%Низ** = $\bar{Q}_P - t_\alpha \sqrt{D[Q_P]}$; **%Верх** = $\bar{Q}_P + t_\alpha \sqrt{D[Q_P]}$. (3.9)

Здесь t_α – квантиль распределения доходности, определяемый заданным уровнем доверительной вероятности (для нормального распределения Q_P и уровня значимости 5% $t_\alpha = 1.96$).

Задание 3.2. Провести сравнение приведенных формул модели Марковица (3.5) – (3.7), границ изменения средней доходности портфеля (3.8) и уровней риска доходности (3.9) с формулами программы «Портфельный анализ СЭ.xls». Указать номера ячеек листа Excel, в которых вычисляются соответствующие величины.

Тема 3.2. Портфельный анализ. Формирование таблицы вариантов инвестиционных портфелей

Для использования модели Марковица на практике необходимо найти вероятностные оценки ее параметров (эта задача решается в ***Теме 3.3***) и обосновать выбор уровня средней доходности портфеля P_0. Эту задачу решаем в данном разделе путем формирования таблицы вариантов инвестиционных портфелей при разных значениях P_0. В таблице 3.1 приведены 10 вариантов портфеля, сформированного из 5 активов (расчеты проведены в среде Excel).

Таблица 3.1. Пример вариантов портфеля, полученных с использованием модели Марковица при изменении P_0 равномерно в пределах 1,8% до 5.1%.

№ вар	A1	A2	A3	A4	A5	СД %	ДИ%	**%Низ**	**%Верх**
1	0,87	0,00	0,00	0,13	0,00	2,73%	1,03%	1,69%	3,76%
2	0,87	0,00	0,00	0,13	0,00	2,73%	1,03%	1,69%	3,76%
3	0,87	0,00	0,00	0,13	0,00	2,73%	1,03%	1,69%	3,76%
4	0,74	0,00	0,00	0,26	0,00	2,93%	1,06%	1,87%	3,98%
5	0,51	0,00	0,00	0,49	0,00	3,29%	1,20%	2,09%	4,49%
6	0,29	0,00	0,00	0,71	0,00	3,65%	1,44%	2,21%	5,09%
7	0,06	0,00	0,00	0,94	0,00	4,01%	1,73%	2,28%	5,75%
8	0,00	0,00	0,27	0,73	0,00	4,38%	2,13%	2,24%	6,51%
9	0,00	0,00	0,63	0,37	0,00	4,74%	2,59%	2,15%	7,33%
10	0,00	0,00	1,00	0,00	0,00	5,10%	3,07%	2,03%	8,17%

В приведенной таблице первые три портфеля совпадают по всем параметрам, так как при выбранных исходных данных ограничение (3.6) модели Марковица выполняется как строгое неравенство. По остальным портфелям наблюдается закономерность в изменении долей активов A1 – A5, включенных в портфель (см. данные столбцов 2 – 6 таблицы). Характерным свойством таблицы вариантов является увеличение риска доходности, определяемого величиной доверительного интервала (столбец ДИ%), с ростом средней доходности P_0 (столбец данных СД%).

Задача аналитика состоит в обосновании рекомендации для инвестора по выбору оптимального варианта портфеля. Данная задача может быть решена с использованием экономико-математических методов принятия решений в условиях риска и неопределенности.

При использовании максиминных стратегий (принцип максимальной гарантированной доходности портфеля) оптимальным вариантом в таблице 3.1 следует считать портфель 7.

Задание 3.3. Пояснить порядок выбора варианта 7 и дать его полную характеристику.

Задание 3.4. Обосновать порядок проведения дополнительных расчетов при необходимости повышения точности расчетов оптимального портфеля.

Тема 3.3. Поддержка решений при оптимизации портфельных инвестиций в условиях стабильной и нестабильной экономики

Проведенный выше портфельный анализ базировался на использовании теоретических знаниях и в модели Марковица использованы теоретические модели процессов. Однако в настоящее время не существует теории для оценок параметров этой модели: ковариационной матрицы K в формуле (3.4) и прогнозов $\bar{Q}_i,\ i=1,\dots,n$ средних доходностей выбранных активов в формуле (3.3). На практике эти количественные данные оцениваются на основе эмпирического подхода (на основе наблюдений количественных данных).

Следует иметь в виду, что основной принцип эмпирического подхода «так было, так будет!» не всегда выполняется. Эмпирические знания верны для стабильной экономики, для которой комплекс закономерностей формирования событий в прошлом без изменения может быть перенесен на будущее. Тогда для оценок K и $\bar{Q}_i,\ i=1,\dots,n$ можно использовать временные ряды совместных значений доходностей в прошлом и статистические методы их обработки. Пример исходных данных квартальных доходностей 5 активов представлен в таблице 3.2.

Таблица 3.2. Квартальные наблюдения процентных ставок по финансовым инструментам

№ квартала	1	2	3	4	5
1	2,5%	-1,4%	2,2%	2,3%	-2,6%
2	2,9%	4,9%	6,8%	4,8%	3,8%
3	2,4%	1,6%	4,9%	3,7%	0,1%
4	1,8%	2,5%	4,0%	3,4%	0,6%
5	2,2%	4,7%	6,1%	4,8%	2,5%
6	3,5%	4,7%	7,0%	5,5%	6,6%
7	3,3%	-0,4%	2,9%	3,2%	-1,6%
8	2,1%	2,9%	5,5%	4,1%	1,9%
9	1,8%	3,3%	5,9%	4,2%	1,6%
10	2,0%	0,1%	3,3%	3,2%	0,3%
11	3,0%	4,9%	6,8%	5,2%	4,5%
12	2,6%	4,2%	5,8%	4,9%	4,4%
Сред	2,51%	2,67%	5,10%	4,11%	1,84%

На основе этих исходных данных в условиях стабильной экономики можно оценить требуемые параметры. Средние доходности $\bar{Q}_i,\ i=1,\ldots,5$ активов приведены в последней строке таблицы 3.2, а ковариационная матрица, вычисленная с использованием встроенной функции КАВАР() приведена в таблице 3.3.

Эмпирический подход для оценки параметров модели Марковица может быть использован в условиях нестабильной экономики, т.е. экономики, для которой в будущем сохраняются тенденции изменений экономических показателей. Тогда для поиска данных, аналогичных таблицам 3.2 и 3.3 применяют эконометрические методы анализа временных рядов.

Таблица 3.3. Оценки ковариационной матрицы K формулы (3.4) по данным таблицы 3.2.

i\j	1	2	3	4	5
1	2,925E-05	1,667E-05	1,948E-05	1,877E-05	5,062E-05
2	1,667E-05	0,000456	0,000323	0,000188	0,000498
3	1,948E-05	0,000323	0,000245	0,000139	0,000368
4	1,877E-05	0,000188	0,000139	0,000086	0,000229
5	5,062E-05	0,000498	0,000368	0,000229	0,000659

Состояние экономики, для которой принципы эмпирического моделирования процессов неприменимы, называется кризисной. Профессиональные знания и опыт аналитика направлены на надежную оценку состояния экономики при решении конкретной аналитической задачи.

Методические подходы портфельного анализа в среде Excel с использованием инструмента «Поиск решения» в условиях стабильной и нестабильной экономик приведены в описании соответствующих лабораторных работ.