

## ТЕМА 16

### КОЛЕБАНИЯ УПРУГИХ СИСТЕМ

#### 16.1. Основные определения теории колебаний. Классификация механических колебаний

Теория колебаний представляет собой обширный раздел современной физики, охватывающий весьма широкий диапазон вопросов механики, электротехники, радиотехники, оптики и т.д. Особое значение имеет *теория механических колебаний* для решения прикладных задач, встречающихся в инженерной практике, в частности, задач прочности машин и сооружений. Известны случаи, когда строительные сооружения, рассчитанные с большим запасом прочности на статическую нагрузку, разрушались под действием сравнительно небольших периодически действующих сил. Во многих случаях жесткая и весьма прочная конструкция оказывается непригодной при наличии переменных сил, в то время, как такая же более легкая, и на первый взгляд менее прочная конструкция воспринимает эти усилия совершенно безболезненно. Поэтому вопросы колебаний и вообще поведения упругих систем под действием переменных нагрузок требуют от конструктора особого внимания.

Для совершения колебания тело должно иметь определенную *массу и упругость*. Если упругое тело (нагруженные рама и балка, скручиваемый вал и т.д.) вывести из состояния равновесия с помощью какого-либо внешнего воздействия, то сила упругости этого тела не уравновесится приложенной нагрузкой и возникнут колебания.

##### 16.1.1. Кинематическая классификация механических колебаний

Существуют несколько классификаций колебательных процессов. Одна из таких классификаций называется *кинематической*. Эта классификация включает в себя все механические колебания в соответствии с видом закона, по которому величина, характеризующая колебательный процесс, изменяется во времени. В соответствии с кинематической классификацией все колебания делятся на *периодические, непериодические и почти периодические*. Последние принадлежат к промежуточному классу колебаний, который занимает особое место в технике.

*Периодические колебания* описываются периодической функцией, значение которой повторяется через определенный отрезок времени  $T$ , называемый *периодом колебаний*:

$$f(t + T) = f(t)$$

при любом значении переменной  $t$ .

*Непериодическими* называются функции, не удовлетворяющие указанному условию.

*Почти периодические функции* определяются условием:

$$|f_1(t + \tau) - f_1(t)| \leq \varepsilon$$

при любом  $t$ , где  $\tau$  и  $\varepsilon$  - некоторые постоянные величины. Если  $\varepsilon$  очень мало по сравнению со средним значением модуля функции  $f_1(t)$  за время  $t$ , то почти периодическая функция будет близка к периодической, в которой  $\tau$  будет *почти периодом*.

К наиболее распространенным периодическим колебаниям относятся *гармонические* или *синусоидальные* колебания, при которых изменение физической величины со временем происходит по синусоиде или косинусоиде. Гармонические колебания являются *незатухающими* колебаниями.

Непериодические колебания более разнообразны, чем периодические. Чаще всего такие колебания являются *затухающими* (Рис.16.1,а) либо *нарастающими* гармоническими колебаниями (Рис.16.1,б).

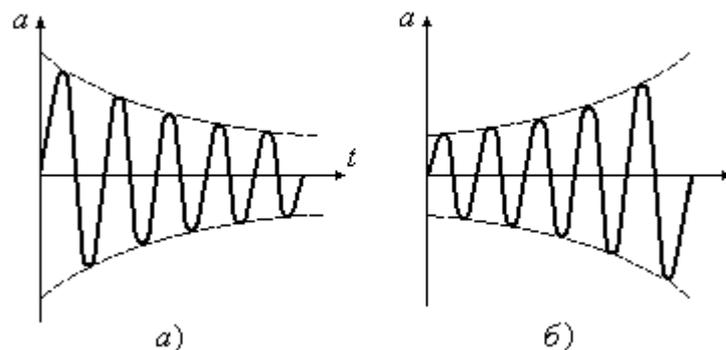


Рис.16.1

Уравнение затухающих колебаний имеет вид:

$$y = A e^{-nt} \cos(\omega \cdot t + \alpha), \quad (16.1)$$

где  $A, n, \alpha, \omega$  - постоянные величины;  $t$  - время.

Нарастающие гармонические колебания математически описываются аналогично (16.1), только знак при  $nt$  следует заменить на “плюс”.

В названии “затухающие гармонические колебания”, очевидно, нет логики, так как гармонические колебания не затухают вообще. Тем не менее, этим названием пользуются на практике.

### 16.1.2. Классификация колебаний по основным физическим признакам

Классификация колебательных процессов по внешним признакам не является достаточной. Поэтому она должна быть дополнена классификацией колебаний по основным физическим признакам.

При исследовании колебательных процессов важно знать, какое число независимых параметров определяет положение системы в каждый данный момент времени. Число таких параметров называется *числом степеней свободы*.

Жесткая масса, связанная с пружиной (Рис.16.2,а) имеет одну степень свободы, поскольку ее положение определяется только одной координатой  $x$ , отсчитываемой от некоторой точки. Понятно, что это верно лишь в той мере, в какой имеется возможность пренебречь массой пружины по сравнению с массой колеблющегося груза. В противном случае, для того, чтобы задать положение системы в любой момент времени, необходимо было бы ввести бесчисленное множество координат, определяющих положение всех точек упругой системы, и система имела бы *бесконечное число степеней свободы*.

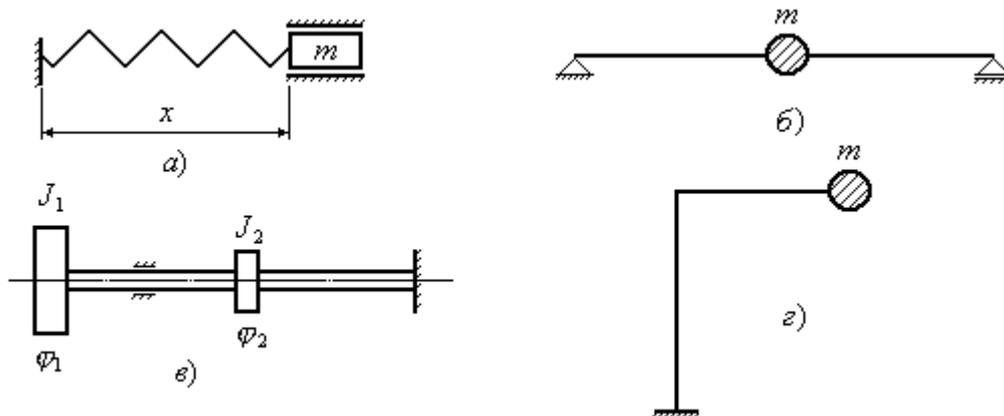


Рис.16.2

Балка, изображенная на рис.16.2,б также имеет одну степень свободы: положение массы  $m$  определяется одним параметром – перемещением по вертикали.

Примером системы с двумя степенями свободы может служить система, изображенная на рис.16.2,в. Чтобы определить положение системы в любой момент времени, нужно знать две угловые координаты  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ , определяющие поворот жестких дисков.

Для системы, изображенной на рис.16.2,в, положение колеблющегося груза в плоскости чертежа определяется тремя независимыми переменными, например, двумя координатами центра тяжести и углом поворота массы.

Таким образом, число степеней свободы фактически определяется выбором расчетной схемы, т.е. той степенью приближения, с которой мы считаем необходимым (или возможным) исследовать реальный объект.

### 16.1.3. Классификация колебаний в зависимости от характера внешнего воздействия на колеблющуюся систему

В соответствии с этой классификацией различают следующие четыре типа возможных колебаний: собственные, вынужденные, параметрические и автоколебания.

*Собственными (свободными)* называют колебания, возникающие в изолированной системе вследствие внешнего возбуждения, вызывающего у точек системы начальное отклонение от положения равновесия или начальные скорости, и продолжающиеся затем благодаря наличию внутренних упругих сил, восстанавливающих равновесие.

Примером собственных колебаний является колебание ножек камертона. В этом случае движение происходит в результате начального импульса, сообщенного системе при ударе. Собственные колебания продолжаются до тех пор, пока сообщенная в начале колебательного процесса энергия не будет полностью израсходована на работу против сил трения о воздух и сил внутреннего трения в металле.

При собственных колебаниях характер колебательного процесса в основном определяется только внутренними силами системы, зависящими от физического строения ее. Период колебаний (время одного полного колебания) или частота колебаний (величина обратная периоду) зависит от самой системы. Частота колебаний является вполне определенной для данной системы и называется *собственной частотой колебаний* системы. Свободные колебания из-за потерь энергии в системе практически всегда являются затухающими, хотя при анализе свободных колебаний потерями энергии часто пренебрегают.

*Вынужденными* называются колебания упругой системы, происходящие при действии на систему (в течение всего процесса колебаний) заданных внешних периодически изменяющихся возмущающих сил. Характер колебательного процесса при этом определяется не только свойствами системы, но существенно зависит также от внешней силы. Примером вынужденных колебаний могут служить поперечные колебания балки (Рис.16.3), служащей опорой для электродвигателя, если у него вращающиеся массы не вполне уравновешены.

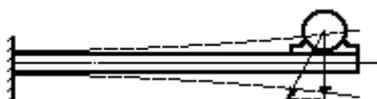


Рис.16.3

Вынужденные колебания *не затухают*. Колебательный процесс происходит с частотой возмущающей силы и поддерживается за счет непрерывного поступления энергии извне. При совпадении частоты возмущающих сил с частотой собственных колебаний системы наступает

*резонанс*, характеризующийся резким возрастанием амплитуды вынужденных колебаний и сопровождающийся возникновением в конструкции недопустимых деформаций.

*Параметрическими* называются колебания упругой системы, в процессе которых периодически *изменяются физические параметры системы* – величины, характеризующие массу или жесткость системы. Так же, как и при вынужденных колебаниях, система испытывает действие заданных внешних периодически изменяющихся возмущающих сил. При этом внешние силы не влияют непосредственно на колебательное движение, а изменяют физические параметры системы. Примером параметрических колебаний могут служить поперечные колебания массы на вращающемся стержне некруглого сечения с разными осевыми моментами инерции относительно взаимно перпендикулярных осей. Параметрические колебания *не затухают*.

*Автоколебаниями, или самоколебаниями*, упругой системы называются *незатухающие* колебания, поддерживаемые такими внешними силами, характер воздействия которых определяется самим колебательным процессом.

Автоколебания возникают в системе в отсутствие внешних периодических воздействий. Характер колебаний определяется исключительно устройством системы. Источник энергии, восполняющий потери энергии в системе в процессе ее колебаний, составляет неотъемлемую часть системы. Таким образом, автоколебания в отличие от свободных колебаний являются незатухающими колебаниями. С другой стороны, автоколебания отличаются от вынужденных и параметрических колебаний, так как те и другие вызываются внешними силами, характер действия которых задан. В этом смысле автоколебания можно назвать самовозбуждающимися колебаниями, в которых процесс колебаний управляется самими колебаниями. Примером автоколебаний может служить вибрация частей самолета (флаттер), когда источником дополнительной энергии, поддерживающей колебания, является энергия воздушного потока. Другим примером автоколебаний является трепетание флага по ветру.

#### **16.1.4. Классификация колебаний по виду деформации упругих элементов конструкций**

В соответствии с этой классификацией применительно к стержневым системам различают *продольные, поперечные и крутильные* колебания.

При *продольных* колебаниях перемещение всех точек упругого стержня направлены вдоль оси стержня. При этом имеет место деформация удлинения или укорочения стержня, т.е. продольные колебания можно назвать колебаниями растяжения-сжатия.

*Поперчными* колебаниями называются колебания изгиба, при которых прогибы направлены перпендикулярно к оси стержня. Напряженное состояние при поперечных колебаниях, очевидно, будет таким же, как и при статическом изгибе балки. Поэтому поперечные колебания иначе можно назвать *изгибными*.

*Крутильными* называются колебания стержней, сопровождаемые переменной деформацией кручения. Эти колебания возникают в различного рода валах, работающих на кручение.

Кроме перечисленных видов колебаний существуют колебания смешанного типа, при которых одновременно возникают деформации изгиба и кручения, так называемые *изгибно-крутильные* колебания.

## 16.2. Собственные колебания системы с одной степенью свободы

Рассмотрим балку с одной сосредоточенной массой  $m$ , прикрепленной к какой-либо точке на расстоянии  $a$  от левой опоры (Рис.16.4,а).

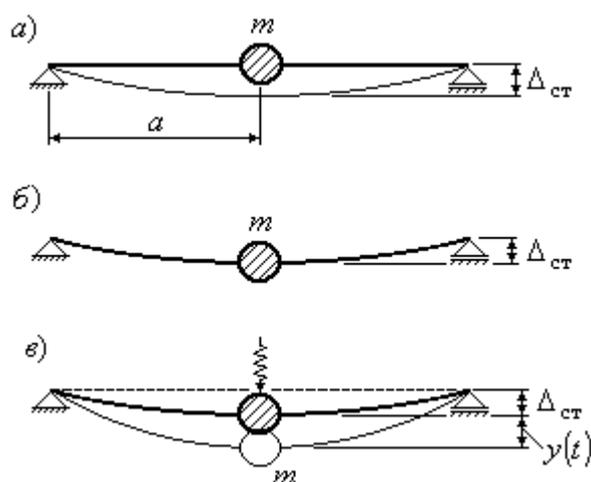


Рис.16.4

Под весом первоначально приложенного груза  $P = mg$  балка прогнется на величину  $\Delta_{ст}$  и примет состояние (Рис.16.4,б), которое назовем *равновесным*. Относительно этого состояния в дальнейшем балка будет совершать колебания.

Предположим, что масса балки по сравнению с массой  $m$  мала, и ею можно пренебречь. Ось изогнутой оси балки определяется в этом случае величиной отклонения массы, т.е. только одним параметром. Поэтому такую балку называют системой с одной степенью свободы.

Если массу отклонить от равновесного состояния (Рис.16.4,в) и отпустить, то балка вместе с массой начнет колебаться возле равновесного состояния. Вследствие сил сопротивления колебания будут постепенно затухать, и через некоторое время балка вновь придет в свое исходное равновесное состояние (Рис.16.4,б).

Получим уравнение колебаний заданной системы. Отклонение массы от состояния равновесия  $y(t) = y$  происходит за счет сил инерции. Введем единичное перемещение  $\delta$  от силы инерции, равной единице. Составим соотношение:

$$\begin{aligned} F_{\text{ин}} &\rightarrow y \\ 1 &\rightarrow \delta \end{aligned} \quad (16.1)$$

Учитывая, что сила инерции равна

$$F_{\text{ин}} = -m \frac{d^2 y}{dt^2} = -\frac{P}{g} \cdot \frac{d^2 y}{dt^2},$$

из соотношения (16.1) найдем величину отклонения массы  $m$  от равновесного состояния:

$$y = \delta \cdot F_{\text{ин}} = -\delta \frac{P}{g} \cdot \frac{d^2 y}{dt^2}. \quad (16.2)$$

Так как  $P\delta = \Delta_{\text{ст}}$ , перепишем уравнение (16.2) в виде:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{g}{\Delta_{\text{ст}}} y = 0. \quad (16.3)$$

Обозначим  $\frac{g}{\Delta_{\text{ст}}} = \omega^2$ , где  $\omega$  - круговая частота собственных колебаний, и подставляя в (16.3), окончательно получим дифференциальное уравнение, описывающее рассматриваемый колебательный процесс:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \omega^2 y = 0. \quad (16.4)$$

Уравнение (16.4) представляет собой линейное дифференциальное уравнение второго порядка без правой части. Решение такого уравнения будем искать в виде:

$$y = A_1 \cos(\omega \cdot t) + A_2 \sin(\omega \cdot t), \quad (16.5)$$

где  $A_1$  и  $A_2$  - постоянные интегрирования.

Уравнение (16.5) можно привести к другому виду. Для этого введем обозначения  $A_1 = A \sin \alpha$ ;  $A_2 = A \cos \alpha$  и поставим в уравнение (16.5). Получим:

$$y = A \sin \alpha \cos(\omega \cdot t) + A \cos \alpha \sin(\omega \cdot t) = A \sin(\omega \cdot t + \alpha), \quad (16.6)$$

где  $A$  - амплитуда колебаний;  $\alpha$  - начальная фаза колебаний, определяемая при  $t=0$ :  $y = A \sin \alpha$ .

Определим амплитуду колебаний  $A$  и начальную фазу  $\alpha$ . Для этого запишем выражение для скорости движущейся массы:

$$v = \frac{dy}{dt} = A\omega \cos(\omega \cdot t + \alpha). \quad (16.7)$$

Вспользуемся граничными условиями для определения постоянных  $A$  и  $\alpha$ . Пусть при  $t=0$

$$y = y_0; \quad \frac{dy}{dt} = v_0.$$

Тогда из уравнений (16.1) и (16.7) найдем:

$$A \sin \alpha = y_0;$$

$$A\omega \cos \alpha = v_0.$$

Решая полученную систему уравнений относительно  $A$  и  $\alpha$ , получим:

$$A = \sqrt{y_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2};$$

$$\alpha = \arctg \frac{y_0}{v_0}.$$

График изменения перемещения во времени показан на рис.16.5.

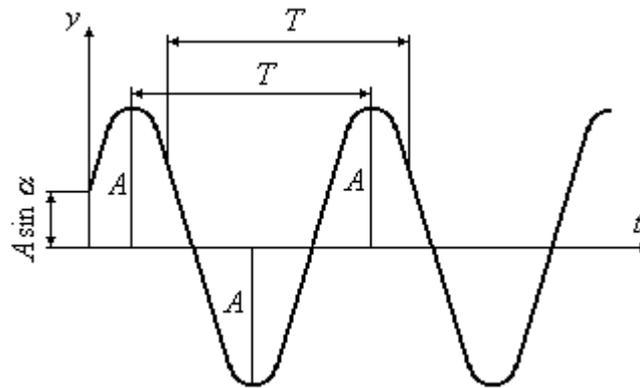


Рис.16.5

Наибольшее отклонение от равновесного состояния в ту или другую сторону будет тогда, когда  $\sin(\omega \cdot t + \alpha)$  равен единице. Как видно из уравнения (16.6), это отклонение будет равно постоянной  $A$ . Таким образом, величина  $A$  представляет собой амплитуду колебаний. Время  $T$ , за которое совершается один полный цикл колебаний, называется периодом колебаний. Через каждые  $t$  секунд отклонение  $y$  приобретает прежнее значение.

Из уравнения (16.6) имеем:

$$y = A \sin(\omega \cdot t + \alpha) = A \sin[\omega \cdot (t + T) + \alpha].$$

Следовательно,

$$\omega \cdot t = 2\pi,$$

откуда круговая частота собственных колебаний, представляющая собой число колебаний за  $2\pi$  секунд, равна:

$$\omega = \frac{2\pi}{T}.$$

Круговую частоту собственных колебаний в соответствии с принятым выше обозначением  $\frac{g}{\Delta_{ст}} = \omega^2$  можно определить по формуле:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{\Delta_{ст}}}, \quad (16.8)$$

где  $\Delta_{ст}$  - статический прогиб того сечения, в котором находится колеблющаяся сосредоточенная масса  $m$ , вызванный действием соответствующей статически приложенной силы тяжести  $P = mg$ .

В теоретической механике частоту собственных колебаний определяют с помощью жесткости системы. *Жесткостью системы при колебаниях называется сила, которую нужно приложить в том сечении, где находится колеблющаяся масса, чтобы вызвать единичное перемещение этого сечения.*

Если  $\delta$  - единичное перемещение, то величина ей обратная  $\frac{1}{\delta} = \frac{P}{\Delta_{ст}} = c$  является жесткостью системы при колебаниях.

Преобразуя выражение (16.8), получим:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{\Delta_{ст}} \cdot \frac{P}{P}} = \sqrt{\frac{c}{m}}. \quad (16.9)$$

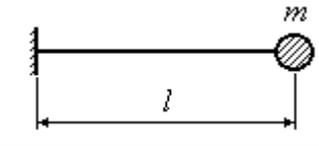
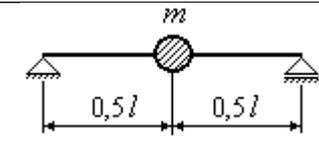
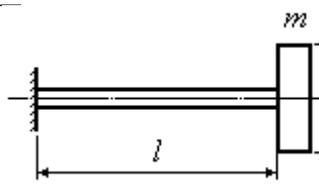
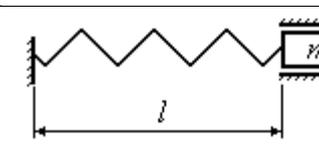
Формула (16.8) для круговой частоты собственных колебаний является классической формулой теоретической механики.

При необходимости учета собственного веса тела при определении круговой частоты собственных колебаний в сечении, в котором приложена колеблющаяся сосредоточенная масса, следует дополнительно приложить приведенную массу тела  $m_n = \frac{\xi ql}{g}$ , где  $\frac{ql}{g}$  - распределенная масса по длине тела;  $\xi$  - коэффициент приведения массы (веса), описанный в предыдущей теме, в которой коэффициент  $\xi$  использовался при вычислении динамического коэффициента при ударе. Тогда формула (16.8) для определения круговой частоты собственных колебаний преобразуется к виду:

$$\omega = \sqrt{\frac{c}{m + m_{II}}}. \quad (16.10)$$

В ряде случаев для сокращения времени вычислений полезно запомнить значение жесткости системы для некоторых наиболее распространенных случаев нагружения стержней, балок, валов и пружин. В таблице 16.1 приведены для некоторых из таких случаев нагружения выражения для жесткости и частоты собственных колебаний.

Таблица 16.1

Вид системы	Жесткость системы	Частота собственных колебаний
	$c = \frac{3EJ}{l^3}$	$\omega = \sqrt{\frac{3EJ}{ml^3}}$
	$c = \frac{48EJ}{l^3}$	$\omega = \sqrt{\frac{48EJ}{ml^3}}$
	$c = \frac{GJ_P}{l}$	$\omega = \sqrt{\frac{GJ_P}{J_0 l}}$
	$c = \frac{Gd^4}{64R^3 n}$	$\omega = \sqrt{\frac{Gd^4}{m64R^3 n}}$

Для скручиваемого вала при вычислении круговой частоты собственных колебаний  $\omega$  следует использовать момент инерции диска относительно оси стержня, перпендикулярной к плоскости диска  $J_0 = \frac{mD^2}{8}$ .

Вычислим период и круговую частоту собственных колебаний для системы с двумя вращающимися дисками (Рис.16.6). Если закрутить диски один относительно другого, а затем мгновенно снять приложенные внешние моменты, то диски начнут совершать крутильные колебания навстречу друг другу. При этом некоторое промежуточное сечение вала будет оставаться неподвижным.

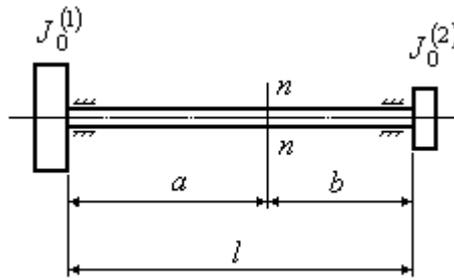


Рис.16.6

Положение этого так называемого узлового сечения  $n-n$  можно найти из условия равенства частот колебаний обоих дисков с примыкающими к ним участками вала длиной  $a$  и  $b$ , для которых применимы формулы:

$$\omega = \sqrt{\frac{GJ_P}{J_0^{(1)}a}} = \sqrt{\frac{GJ_P}{J_0^{(2)}b}},$$

откуда

$$\frac{a}{b} = \frac{J_0^{(2)}}{J_0^{(1)}},$$

где  $J_0^{(1)}$  и  $J_0^{(2)}$  - моменты инерции соответственно первого и второго дисков.

Используя последнее соотношение, а также, имея в виду, что  $a+b=l$ , находим:

$$a = \frac{J_0^{(2)}l}{J_0^{(1)} + J_0^{(2)}}; \quad b = \frac{J_0^{(1)}l}{J_0^{(1)} + J_0^{(2)}}.$$

Тогда период и частота крутильных колебаний системы будут следующими:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J_0^{(1)}J_0^{(2)}l}{GJ_P(J_0^{(1)} + J_0^{(2)})}}; \quad \omega = \sqrt{\frac{GJ_P(J_0^{(1)} + J_0^{(2)})}{J_0^{(1)}J_0^{(2)}l}}.$$

Рассмотрим примеры вычисления круговой частоты собственных колебаний.

**Пример 16.1.** Определить частоту собственных колебаний груза весом  $P = 200$  Н, подвешенного к концу стального стержня длиной  $l = 0,4$  м и площадью поперечного сечения  $A = 1$  см<sup>2</sup>, если модуль упругости материала  $E = 2 \cdot 10^5$  МПа.

Решение:

1. Вычислим удлинение стержня:

$$\Delta l = \frac{Pl}{EA} = \frac{200 \cdot 0,4}{2 \cdot 10^{11} \cdot 1 \cdot 10^{-4}} = 4 \cdot 10^{-6} \text{ м.}$$

2. Определяем частоту собственных колебаний по формуле:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{\Delta l}} = \sqrt{\frac{9,81}{4 \cdot 10^{-6}}} = 1566 \text{ с}^{-1}.$$

**Пример 16.2.** Найти период собственных колебаний кручения стального вала диаметром  $d = 12$  см и длиной  $l = 1,5$  м, один конец которого зашпелен, а на втором насажен шкив с моментом инерции  $J_0 = 800 \text{ Нмс}^2$ .

Решение:

1. Определяем круговую частоту собственных крутильных колебаний, воспользовавшись формулой из таблицы 16.1:

$$\omega = \sqrt{\frac{GJ_p}{J_0 l}} = \sqrt{\frac{G \pi d^4}{32 J_0 l}} = \sqrt{\frac{8 \cdot 10^{10} \cdot 3,14 \cdot 12^4 \cdot 10^{-8}}{32 \cdot 800 \cdot 1,5}} = 36,84 \text{ с}^{-1}.$$

2. Находим период собственных крутильных колебаний вала:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2 \cdot 3,14}{36,84} = 0,171 \text{ с.}$$

**Пример 16.3.** Стальная цилиндрическая пружина, имеющая  $n = 12$  витков при среднем диаметре витка  $D = 8$  см диаметре проволоки  $d = 6$  мм, растянута грузом  $P = 120$  Н. Определить частоту собственных колебаний груза.

Решение:

1. Вычисляем жесткость пружины:

$$c = \frac{Gd^4}{8D^3n} = \frac{8 \cdot 10^{10} \cdot 6^4 \cdot 10^{-12}}{8 \cdot 8^3 \cdot 10^{-6} \cdot 12} = 2109,38 \text{ Н/м.}$$

2. Определяем частоту собственных колебаний:

$$\omega = \sqrt{\frac{c}{m}} = \sqrt{\frac{c \cdot g}{P}} = \sqrt{\frac{2109,38 \cdot 9,81}{120}} = 13,13 \text{ с}^{-1}.$$

**Пример 16.4.** Двутавровая балка №27 длиной  $l = 6$  м, шарнирно опертая по концам, несет посередине пролета груз  $P = 30$  кН. Момент инерции двутавра

$J = 5010 \text{ см}^4$ , вес одного погонного метра  $q = 315 \text{ Н/м}$ . Коэффициент приведения веса принять  $\xi = \frac{17}{35}$ . Определить частоту собственных колебаний без учета и с учетом массы балки.

Решение:

1. Определяем жесткость балки:

$$c = \frac{48EJ}{l^3} = \frac{48 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 5010 \cdot 10^{-8}}{6^3} = 2226,67 \cdot 10^3 \text{ Н/м}.$$

2. Находим частоту собственных колебаний без учета собственного веса балки:

$$\omega = \sqrt{\frac{c}{m}} = \sqrt{\frac{c \cdot g}{P}} = \sqrt{\frac{2226,67 \cdot 10^3 \cdot 9,81}{30 \cdot 10^3}} = 26,98 \text{ с}^{-1}.$$

3. Определяем частоту собственных колебаний с учетом собственного веса балки:

$$\omega = \sqrt{\frac{c}{m + m_{II}}} = \sqrt{\frac{c \cdot g}{P + Q_{II}}} = \sqrt{\frac{c \cdot g}{P + \xi q l}} = \sqrt{\frac{2226,67 \cdot 10^3 \cdot 9,81}{30 \cdot 10^3 + \frac{17}{35} \cdot 315 \cdot 6}} = 26,6 \text{ сек}^{-1}.$$

**Пример 16.5.** Определить частоту собственных колебаний для двутавровой балки №27 с моментом инерции  $J = 5010 \text{ см}^4$ , если груз  $P = 30 \text{ кН}$  приложен на расстоянии  $a = 1,5 \text{ м}$  от левой опоры (Рис.16.7,а). Длина балки  $l = 6 \text{ м}$ . Собственным весом балки пренебречь.

Решение:

1. Найдем статическое перемещение (прогиб) сечения С, в котором приложен груз  $P$ . Для этого сначала построим эпюру грузовых моментов  $M_P$  (Рис.16.7,б). Изгибающий момент в сечении С определим по формуле:

$$M_C = \frac{Pab}{l} = \frac{30 \cdot 1,5 \cdot 4,5}{6} = 33,75 \text{ кНм}.$$

Затем выберем единичное состояние балки (Рис.16.7,в), приложим в сечении С единичную сосредоточенную силу  $\bar{P}$  и построим эпюру единичных изгибающих моментов (Рис.16.7,г). Изгибающий момент в сечении С найдем по формуле:

$$\bar{M}_C = \frac{\bar{P}ab}{l} = \frac{1 \cdot 1,5 \cdot 4,5}{6} = 1,125.$$

Используя формулу треугольников, найдем статический прогиб в сечении С:

$$\Delta_{ст} = \sum_{j=1}^2 \frac{kAal}{EJ} = \frac{1 \cdot 33,75 \cdot 10^3 \cdot 1,125 \cdot 1,5}{3 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 5010 \cdot 10^{-8}} + \frac{1 \cdot 33,75 \cdot 10^3 \cdot 1,125 \cdot 4,5}{3 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 5010 \cdot 10^{-8}} = 7,579 \cdot 10^{-3} \text{ м.}$$

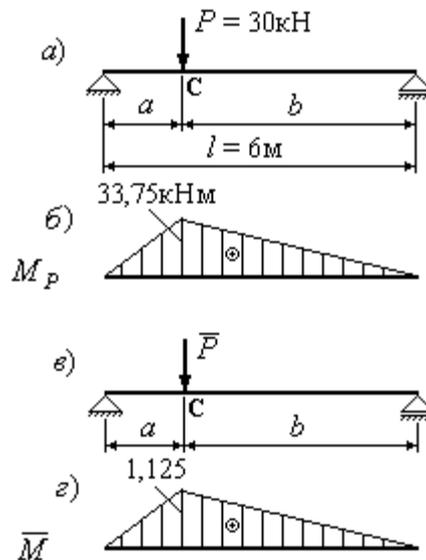


Рис.16.7

2. Определяем частоту собственных колебаний балки:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{\Delta_{ст}}} = \sqrt{\frac{9,81}{7,579 \cdot 10^{-3}}} = 35,98 \text{ с}^{-1}.$$

### 16.3. Учет сил внутреннего сопротивления при определении частоты собственных колебаний

Приведенное выше решение для определения частоты собственных колебания является приближенным, так как в нем не учтены силы сопротивления, например, сопротивление воздуха, силы трения в шарнирах, силы внутреннего сопротивления.

Силы сопротивления воздуха при скоростях колебаний, которые наблюдаются в балках, невелики и поэтому их можно не учитывать. Силы трения в шарнирах могут быть устранены или сведены до минимума за счет улучшения конструкции шарнирных опор или их смазки.

Основными являются *силы внутреннего неупругого сопротивления*, которые зависят от материала балки и ряда других факторов. Эти силы устранить невозможно.

По одной из наиболее распространенных гипотез учета затуханий, предложенных Фойгтом [5], материал рассматривается как вязко-упругое тело,

в котором возникающие напряжения  $\sigma$  зависят не только от величины деформации  $\varepsilon$ , но и от скорости изменения деформации во времени:

$$\sigma = E\varepsilon + \psi E \frac{\partial \varepsilon}{\partial t}, \quad (16.11)$$

где  $\psi$  - коэффициент вязкого трения.

В соответствии с гипотезой Фойгта эффект сил внутреннего сопротивления при колебаниях рассматриваемой балки заменяется действием внешней силы  $R = -k \frac{dy}{dt}$ , приложенной в точке закрепления массы. Здесь  $k$  - коэффициент пропорциональности между силой и скоростью.

Величина отклонения массы от равновесного состояния с учетом сил внутреннего сопротивления имеет вид:

$$y = \delta(F_{\text{ин}} + R) = -\delta \left( m \cdot \frac{d^2 y}{dt^2} + k \frac{dy}{dt} \right),$$

откуда

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 2n \frac{dy}{dt} + \omega^2 y = 0, \quad (16.12)$$

где

$$2n = \frac{k}{m}; \quad \omega^2 = \frac{1}{m\delta}.$$

Выражение (16.12) представляет собой дифференциальное уравнение собственных колебаний системы с одной степенью свободы с учетом неупругих сил сопротивления. Интеграл уравнения (16.12) можно записать в виде:

$$y = Ae^{-nt} \sin(\omega_* t + \alpha), \quad (16.13)$$

где

$$\omega_* = \sqrt{\omega^2 - n^2}. \quad (16.14)$$

Из графика колебаний (Рис.16.8), построенного по выражению (16.13), хорошо видно, что собственные колебания быстро затухают.

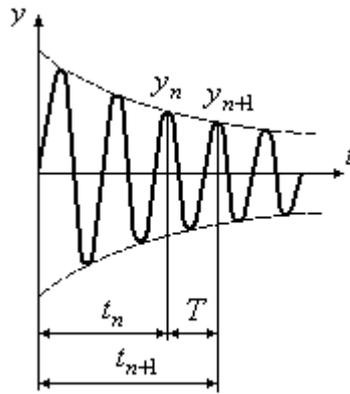


Рис.16.8

Выражение (16.14) дает значение частоты собственных колебаний с учетом сил сопротивления. Величина  $n$  обычно мала по сравнению с  $\omega$ , поэтому  $\omega_*$  и  $\omega$ , как правило, мало отличаются друг от друга:

$$\omega_* \approx \omega.$$

Чтобы оценить скорость затухания колебательного процесса, составим отношение двух отклонений массы, измеренных через один период (Рис.16.8):

$$\frac{y_n}{y_{n+1}} = \frac{e^{-nt}}{e^{-n(t+T)}} = e^{nT},$$

откуда

$$nT = \ln \frac{y_n}{y_{n+1}} = \gamma. \quad (16.15)$$

Величину  $\gamma$  называют *логарифмическим декрементом колебаний*, он характеризует скорость затухания собственных колебаний.

#### 16.4. Вынужденные колебания упругой системы

Как отмечалось выше, колебания называются вынужденными, если на систему действует сила  $P(t)$ , изменяющаяся во времени по какому-либо закону. После приложения силы инерции балку в отклоненном состоянии можно рассматривать как находящуюся в равновесном состоянии (Рис.16.9).

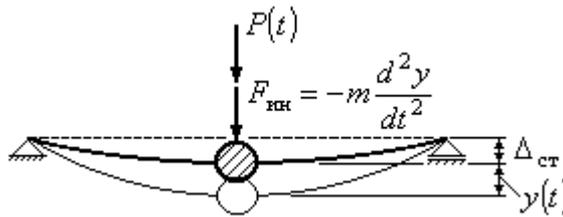


Рис.16.9

Перемещение массы будет описываться уравнением:

$$y = \delta \cdot [F_{\text{ин}} + P(t)] = \delta \left[ -m \cdot \frac{d^2 y}{dt^2} + P(t) \right], \quad (16.16)$$

где  $\delta$  - перемещение от единичной силы, приложенной в месте крепления массы.

Переносим все неизвестные в левую часть, после деления всех членов на  $m\delta$  получим:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \omega^2 y = \frac{1}{m} P(t). \quad (16.17)$$

Интеграл этого уравнения состоит из двух частей: решение однородного уравнения и частного интеграла, зависящего от правой части.

Рассмотрим частный случай, когда внешняя сила меняется по гармоническому закону с частотой  $\theta$ :

$$P(t) = P \sin(\theta \cdot t). \quad (16.18)$$

С учетом выражения (16.18) дифференциальное уравнение (16.17) принимает вид:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \omega^2 y = \frac{1}{m} P \sin(\theta \cdot t). \quad (16.19)$$

Интеграл однородного уравнения был получен при решении уравнения (16.4) и представлен выражением (16.6) в предыдущем разделе. Частный интеграл будем искать в виде:

$$y_1 = C \sin(\theta \cdot t). \quad (16.20)$$

Возьмем первую и вторую производные от перемещения  $y_1$  по времени. Получим:

$$\frac{dy_1}{dt} = C\theta \cos(\theta \cdot t); \quad \frac{d^2 y_1}{dt^2} = -C\theta^2 \sin(\theta \cdot t). \quad (16.21)$$

Подставим (126.20) и (16.21) в уравнение (16.19) и решим его относительно постоянной интегрирования  $C$ :

$$C = \frac{P}{m(\omega^2 - \theta^2)} = \frac{P}{m\omega^2 \left(1 - \frac{\theta^2}{\omega^2}\right)}. \quad (16.22)$$

Учитывая, что  $\omega^2 = \frac{c}{m} = \frac{1}{m\delta}$ , получим:

$$C = \frac{P\delta}{1 - \frac{\theta^2}{\omega^2}} = \frac{\Delta_{ст}}{1 - \frac{\theta^2}{\omega^2}}, \quad (16.23)$$

где  $P\delta = \Delta_{ст}$  - прогиб от статически приложенной возмущающей силы  $P$ . Таким образом, решение уравнения (16.19) с учетом (16.6) имеет вид:

$$y = A \sin(\omega \cdot t + \alpha) + \frac{\Delta_{ст}}{1 - \frac{\theta^2}{\omega^2}} \sin(\theta \cdot t). \quad (16.24)$$

Первое слагаемое в этом уравнении представляет собой собственные колебания, а второе описывает вынужденные колебания. Величины  $A$  и  $\alpha$  находим из начальных условий, как это было показано в предыдущем разделе.

Так как собственные колебания в реальных конструкциях быстро затухают, рассмотрим только вынужденные колебания, происходящие с частотой  $\theta$ .

Если принять  $\sin(\theta \cdot t) = 1$ , то отклонение  $y$  от равновесного состояния приобретет максимальную величину, которую принято называть амплитудой вынужденных колебаний:

$$y_{\max} = \frac{\Delta_{ст}}{1 - \frac{\theta^2}{\omega^2}} = \Delta_{ст} \beta.$$

Величина  $\beta$  представляет собой коэффициент нарастания колебаний и имеет вид:

$$\beta = \frac{1}{1 - \frac{\theta^2}{\omega^2}}. \quad (16.25)$$

На рис.16.10. приведен график абсолютного значения коэффициента  $\beta$ . Из графика видно, что при приближении частоты вынужденных колебаний  $\theta$  к частоте собственных колебаний системы  $\omega$ , коэффициент нарастания колебаний  $\beta$  безгранично возрастает (при  $\theta = \omega$ ,  $\beta \rightarrow \infty$ ). Такое явление называется *резонансом*.

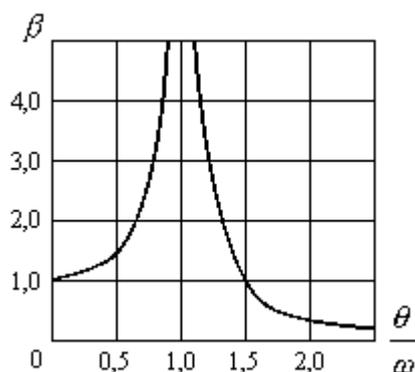


Рис.16.10

Динамический коэффициент при вынужденных колебаниях найдем на примере консольной изгибаемой балки с жесткостью  $c = \frac{3EJ}{l^3}$ , которая несет на свободном конце электродвигатель весом  $Q$  с неуравновешенным ротором (Рис.16.11).

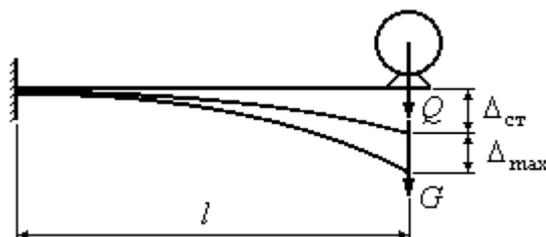


Рис.16.11

Величина неуравновешенного груза, укрепленного на роторе и совершающего вращательное движение вокруг оси электродвигателя, равна  $G$ . Вследствие вращения груза  $G$  на роторе возникает центробежная сила инерции, которая и является причиной возникновения колебаний.

Полный прогиб, вызываемый статическим приложением веса электродвигателя  $Q$  и инерционной нагрузкой  $G$ , равен:

$$\Delta = \Delta_{ст} + \Delta_{max}, \quad (16.26)$$

где:  $\Delta_{ст} = \frac{Q}{c}$  - статическое перемещение, вызванное весом электродвигателя  $Q$ ;  $\Delta_{max} = \frac{G}{c} \beta$  - амплитудное значение перемещения (амплитуда вынужденных колебаний),  $\beta$  - коэффициент нарастания колебаний. Динамический коэффициент найдем из отношения:

$$k_d = \frac{\Delta}{\Delta_{ст}} = \frac{\Delta_{ст} + \Delta_{max}}{\Delta_{ст}} = 1 + \frac{G}{Q} \beta \quad (16.27)$$

### 16.5. Учет сил внутреннего сопротивления при вынужденных колебаниях

Рассмотрим теперь вынужденные колебания с учетом сил внутреннего сопротивления. Дифференциальное уравнение колебаний с учетом (16.12) принимает вид

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 2n_1 \frac{dy}{dt} + \omega^2 y = \frac{P}{m} \sin(\theta \cdot t). \quad (16.28)$$

Уравнение вынужденных колебаний (16.28) отличается от уравнения собственных колебаний (16.12) не только наличием правой части, но и коэффициентов при первой производной  $\frac{dy}{dt}$ . Вместо величины  $2n$ , введенной в уравнении (16.12), принимается коэффициент  $2n_1$ .

Гипотеза Фойгта, принятая при описании собственных колебаний, дает согласованные с экспериментом результаты лишь том случае, если коэффициент вязкого трения  $\psi$  в формуле (16.11) не является постоянной величиной, а зависит от частоты колебаний. Результаты теории и эксперимента оказываются в большей мере согласованы, если принять, что при собственных колебаниях  $\psi = \psi_{\omega} = \frac{\gamma}{2\pi\omega}$ , а при установившихся вынужденных колебаниях, совершающихся с частотой  $\theta$ ,  $\psi = \psi_{\theta} = \frac{\gamma}{2\pi\theta}$ , где  $\gamma$  - логарифмический декремент затухания [5]. Отношение двух коэффициентов  $\frac{n_1}{n}$  будет таким же, как отношение коэффициентов вязкого трения  $\frac{\psi_{\theta}}{\psi_{\omega}}$ :

$$\frac{n_1}{n} = \frac{\psi_{\theta}}{\psi_{\omega}} = \frac{\omega}{\theta}. \quad (16.29)$$

Откуда:

$$n_1 = n \frac{\omega}{\theta}. \quad (16.30)$$

Рассмотрим частное решение уравнения (16.28), соответствующее только вынужденным колебаниям:

$$y = B_1 \sin(\theta \cdot t) + B_2 \cos(\theta \cdot t). \quad (16.31)$$

Возьмем вторые и первые производные от перемещения  $y$  по времени  $t$ . Получим:

$$\frac{dy}{dt} = B_1 \theta \cos(\theta \cdot t) - B_2 \theta \sin(\theta \cdot t); \quad \frac{d^2 y}{dt^2} = -B_1 \theta^2 \sin(\theta \cdot t) - B_2 \theta^2 \cos(\theta \cdot t).$$

и подставим в уравнение (16.28):

$$\begin{aligned} & -B_1 \theta^2 \sin(\theta \cdot t) - B_2 \theta^2 \cos(\theta \cdot t) + 2n_1 (B_1 \theta \cos(\theta \cdot t) - B_2 \theta \sin(\theta \cdot t)) + \\ & + \omega^2 (B_1 \sin(\theta \cdot t) + B_2 \cos(\theta \cdot t)) = \frac{P}{m} \sin(\theta \cdot t). \end{aligned} \quad (16.32)$$

Группируя члены, содержащие  $\sin \theta \cdot t$  и  $\cos \theta \cdot t$ , и подставляя в уравнение (16.32), получим:

$$\left[ (\omega^2 - \theta^2) B_1 - 2\beta_1 \theta \cdot B_2 - \frac{P}{m} \right] \sin(\theta \cdot t) + \left[ 2n_1 \theta \cdot B_1 + (\omega^2 - \theta^2) B_2 \right] \cos(\theta \cdot t) = 0. \quad (16.33)$$

Уравнение (16.33) должно тождественно обращаться в ноль при любых значениях  $t$ . Данное условие будет выполняться, если коэффициенты при  $\sin \theta \cdot t$  и  $\cos \theta \cdot t$  приравнять к нулю. В результате получим два уравнения с двумя неизвестными  $B_1$  и  $B_2$ :

$$\left. \begin{aligned} (\omega^2 - \theta^2) B_1 - 2\beta_1 \theta \cdot B_2 - \frac{P}{m} &= 0; \\ 2n_1 \theta \cdot B_1 + (\omega^2 - \theta^2) B_2 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (16.34)$$

Решая уравнения (16.34), находим:

$$\left. \begin{aligned} B_1 &= \frac{\frac{P}{m} (\omega^2 - \theta^2)}{(\omega^2 - \theta^2)^2 + 4n_1^2 \theta^2} \\ B_2 &= - \frac{\frac{P}{m} 2\beta_1 \theta}{(\omega^2 - \theta^2)^2 + 4n_1^2 \theta^2} \end{aligned} \right\}. \quad (16.35)$$

Полагая, что

$$B_1 = B \cos \alpha_1, \text{ а } B_2 = B \sin \alpha_1 \quad (16.36)$$

и подставляя в уравнение (16.31), получаем:

$$B \sin(\theta \cdot t) \cos \alpha_1 + B \cos(\theta \cdot t) \sin \alpha_1 = B \sin(\theta \cdot t + \alpha_1).$$

Таким образом, уравнение вынужденных колебаний (16.31) по аналогии с (16.6) можно записать в виде:

$$y = B \sin(\theta \cdot t + \alpha_1), \quad (16.37)$$

где  $B$  и  $\alpha_1$  - соответственно, амплитуда и начальная фаза вынужденных колебаний.

Возводя в квадрат левую и правую часть равенств (16.36) и складывая их, получаем:

$$B^2 = B_1^2 + B_2^2. \quad (16.38)$$

Разделив  $B_2$  на  $B_1$  из выражений (16.36), имеем:

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{B_2}{B_1}. \quad (16.39)$$

Подставляя постоянные  $B_1$  и  $B_2$  в (16.36) и (16.37), получаем выражения для амплитуды вынужденных колебаний  $B$  и начальной фазы колебаний  $\alpha_1$ :

$$B = \sqrt{B_1^2 + B_2^2} = \frac{\frac{P}{m}}{\sqrt{(\omega^2 - \theta^2)^2 + 4n_1^2 \theta^2}}; \quad \alpha_1 = \operatorname{arctg} \frac{2n_1}{\theta^2 - \omega^2}.$$

Учитывая, что

$$\frac{P}{m} = \frac{P \delta}{m \delta} = \omega^2 \Delta_{\text{ст}},$$

амплитуда вынужденных колебаний равна:

$$B = \beta \Delta_{\text{ст}}.$$

Коэффициент нарастания колебаний  $\beta$  определяется равенством:

$$\beta = \frac{\omega^2}{\sqrt{(\omega^2 - \theta^2) + 4n_1^2 \theta^2}} = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\theta^2}{\omega^2}\right)^2 + 4n_1^2 \frac{\theta^2}{\omega^4}}} \quad (16.40)$$

Выразим коэффициент затухания  $n_1$  через логарифмический декремент колебаний  $\gamma$ :

$$n_1 = n \frac{\omega}{\theta} = nT \frac{\omega}{\theta} \cdot \frac{1}{T} = \gamma \frac{\omega^2}{2\pi\theta} \quad (16.41)$$

Подставляя (16.41) в (16.40), получим:

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\theta^2}{\omega^2}\right)^2 + \frac{\gamma^2}{\pi^2}}} \quad (16.42)$$

Выражение (16.42) может оказаться более удобным при вычислении коэффициента нарастания колебаний, чем выражение (16.40). Необходимо только помнить, что логарифмический декремент колебаний  $\gamma = nT$ , а период колебаний определяется по формуле  $T = \frac{2\pi}{\omega}$ .

На рис. 16.12 представлены кривые зависимости коэффициента нарастания колебаний  $\beta$  от отношения частот вынужденных и собственных колебаний  $\frac{\theta}{\omega}$ . Положение каждой кривой зависит от декремента колебаний  $\gamma$ . И, как видно, из рис.16.12, в реальных балках в момент резонанса коэффициент нарастания колебаний не будет равен бесконечности при наличии внутреннего сопротивления, но, тем не менее, достигает больших значений. Поэтому возникновение резонанса весьма опасно для конструкции и его нельзя допускать. На рис.16.12 выделена опасная зона, в пределах которой всплеск коэффициента нарастания колебаний наиболее высокий. Границы этой зоны определяются отношением частот  $\frac{\theta}{\omega} < 0,8$  и  $\frac{\theta}{\omega} > 1,2$ . Вне этой зоны резонанса нет. Поэтому при вынужденных колебаниях при расчетах конструкций следует проверять, имеет ли место резонанс.

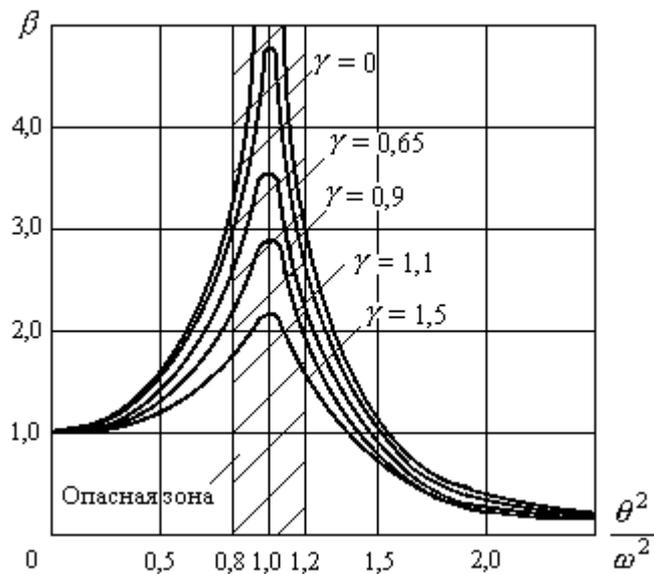


Рис.16.12

При проектировании конструкций, подвергаемых вынужденным колебаниям, размеры поперечных сечений конструкции следует выбирать такими, чтобы частота собственных колебаний системы отличалась приблизительно на 20% от частоты возбуждающей силы.

Рассмотрим примеры решения задач при вынужденных колебаниях.

**Пример 16.6.** На двух балках двутаврового сечения № 22 установлен двигатель весом  $Q = 20$  кН (Рис.12.13,а), делающий  $n = 500$  об/мин. Центробежная сила инерции, возникающая вследствие неуравновешенности вращающихся частей двигателя, равна  $H = 5$  кН. Собственный вес балок и силы сопротивления можно не учитывать. Момент инерции двутавра №22  $J_z = 2550$  см<sup>4</sup>, осевой момент сопротивления  $W_z = 232$  см<sup>3</sup>. Требуется определить наибольшие нормальные напряжения в балках.

Решение:

1. Определяем статический прогиб балок в месте установки двигателя  $\Delta_{ст}$ . Для этого загружаем балку весом двигателя  $Q$  и строим эпюру грузовых изгибающих моментов  $M_p$  (Рис.16.13,б). Далее изображаем единичное состояние системы (Рис.16.13,в) и строим эпюру единичных изгибающих моментов  $\bar{M}$ . Используя формулу треугольников, определяем статический прогиб:

$$\Delta_{ст} = \sum_{j=1}^2 \frac{kAal}{EJ} = \frac{3,2 \cdot 10^3 \cdot 0,266 \cdot 0,4}{3 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 2 \cdot 2550 \cdot 10^{-8}} + \frac{3,2 \cdot 10^3 \cdot 0,266 \cdot 0,8}{3 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 2 \cdot 2550 \cdot 10^{-8}} = 3,338 \cdot 10^{-5} \text{ м.}$$

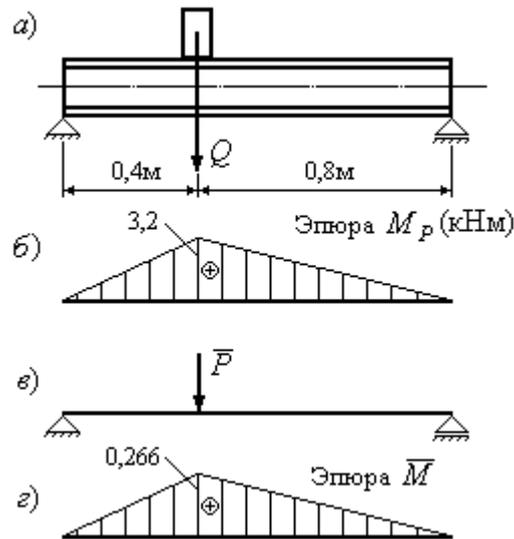


Рис.16.13

2. Находим частоту собственных колебаний системы:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{\Delta_{ст}}} = \sqrt{\frac{9,81}{3,338 \cdot 10^{-5}}} = 542,11 \text{ с}^{-1}.$$

3. Определяем частоту вынужденных колебаний:

$$\theta = \frac{\pi \cdot n}{30} = \frac{3,14 \cdot 500}{30} = 52,36 \text{ с}^{-1}.$$

4. Вычисляем коэффициент нарастания колебаний:

$$\beta = \frac{1}{1 - \frac{\theta^2}{\omega^2}} = \frac{1}{1 - \frac{52,36^2}{542,11^2}} = 1,0094.$$

5. Находим динамический коэффициент:

$$k_d = 1 + \frac{H}{Q} \beta = 1 + \frac{5}{20} \cdot 1,0094 = 1,252.$$

6. Определяем динамические напряжения, возникающие в балках:

$$\sigma_d = \frac{|M_{\max}|}{W_z} \beta = \frac{3,2 \cdot 10^3}{2 \cdot 232 \cdot 10^{-6}} \cdot 10^{-6} \cdot 1,252 = 8,634 \text{ МПа}.$$

**Пример 16.7.** Балка с поперечным сечением прямоугольного профиля (длина балки и размеры сечения указаны на рис.16.14) нагружена силой  $Q = 12$  кН посередине пролета и испытывает действие возмущающей силы  $P = 0,4$  кН,

приложенной в этом же сечении. Частота вынужденных колебаний составляет  $\theta = 18,3 \text{ с}^{-1}$ . Модуль упругости материала  $E = 1,8 \cdot 10^5 \text{ МПа}$ . Определить амплитуду вынужденных колебаний балки.

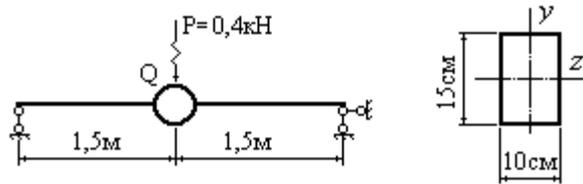


Рис.16.14

Решение:

1. Вычисляем момент инерции поперечного сечения балки  $J_z$  и определяем жесткость балки:

$$J_z = \frac{10 \cdot 15^3}{12} = 281,25 \text{ см}^4; \quad c = \frac{48EJ}{l^3} = \frac{48 \cdot 1,8 \cdot 10^{11} \cdot 281,25 \cdot 10^{-8}}{3^3} = 9 \cdot 10^5 \text{ Н/м}.$$

2. Находим частоту собственных колебаний системы:

$$\omega = \sqrt{\frac{c}{m}} = \sqrt{\frac{cg}{Q}} = \sqrt{\frac{9 \cdot 10^5 \cdot 9,81}{12 \cdot 10^3}} = 27,12 \text{ с}^{-1}.$$

3. Определяем коэффициент нарастания колебаний:

$$\beta = \frac{1}{1 - \frac{\theta^2}{\omega^2}} = \frac{1}{1 - \frac{18,3^2}{27,12^2}} = 1,836.$$

4. Определяем статический прогиб, вызываемый возмущающей силой в месте приложения груза  $\Delta_{\text{ст}}^P$ , и амплитуду вынужденных колебаний  $b$ :

$$\Delta_{\text{ст}}^P = \frac{P}{c} = \frac{0,4 \cdot 10^3}{9 \cdot 10^5} = 4,444 \cdot 10^{-4} \text{ м}; \quad b = \beta \cdot \Delta_{\text{ст}}^P = 1,836 \cdot 4,444 \cdot 10^{-4} = 8,159 \cdot 10^{-4} \text{ м}.$$

**Пример 16.8.** Электродвигатель весом  $P = 90 \text{ Н}$  установлен на четырех симметрично расположенных цилиндрических винтовых пружинах, каждая из которых имеет десять витков при среднем диаметре витка  $D = 6 \text{ см}$  и диаметре проволоки  $d = 5 \text{ мм}$ . На оси электродвигателя укреплен стержень АВ, несущий на конце В груз весом  $Q = 3 \text{ Н}$ , расположенный на расстоянии  $r = 10 \text{ см}$  от оси электромотора (Рис.16.15). Определить критическое число оборотов электродвигателя, наибольшую деформацию и наибольшее касательное напряжение в пружинах. Весом пружин пренебречь.

Коэффициент затухания колебаний принять  $n = 4 \text{ с}^{-1}$ . Модуль сдвига  $G = 8 \cdot 10^4$  МПа.

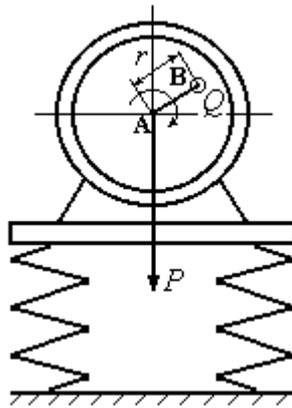


Рис.16.15

Решение:

1. Определяем жесткость пружин:

$$c = \frac{Gd^4}{8D^3s} \cdot 4 = \frac{8 \cdot 10^{10} \cdot (5 \cdot 10^{-3})^4}{8 \cdot (6 \cdot 10^{-2})^3 \cdot 10} = 1,157 \cdot 10^4 \text{ Н/м.}$$

2. Определяем круговую частоту собственных колебаний:

$$\omega = \sqrt{\frac{cg}{P}} = \sqrt{\frac{1,157 \cdot 10^4 \cdot 9,81}{90}} = 35,52 \text{ с}^{-1}.$$

3. Критическое число оборотов электродвигателя соответствует возникновению резонанса  $\theta = \omega = 35,52 \text{ с}^{-1}$ :

$$n_{\text{кр}} = \frac{30 \cdot \omega}{\pi} = \frac{30 \cdot 35,52}{3,14} = 339,18 \text{ об/мин.}$$

4. Вычисляем наибольшую величину возмущающей силы  $H$ , равную центробежной силе инерции, возникающей при вращении груза  $Q$ :

$$H = \frac{Q}{g} \omega^2 r = \frac{3}{9,81} 35,52^2 \cdot 0,1 = 38,58 \text{ Н.}$$

5. Определяем коэффициент нарастания колебаний  $\beta$  с учетом резонанса. Коэффициент затухания  $n_1$  при резонансе равен коэффициенту  $n = 4 \text{ с}^{-1}$ .

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\theta}{\omega}\right)^2\right]^2 + 4\left(\frac{n_1}{\theta}\right)^2\left(\frac{\theta}{\omega}\right)^2}} = \frac{\omega}{2n_1} = \frac{35,52}{2 \cdot 4} = 4,44$$

6. Находим амплитуду вынужденных колебаний электродвигателя:

$$b = \Delta_{\text{ст}}^H \beta = \frac{H}{c} \beta = \frac{38,85}{1,157 \cdot 10^4} 4,44 = 149,08 \cdot 10^{-4} \text{ м} = 14,91 \text{ мм.}$$

7. Определяем наибольшее вертикальное перемещение электродвигателя (деформацию пружины):

$$\Delta_{\text{max}} = \Delta_{\text{ст}}^P + b = \frac{P}{c} + b = \frac{90}{1,157 \cdot 10^4} + 149,08 \cdot 10^{-4} = 226,87 \text{ м} = 22,69 \text{ мм.}$$

8. Вычисляем динамический коэффициент:

$$k_d = 1 + \frac{\Delta_{\text{ст}}^H}{\Delta_{\text{ст}}^Q} \beta = 1 + \frac{H}{Q} \beta = 1 + \frac{35,58}{90} 4,44 = 2,9$$

9. Определяем максимальные касательные напряжения в пружинах:

$$\begin{aligned} \tau_{\text{max}} &= k_d \left( \frac{P}{4A} + \frac{M_{\text{кр}}}{4W_p} \right) = k_d \left( \frac{P}{4 \frac{\pi \cdot d^2}{4}} + \frac{P \frac{D}{2}}{4 \frac{\pi \cdot d^3}{16}} \right) = \\ &= 2,9 \left( \frac{90 \cdot 4}{4 \cdot 3,14 \cdot (6,5 \cdot 10^{-2})^2} + \frac{90 \cdot 3 \cdot 10^{-2} \cdot 16}{4 \cdot 3,14 \cdot (6,5 \cdot 10^{-2})^3} \right) 10^{-6} = 83,08 \text{ МПа.} \end{aligned}$$

**Пример 16.9.** Двигатель весом  $P = 9 \text{ кН}$ , укрепленный на конце консольной балки длиной  $l = 1 \text{ м}$ , делает  $n_0 = 800 \text{ об/мин}$  (Рис.16.16). При работе двигателя возникает центробежная сила инерции, равная  $S = 10^{-3} n_0^2 \text{ (Н)}$ . Поперечное сечение балки состоит из двух симметрично расположенных относительно силовой плоскости равнобоких уголков  $140 \times 12 \text{ мм}$ . Определить наибольшее нормальное напряжение в балке. Найти число оборотов двигателя, при котором возникает явление резонанса, и определить соответствующее наибольшее нормальное напряжение. При расчетах учесть силы сопротивления, пропорциональные скорости колебательного движения. Коэффициент затухания колебаний принять равным  $n = 5 \text{ с}^{-1}$ . Массой балки пренебречь.

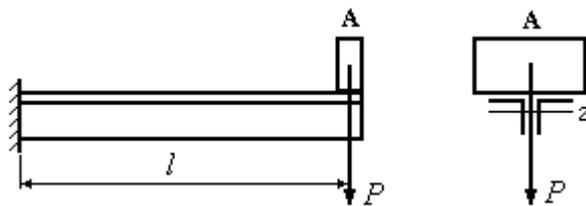


Рис.16.16

Решение:

1. Из сортамента прокатной стали выберем необходимые данные для уголка  $140 \times 12$  мм:  $J_z = 602 \text{ см}^4$ ;  $z_0 = 3,9$  см. Минимальный момент сопротивления для всего сечения балки равен:  $W_z = \frac{2J_z}{b - z_0} = \frac{2 \cdot 602}{14 - 3,9} = 119,21 \text{ см}^3$ . Расчетный момент равен абсолютной величине максимального изгибающего момента, возникающего в жесткой заделке:  $M_P = |M_{\max}| = Pl = 9 \text{ кНм}$ .

Найдем статические напряжения в балке:

$$\sigma_{\text{ст}} = \frac{M_P}{W_z} = \frac{9 \cdot 10^3}{119,21 \cdot 10^{-6}} 10^{-6} = 75,5 \text{ МПа}.$$

2. Найдем жесткость балки:

$$c = \frac{3EJ}{l^3} = \frac{3 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 2 \cdot 602 \cdot 10^{-8}}{1^3} = 7,224 \cdot 10^6 \text{ Н/м}.$$

3. Определяем частоту собственных колебаний двигателя:

$$\omega = \sqrt{\frac{cg}{P}} = \sqrt{\frac{7,224 \cdot 10^6 \cdot 9,81}{9 \cdot 10^3}} = 88,74 \text{ с}^{-1}.$$

4. Вычисляем частоту вынужденных колебаний:

$$\theta = \frac{n_0 \pi}{30} = \frac{800 \cdot 3,14}{30} = 83,78 \text{ с}^{-1}.$$

5. Определяем коэффициент нарастания колебаний  $\beta$  с учетом затухания.

Период собственных колебаний  $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2 \cdot 3,14}{88,74} = 7,08 \cdot 10^{-2} \text{ с}$ . Логарифмический декремент колебаний равняется  $\gamma = nT = 5 \cdot 7,08 \cdot 10^{-2} = 0,354$ . Коэффициент  $\beta$  найдем из уравнения (16.42):

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\theta^2}{\omega^2}\right)^2 + \frac{\gamma^2}{\pi^2}}} = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{83,78^2}{88,74^2}\right)^2 + \frac{0,354^2}{3,14^2}}} = 6,39.$$

6. Вычисляем величину центробежной силы инерции:

$$S = 10^{-4} n_0^2 = 10^{-3} \cdot 800^2 = 640 \text{ Н.}$$

7. Определяем динамический коэффициент:

$$k_d = 1 + \frac{S}{P} \beta = 1 + \frac{640}{9 \cdot 10^3} 6,39 = 1,454.$$

8. Находим наибольшие динамические напряжения в балке:

$$\sigma_d = k_d \sigma_{ст} = 1,454 \cdot 75,5 = 109,8 \text{ МПа.}$$

9. Определяем критическое число оборотов вала двигателя при резонансе ( $\omega = \theta$ ):

$$n_{кр} = \frac{\omega \cdot 30}{\pi} = \frac{88,74 \cdot 30}{3,14} = 847,4 \text{ об/мин.}$$

10. Коэффициент нарастания колебаний при резонансе найдем по формуле (16.43):

$$\beta = \frac{\pi}{\gamma} = \frac{3,14}{0,354} = 8,875.$$

11. Динамический коэффициент при резонансе равен:

$$k_d = 1 + \frac{S}{P} \beta = 1 + \frac{640}{9 \cdot 10^3} 8,875 = 1,631.$$

12. Определяем наибольшее нормальное напряжение при резонансе:

$$\sigma_d = k_d \sigma_{ст} = 1,631 \cdot 75,5 = 123,15 \text{ МПа.}$$

**Пример 16.10.** Опытным путем было установлено, что период собственных колебаний груза весом  $P = 2 \text{ кН}$ , расположенного посередине пролета  $l = 6 \text{ м}$  двутавровой балки №24, равен  $T = 0,35 \text{ с}$ . Стенка балки расположена горизонтально. Определить величину модуля упругости первого рода материала балки  $E$ , учитывая при расчете собственный вес балки. Данные для двутавра №24:  $J_y = 198 \text{ см}^4$ ; вес погонного метра  $q = 273 \text{ Н/м}$ .

Решение:

1. Определяем частоту собственных колебаний груза  $P$ :

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2 \cdot 3,14}{0,35} = 17,95 \text{ с}^{-1}.$$

2. Из выражения  $\omega^2 = \frac{g}{\Delta_{\text{ст}}}$  определяем величину статического прогиба балки посередине пролета:

$$\Delta_{\text{ст}} = \frac{g}{\omega^2} = \frac{9,81}{(17,95)^2} = 3,04 \cdot 10^{-2} \text{ м}.$$

3. Записываем выражение для статического прогиба с учетом собственного веса балки:

$$\Delta_{\text{ст}} = \frac{(P + Q_{\text{пр}})^3}{48EJ_y} = \frac{l^3}{48EJ_y} \left( P + \frac{17}{35} ql \right),$$

откуда находим величину модуля упругости

$$E = \frac{\left( P + \frac{17}{35} ql \right) l^3}{48J_y \Delta_{\text{ст}}} = \frac{\left( 2 \cdot 10^3 + \frac{17}{35} 273 \cdot 6 \right) \cdot 6^3}{48 \cdot 198 \cdot 10^{-8} \cdot 3,04 \cdot 10^{-2}} = 2,09 \cdot 10^{11} \text{ Па} = 2,09 \cdot 10^5 \text{ МПа}.$$

4. Получим это же решение, используя жесткость балки:

$$\omega^2 = \frac{c}{m + m_{\text{пр}}} = \frac{cg}{P + \frac{17}{35} ql} = \frac{48EJ_y g}{l^3 \left( P + \frac{17}{35} ql \right)},$$

откуда находим величину модуля упругости первого рода:

$$E = \frac{\omega^2 \left( P + \frac{17}{35} ql \right) l^3}{48J_y g} = \left( \frac{2\pi}{T} \right)^2 \frac{\left( 2 \cdot 10^3 + \frac{17}{35} 273 \cdot 6 \right) \cdot 6^3}{48 \cdot 198 \cdot 10^{-8} \cdot 9,81} = 2,09 \cdot 10^{11} \text{ Па} = 2,09 \cdot 10^5 \text{ МПа}.$$

## 16.6. Понятие о критической скорости вращения вала

Как показывает практика, быстровращающиеся детали машин, в частности валы, не могут быть идеально сбалансированы. Возникающие при вращении инерционные силы дисбаланса уводят вращающуюся деталь (вал,

ротор) от оси вращения. При некоторых угловых скоростях вращения, называемых *критическими*, деталь попадает в резонанс, возникают большие поперечные колебания, система становится динамически неустойчивой. Покажем, что критическая скорость для вала соответствует числу оборотов вала в секунду, равному собственной частоте его поперечных колебаний.

Рассмотрим вращение вертикального вала с диском посередине (Рис.16.17).

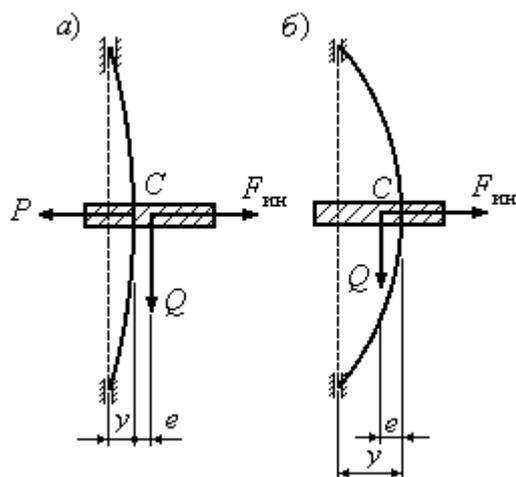


Рис.16.17

Предположим, что центр тяжести диска отстоит от оси вала на расстоянии  $e$ , которое назовем эксцентриситетом. При вращении на вал будет действовать центробежная сила инерции, вызывающая его изгиб:

$$F_{\text{ин}} = \frac{Q}{g} \theta^2 (y + e), \quad (16.43)$$

где  $y$  - прогиб вала в месте посадки диска;  $\theta$  - угловая скорость вращения вала.

Реакция сил упругого сопротивления вала в месте приложения центробежной силы:

$$P = cy, \quad (16.44)$$

где  $c$  - изгибная жесткость вала, для рассматриваемого случая при посадке диска посередине вала между опорами

$$c = \frac{48EJ}{l^3}. \quad (16.45)$$

Вал находится в равновесии. Следовательно, упругие силы и силы инерции уравновешиваются  $F_{\text{ин}} = P$ :

$$F_{\text{ин}} = \frac{Q}{g} \theta (y + e) = cy, \quad (16.46)$$

откуда

$$y = \frac{e}{\frac{c}{\theta^2} \cdot \frac{g}{Q} - 1}. \quad (16.47)$$

Учитывая, что  $\frac{cg}{Q} = \omega^2$  и подставляя в (16.47), получим:

$$y = \frac{e}{\frac{\omega^2}{\theta^2} - 1}. \quad (16.48)$$

Здесь  $\omega$  - собственная частота поперечных колебаний вала.

Из уравнения (16.48) видно, что прогиб вала  $y$  стремится к бесконечности при приближении угловой скорости вращения вала  $\theta$  к собственной частоте поперечных колебаний вала  $\omega$ . Критическим значением скорости вращения вала будет

$$\theta_{\text{кр}} = \omega = \sqrt{\frac{cg}{Q}}. \quad (16.49)$$

Возникновение резонанса в системе, как уже отмечалось выше, не всегда приводит к разрушению конструкции из-за имеющихся в системе потерь сил внутреннего сопротивления и потерь энергии. В результате на практике при попадании вала в резонанс прогибы не всегда принимают значения, опасные для эксплуатации.

При скоростях вращения вала, больших, чем критические, частота колебаний изменяется и вал начинает вращаться спокойнее. Опыты показывают, что при  $\theta > \omega$  центр тяжести диска будет располагаться между линией, соединяющей опоры и искривленной осью вала (Рис.16.17,б). В этом случае уравнение для определения прогиба будет иметь вид:

$$\frac{Q}{g} (y - e) \theta^2 = cy,$$

откуда

$$y = \frac{e}{1 - \frac{c}{\theta^2} \cdot \frac{g}{Q}} = \frac{e}{1 - \frac{\omega^2}{\theta^2}}. \quad (16.50)$$

Из уравнения (16.50) видно, что с увеличением скорости вращения вала прогиб  $y$  уменьшается и приближается к эксцентриситету  $e$ . Это означает, что при очень больших скоростях центр тяжести диска достигает линии,

соединяющей опоры, и изогнутый вал вращается вокруг центра тяжести С диска.

**Пример 16.11.** Вал электродвигателя мощностью 100кВт расположен горизонтально и несет посередине пролета длиной  $l = 0,5$ м диск весом  $Q = 1$ кН. Число оборотов вала  $n = 2000$  об/мин. Определить диаметр вала электродвигателя, если критическое число оборотов выше заданного  $n$  на 30%. Массой вала по сравнению с массой диска пренебречь. Эксцентриситет при посадке диска составил  $e = 0,01$  см;  $[\sigma] = 100$  МПа;  $E = 2 \cdot 10^5$  МПа.

Решение:

1. Определяем частоту собственных колебаний системы, исходя из условия, что в момент наступления резонанса  $\omega = \theta_{кр}$ :

$$\omega = \theta_{кр} = 1,3 \frac{\pi n}{30} = 1,3 \frac{3,14 \cdot 2000}{30} = 272,27 \text{ с}^{-1}.$$

2. Находим диаметр вала из выражения для частоты собственных колебаний:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{\Delta_{ст}}} = \sqrt{\frac{48EJg}{Ql^3}} = \sqrt{\frac{48E\pi d^4 g}{64Ql^3}},$$

откуда

$$d = \sqrt[4]{\frac{\omega^2 4Ql^3}{3gE\pi}} = \sqrt[4]{\frac{4 \cdot 272,27^2 \cdot 1 \cdot 10^3 \cdot 0,5^3}{3 \cdot 9,81 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 3,14}} = 3,76 \cdot 10^{-2} \text{ м} = 37,6 \text{ мм}.$$

3. Определяем максимальный прогиб при колебаниях:

$$f = \frac{e}{\left(\frac{\theta}{\omega}\right)^2 - 1} = \frac{0,01 \cdot 10^{-2}}{1,3^2 - 1} = 1,449 \cdot 10^{-4} \text{ м}.$$

4. Вычисляем нормальные напряжения от изгиба. Для этого воспользуемся выражением для максимального прогиба и преобразуем его.

$$f = \frac{Ql^3}{48EJ} = \frac{Ql}{4W_z} \cdot \frac{l^2 W_z}{12E \frac{\pi d^4}{64}} = \sigma \frac{l^2 \frac{\pi d^3}{32}}{48E \frac{\pi d^4}{64}} = \frac{\sigma l^2}{6Ed},$$

откуда

$$\sigma = \frac{6Edf}{l^2} = \frac{6 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 3,76 \cdot 10^{-2} \cdot 1,449 \cdot 10^{-4}}{0,5^2} \cdot 10^{-6} = 26,15 \text{ МПа.}$$

5. Определяем касательные напряжения при кручении:

$$\tau = \frac{M_{кр}}{W_p} = \frac{9736N}{\frac{\pi d^3}{16} n} = \frac{9736 \cdot 100 \cdot 16}{3,14 \cdot (3,76 \cdot 10^{-2})^3 \cdot 2000} \cdot 10^{-6} = 46,64 \text{ МПа.}$$

6. Выполняем проверку прочности вала с помощью энергетической теории прочности:

$$\sigma_{э\text{кв}}^{IV} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} = \sqrt{26,15^2 + 3 \cdot 46,64^2} = 84,91 \text{ МПа} < [\sigma] = 100 \text{ МПа.}$$

Таким образом, прочность вала обеспечена.

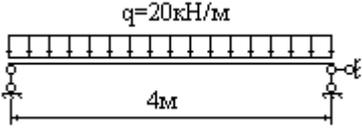
### 16.7. Тесты к теме №16 “Колебания упругих систем”

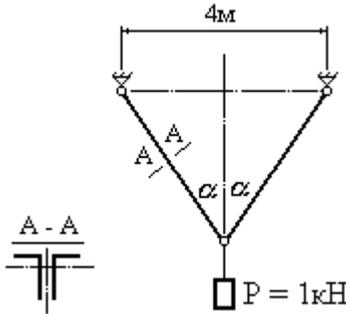
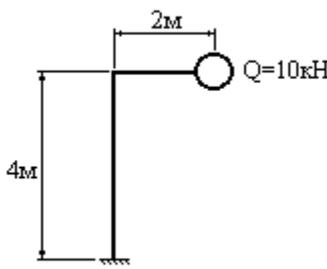
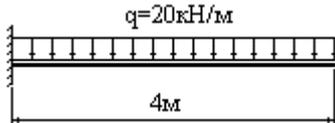
№	Вопрос	Время на ответ, сек
1	С какими колебаниями приходится иметь дело в строительстве и машиностроении?	20
	1. Волновыми.	
	2. Механическими.	
	3. Электромагнитными.	
	4. Звуковыми.	
	5. Электромеханическими.	
2	Чем должно обладать тело, способное совершать колебания?	20
	1. Массой и жесткостью.	
	2. Жесткостью и прочностью.	
	3. Упругостью и массой.	
	4. Массой и прочностью.	
	5. Упругостью и прочностью.	

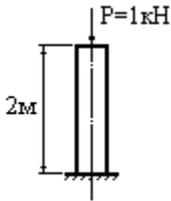
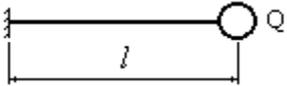
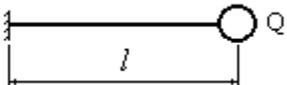
3	Какой из видов колебаний может быть включен до классификации, которая называется “кинематической”?	20
	1. Собственные колебания.	
	2. Автоколебания.	
	3. Вынужденные колебания.	
	4. Периодические колебания.	
	5. Параметрические колебания.	
4	Какая из приведенных на рисунке плоских систем имеет две степени свободы?	30
5	Какие колебания называются собственными?	
	1. Колебания, происходящие под действием на систему (в течение всего времени колебаний) заданных внешних возмущающих сил, которые периодически изменяются и действуют непрерывно независимо от колебаний в системе.	40
	2. Колебания, в процессе которых периодически изменяются физические параметры системы.	
	3. Колебания, возникающие в изолированной системе в результате внешнего возмущения (толчков), которое вызывает в точках системы начальные отклонения от положения равновесия, и продолжаются потом благодаря наличию внутренних упругих сил, восстанавливающих равновесие.	
	4. Незатухающие колебания, возникающие в системе без внешнего периодического влияния и поддерживаемые такими внешними силами, характер влияния которых определяется самим колебательным процессом механической системы.	
6	Какие колебания называются вынужденными?	40
	1. Колебания, происходящие под действием на систему (в течение всего времени колебаний) заданных внешних возмущающих сил, которые периодически изменяются и действуют непрерывно независимо от колебаний в системе.	
	2. Колебания, в процессе которых периодически изменяются физические параметры системы.	

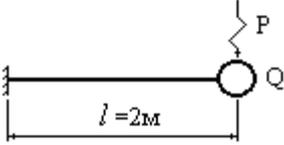
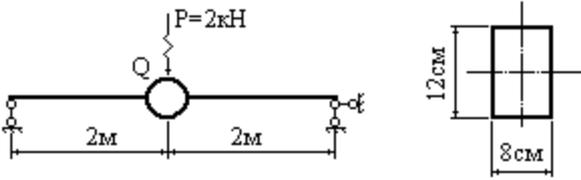
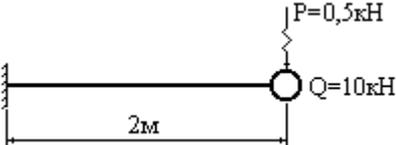
	3. Колебания, возникающие в изолированной системе в результате внешнего возмущения (толчков), которое вызывает в точках системы начальные отклонения от положения равновесия, и продолжаются потом благодаря наличию внутренних упругих сил, восстанавливающих равновесие.	
	4. Незатухающие колебания, возникающие в системе без внешнего периодического влияния и поддерживаемые такими внешними силами, характер влияния которых определяется самим колебательным процессом механической системы.	
7	Какие колебания называются параметрическими?	40
	1. Колебания, происходящие под действием на систему (в течение всего времени колебаний) заданных внешних возмущающих сил, которые периодически изменяются и действуют непрерывно независимо от колебаний в системе.	
	2. Колебания, в процессе которых периодически изменяются физические параметры системы.	
	3. Колебания, возникающие в изолированной системе в результате внешнего возмущения (толчков), которое вызывает в точках системы начальные отклонения от положения равновесия, и продолжаются потом благодаря наличию внутренних упругих сил, восстанавливающих равновесие.	
	4. Незатухающие колебания, возникающие в системе без внешнего периодического влияния и поддерживаемые такими внешними силами, характер влияния которых определяется самим колебательным процессом механической системы.	
8	Какие колебания называются автоколебаниями?	40
	1. Колебания, происходящие под действием на систему (в течение всего времени колебаний) заданных внешних возмущающих сил, которые периодически изменяются и действуют непрерывно независимо от колебаний в системе.	
	2. Колебания, в процессе которых периодически изменяются физические параметры системы.	

	3. Колебания, возникающие в изолированной системе в результате внешнего возмущения (толчков), которое вызывает в точках системы начальные отклонения от положения равновесия, и продолжаются потом благодаря наличию внутренних упругих сил, восстанавливающих равновесие.	
	4. Незатухающие колебания, возникающие в системе без внешнего периодического влияния и поддерживаемые такими внешними силами, характер влияния которых определяется самим колебательным процессом механической системы.	
9	Где находится источник энергии для поддержания автоколебаний?	30
	1. Внутри системы.	
	2. Вне системы.	
	3. Отсутствует вообще.	
10	Какие из этих колебаний не относятся к классификации колебаний в зависимости от вида деформации?	30
	1. Продольные колебания.	
	2. Поперечные колебания.	
	3. Вынужденные колебания.	
	4. Крутильные колебания.	
	5. Изгибно-крутильные колебания.	
11	Частота каких колебаний должна совпадать с частотой возмущающей силы при резонансе?	30
	1. Вынужденных колебаний.	
	2. Параметрических колебаний.	
	3. Автоколебаний.	
	4. Собственных колебаний.	
12	Какое из дифференциальных уравнений описывает собственные колебания системы с одной степенью свободы?	30
	1. $\frac{d^2 y}{dt^2} + \omega^2 y = \frac{P(t)}{m}$	
	2. $\frac{d^2 y}{dt^2} + \omega^2 y = \frac{1}{m} P \sin \theta \cdot t$	
	3. $\frac{d^2 y}{dt^2} + \omega^2 y = 0$	
	4. $\frac{d^2 y}{dt^2} + 2n \frac{dy}{dt} + \omega^2 y = \frac{1}{m} P \sin \theta \cdot t$	

13	Какое из дифференциальных уравнений описывает собственные колебания системы с одной степенью свободы при учете сил внутреннего трения?	30
	1. $\frac{d^2 y}{dt^2} + \omega^2 y = \frac{P(t)}{m}$	
	2. $\frac{d^2 y}{dt^2} + 2n \frac{dy}{dt} + \omega^2 y = 0$	
	3. $\frac{d^2 y}{dt^2} + \omega^2 y = 0$	
	4. $\frac{d^2 y}{dt^2} + 2n \frac{dy}{dt} + \omega^2 y = \frac{1}{m} P \sin \theta \cdot t$	
14	Что называется жесткостью системы при колебаниях?	30
	1. Сила, которую необходимо приложить к системе, чтобы определить единичное перемещение.	
	2. Перемещение, определяемое при приложении к системе единичной силы.	
	3. Единичное перемещение, обусловленное величиной единичной силы.	
	4. Единичная сила, которую необходимо приложить к системе при определении перемещения.	
15	<p>Определить частоту собственных колебаний приведенной на рисунке балки, представляющей собой двутавр №24 с моментом инерции <math>J_z = 3460 \text{ см}^4</math>. Материал балки – сталь с модулем упругости <math>E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}</math>. Коэффициент приведения массы <math>\xi = \frac{17}{35}</math>.</p> 	480
16	<p>Определить частоту собственных колебаний приведенной на рисунке пружины, нагруженной на свободном конце грузом весом <math>P = 20 \text{ Н}</math>. Материал пружины – сталь с модулем сдвига <math>G = 8 \cdot 10^4 \text{ МПа}</math>. Диаметр витка пружины <math>D = 10 \text{ см}</math>. Пружина имеет 10 витков. Диаметр проволоки, из которой изготовлена пружина, <math>d = 8 \text{ мм}</math>.</p> 	600

17	<p>Определить частоту собственных колебаний <math>\omega</math> приведенной на рисунке фермы, элементы которой состоят из двух уголков №5 с площадью поперечного сечения для каждого <math>A = 4,8 \text{ см}^2</math>. Материал фермы – сталь с модулем упругости <math>E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}</math>. Угол <math>\alpha = 30^\circ</math>.</p> 	600
18	<p>Определить частоту собственных колебаний рамы, приведенной на рисунке. Поперечное сечение стойки и ригеля рамы представляет собой двутавр №20 с моментом инерции <math>J_z = 1840 \text{ см}^4</math>. Материал балки – сталь с модулем упругости <math>E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}</math>.</p> 	600
19	<p>Определить частоту собственных колебаний <math>\omega</math> приведенной на рисунке балки, поперечное сечение которой представляет собой двутавр №30 с осевым моментом инерции <math>J_z = 7080 \text{ см}^4</math>. Балка изготовлена из стали с модулем упругости <math>E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}</math>. Коэффициент приведения массы <math>\xi = \frac{33}{140}</math>.</p> 	600

20	<p>Определить частоту собственных колебаний приведенного на рисунке стержня с площадью поперечного сечения <math>A = 10 \text{ см}^2</math>. Материал балки – сталь с модулем упругости <math>E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}</math>.</p> 	480
21	<p>Частота вынужденных колебаний балки, изображенной на рисунке, равняется <math>\theta</math>. Частота собственных колебаний балки равняется <math>\omega</math>. Какое из выражений необходимо использовать для определения коэффициента нарастания колебаний <math>\beta</math>?</p> 	30
1.	$\beta = \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\theta^2}}$	
2.	$\beta = \frac{1}{1 - \frac{\theta^2}{\omega^2}}$	
3.	$\beta = \frac{1}{1 + \frac{\omega^2}{\theta^2}}$	
4.	$\beta = \frac{1}{\frac{\theta^2}{\omega^2} - 1}$	
22	<p>Частота вынужденных колебаний балки, изображенной на рисунке, равняется <math>\theta</math>. Частота собственных колебаний балки равняется <math>\omega</math>. Какое из выражений необходимо использовать для определения амплитуды вынужденных колебаний балки?</p> 	30
1.	$a = \frac{\Delta_{ст}}{1 - \frac{\omega^2}{\theta^2}}$	

2.	$a = \frac{\Delta_{ст}}{1 - \frac{\omega^2}{\theta^2}}$	
3.	$a = \frac{\Delta_{ст}}{1 + \frac{\omega^2}{\theta^2}}$	
4.	$a = \frac{\Delta_{ст}}{\frac{\omega^2}{\theta^2} - 1}$	
23	<p>На балку круглого поперечного сечения диаметром 0,2м, нагруженную силой <math>Q = 20 \text{ кН}</math>, действует возмущающая сила <math>P = 2 \text{ кН}</math> с частотой <math>\theta = 10 \text{ с}^{-1}</math>. Модуль упругости материала балки <math>E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}</math>. Определить величину коэффициента динамичности <math>k_d</math>.</p> 	600
24	<p>Балка прямоугольного профиля (размеры поперечного сечения приведены на рисунке) нагружена силой <math>Q = 10 \text{ кН}</math> и испытывает влияние возмущающей силы <math>P = 2 \text{ кН}</math>. Частота вынужденных колебаний равна <math>\theta = 24,2 \text{ с}^{-1}</math>. Модуль упругости материала балки <math>E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}</math>. Определить амплитуду вынужденных колебаний (в мм).</p> 	600
25	<p>Балка двутаврового профиля №22 с осевым моментом инерции <math>J_z = 2550 \text{ см}^4</math> и осевым моментом сопротивления <math>W_z = 232 \text{ см}^3</math> нагружена на свободном конце постоянной силой <math>Q = 10 \text{ кН}</math> и испытывает действие возмущающей силы <math>P = 0,5 \text{ кН}</math>. Частота вынужденных колебаний равна <math>\theta = 37 \text{ с}^{-1}</math>. Определить максимальные нормальные напряжения в балке.</p> 	600

25	Какую величину определяют с помощью выражения? $? = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\theta^2}{\omega^2}\right)^2 + 4n^2 \frac{\theta^2}{\omega^4}}}$	30
	1. Динамический коэффициент.	
	2. Амплитуду вынужденных колебаний.	
	3. Амплитуду собственных колебаний.	
	4. Коэффициент нарастания колебаний.	
26	Какую величину определяют с помощью выражения? $? = \frac{\Delta_{cm}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\theta^2}{\omega^2}\right)^2 + 4n^2 \frac{\theta^2}{\omega^4}}}$	30
	1. Динамический коэффициент.	
	2. Амплитуду вынужденных колебаний.	
	3. Амплитуду собственных колебаний.	
	4. Коэффициент нарастания колебаний.	