ТЕМА 15

ЗАДАЧИ ДИНАМИКИ. УЧЕТ СИЛ ИНЕРЦИИ И УДАРНОГО ДЕЙСТВИЯ НАГРУЗКИ

15.1. Условия возникновения динамических нагрузок. Три задачи динамики

Во всех рассмотренных выше случаях предполагалось статическое приложение нагрузки, при котором она медленно растет от нуля до своего конечного значения и в дальнейшем остается постоянной либо изменяется редко или так же медленно. При указанных условиях скорости и ускорения смещений отдельных элементов конструкции вследствие деформации весьма малы и можно пренебречь влиянием сил инерции. Однако во многих случаях, особенно в машиностроении, перечисленные условия не соблюдаются. В деталях машин могут иметь место удары, резкие изменения скоростей движения, вибрации и т.п. Все эти обстоятельства влияют на прочность элементов конструкций и деталей машин. В общем случае динамическая нагрузка представляет собой очень сложное воздействие на сооружение, которое не всегда можно учесть.

В курсе сопротивления материалов обычно рассматривают следующие, наиболее часто встречающиеся виды задач:

1. Учет сил инерции.
2. Удар.
3. Колебания.

15.2. Учет сил инерции

Общим приемом решения всех задач, связанных с учетом сил инерции, является принцип Д’Аламбера или принцип кинетостатики. Согласно этому принципу *движущуюся систему можно рассматривать как находящуюся в равновесии, если ко всем ее точкам присоединить дополнительно силы инерции.* Другими словами, при решении практических задач необходимо ко всем массам, движущимся с ускорением, помимо заданных и реактивных сил, приложить также и силы инерции и после этого определить все силовые факторы в различных сечениях стержней с помощью обычных уравнений равновесия. Таким образом, с помощью принципа Д’Аламбера любая динамическая задача по форме решения сводится к более простой (статической) – составлению уравнений равновесия. Для иллюстрации рассмотрим несколько типичных случаев.

15.2.1.Учет сил инерции при поступательном движении

Рассмотрим расчет троса при подъеме груза Q с ускорением a (Рис.15.1). Вес груза Q будем измерять в (кН) ускорение a в (м/с^2). Вес 1 м троса обозначим q (кН/м). Если груз неподвижен, то в произвольном сечении троса mn возникает статическое усилие от веса груза и троса, определяемое из условия равновесия нижней отсеченной части:

$$N_{\text{ст}} = Q + qx.$$

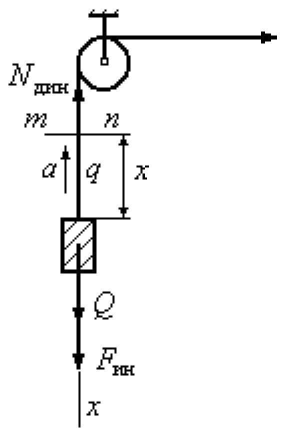


Рис.15.1

При подъеме груза с ускорением a для определения натяжения троса необходимо составлять урвавнение движения груза. Для этой цели воспользуемся принципом Д’Аламбера. Сила инерции численно равна произведению массы на ее ускорение и направлена в сторону, противоположную ускорению. Для рассматриваемого случая сила инерции равна:

$$F_{\text{ин}} = \frac{Q + qx}{g} a,$$

где g - ускорение свободного падения.

Составим уравнение равновесия всех сил, приложенных к тросу. Для этого спроектируем все силы, действующие на трос, в том числе и силу инерции, на ось x. Получим:

$$\Sigma x = F_{\text{ин}} + Q + qx - N_{\text{дин}} = \frac{Q + qx}{g} a + Q + qx - N_{\text{дин}} = 0.$$

Откуда полное усилие $N_{\text{дин}}$ будет равно:

$$N_{\text{дин}} = (Q + qx)\left(1 + \frac{a}{g}\right) = k_{\text{д}} N_{\text{ст}}.$$

Здесь: $k_{\text{д}} = 1 + \frac{a}{g}$ - динамический коэффициент.

Динамические напряжения в тросе найдем из выражения:

$$\sigma_{\text{дин}} = \frac{N_{\text{дин}}}{A} = k_{\text{д}} \sigma_{\text{ст}}.$$

Таким образом, при подъеме груза с ускорением a динамическое напряжение может в несколько раз превысить статическое. Так, например, в скоростных лифтах, где большая скорость подъема может быть достигнута только благодаря большим ускорениям, динамическое напряжение бывает очень большим. Расчет тросов в этом случае должен быть проведен с учетом динамического действия нагрузок.

Если груз опускать с ускорением a, то в формуле динамического коэффициента нужно поставить знак “минус”. При свободном падении груза ускорение $a = -g$, поэтому натяжение в тросе будет равно нулю. Трос будет следовать за падающим грузом без натяжения.

15.2.2. Учет сил инерции при равномерном вращении

Примером конструкции, в которой при равномерном вращении возникают силы инерции, является обод маховика. В первом приближении обод маховика можно рассматривать как тонкое (в радиальном направлении) кольцо, вращающееся равномерно вокруг неподвижной оси с угловой скоростью ω. Кольцо вращается в горизонтальной плоскости. На рис 15.2,а проказан вид на вращающееся кольцо сверху.

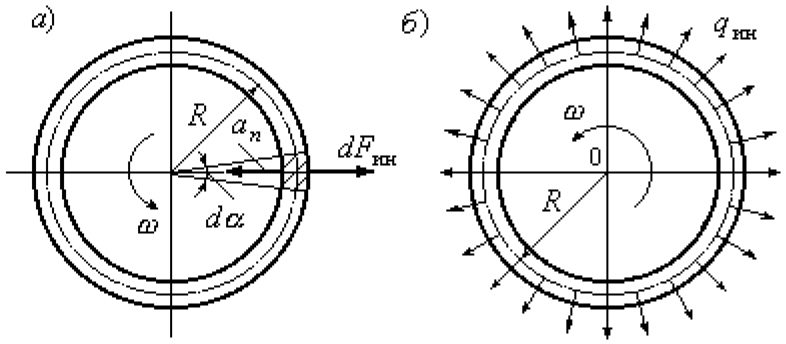


Рис.15.2

Требуется произвести расчет обода на прочность без учета влияния спиц. Силы тяжести малы, ими пренебрегаем. Основные силы – силы инерции, вызванные равномерным вращением кольца.

Двумя радиальными сечениями, проведенными из центра кольца под взаимным углом $d\alpha$ вырежем из кольца бесконечно малый элемент длиной $Rd\alpha$ и рассмотрим силы и ускорения, которые на него действуют.

При равномерном вращении кольца с постоянной угловой скоростью ω в бесконечно малом элементе возникнет центростремительное ускорение $a_n = \omega^2 R$, направленное вдоль радиуса внутрь кольца. В противоположном направлении, т.е. от центра кольца на вырезанный элемент будет действовать сила инерции (Рис.15.2,а):

$$dF_{\text{ин}} = dm \cdot a_n = \rho \cdot A \cdot R \cdot d\alpha \cdot \omega^2 R, \tag{15.1}$$

где A - площадь поперечного сечения кольца; ρ - плотность материала; R - радиус срединной поверхности кольца.

В силу симметрии нагрузки в каждой точке кольца возникнет такая же по величине сила, но направленная в ином направлении – вдоль радиуса от центра кольца. Интенсивность этой нагрузки найдем, разделив силу инерции, приложенную к бесконечно малому элементу на длину дуги, на которой эта сила действует:

$$q_{\text{ин}} = \frac{dF_{\text{ин}}}{R \cdot d\alpha} = \rho \cdot A \cdot \omega^2 R. \tag{15.2}$$

Таким образом, кольцо при равномерном вращении подвергается равномерно распределенной нагрузке в виде сил инерции интенсивностью $q_{\text{ин}}$ (Рис.15.2,б).

Очевидно, что кроме сил инерции на бесконечно малый элемент будут действовать еще силы, в частности, направленные в окружном направлении. Найдем эти силы. Для этого рассмотрим кольцо, как некоторый замкнутый крнтур, не имеющий промежуточных шарниров. Как известно, такой контур три раза статически неопределим. Учитывая то, что кольцо тонкое, можно пренебречь неравномерностью распределения напряжений по его толщине. Если напряжения во всех точках поперечного сечения кольца будут одинаковы, то это означает, что в кольце отсутствуют изгибающие моменты M. Отсутствие изгибающих моментов исключает наличие деформации изгиба в кольце. Следовательно, поперечная сила Q также будет отсутствовать в кольце.

Получается, что из трех внутренних усилий в кольце (N, Q и M) два (Q и M) равны нулю. Остается только одно усилие – продольная сила N. Значит, кольцо работает на растяжение.

Найдем значение продольной силы, действующей в кольце. Для этого двумя радиальными сечениями вырежем бесконечно малый элемент длиной $R \cdot d\alpha$ из срединной линии кольца и приложим к нему распределенную нагрузку интенсивности $q_{\text{ин}}$ и равнодействующие нормальных усилий N, распределенных по площади поперечного сечения кольца (Рис.15.3).

Спроектируем силы, действующие на вырезанный элемент, на ось y. Получим:

$$\Sigma y = q_{ин} R \cdot d\alpha - 2N \sin\frac{d\alpha}{2} = 0. \qquad (15.3)$$

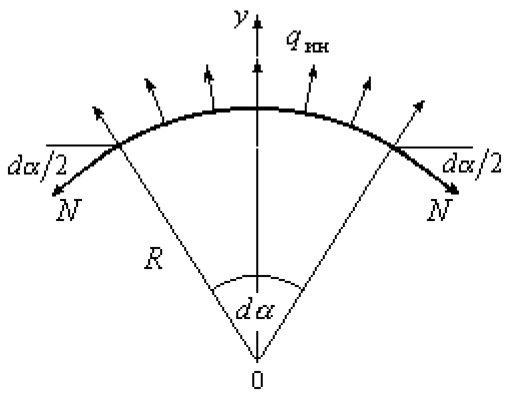


Рис.15.3

В виду малости угла $\frac{d\alpha}{2}$ заменяем его синус углом: $\sin\frac{d\alpha}{2} \approx \frac{d\alpha}{2}$ и подставляем его в (15.3). Решаем равенство (15.3) относительно продольной силы N, получаем:

$$N = q_{ин} R = \rho \cdot A \cdot \omega^2 R^2 = \rho \cdot A \cdot v^2. \qquad (15.4)$$

Здесь v - величина окружной скорости на ободе.

Максимальные напряжения в ободе получим, разделив продольную силу N, на площадь поперечного сечения кольца A:

$$\sigma_{max} = \frac{N}{A} = \rho \cdot v^2. \qquad (15.5)$$

Учитывая, что плотность $\rho = \frac{\gamma}{g}$, где γ - удельный вес материала и вводя величину допускаемого напряжения, получим условие прочности в виде:

$$\sigma_{max} = \frac{\gamma}{g} \cdot v^2 \le [\sigma]. \qquad (15.6)$$

Из формул (15.5) и (15.6) видно, что напряжения в ободе не зависят от площади поперечного сечения. Поэтому увеличение площади поперечного сечения обода не приводит к снижению напряжения в нем. Очевидно, чтобы уменьшить напряжения в ободе, нужно снижать скорость вращения обода, либо применять более прочные материалы с высоким значением $[\sigma]$. Предельную скорость на ободе можно определить из условия прочности:

$$v \le \sqrt{\frac{[\sigma] \cdot g}{\gamma}}.$$

Обычно скорость вращения маховиков ограничивают. Для литых маховиков скорость на ободе не должна превышать 25м/сек. Поскольку опасность разрушения маховиков даже при этом остается высокой, маховики ограждают мощной металлической сеткой.

Рассмотрим деформации обода в окружном и радиальном направлениях. Относительное удлинение по окружности кольца в соответствием с законом Гука и с учетом выражения (15.5) равно:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{\rho \cdot v^2}{E} = \frac{\gamma}{gE}\omega^2 R^2 . \qquad (15.7)$$

Нетрудно убедиться в том, что при увеличении радиуса R на величину абсолютной деформации u, относительная окружное удлинение ε будет равно относительному радиальному удлинению $\varepsilon_R = \frac{u}{R}$. Действительно, если радиус кольца после деформации станет равным $R_1 = R + u$, то относительную деформацию по окружности можно будет найти по формуле:

$$\varepsilon = \frac{2\pi \cdot R_1 - 2\pi \cdot R}{2\pi \cdot R} = \frac{R_1 - R}{R} = \frac{u}{R} = \varepsilon_R . \qquad (15.8)$$

Из выражения (15.8) найдем перемещение u точек оси кольца в радиальном направлении:

$$u = \varepsilon \cdot R = \frac{\gamma}{gE}\omega^2 R^3 . \qquad (15.9)$$

15.2.3. Учет сил инерции при расчете стержня, вращающегося вокруг неподвижной оси

Рассмотрим стержень длиной l, вращающийся с постоянной угловой скоростью ω вокруг неподвижной оси y (Рис.15.4,а). Известны площадь поперечного сечения стержня A, плотность материала ρ. Требуется определить максимальную величину продольной динамической силы, действующей в стержне и величину максимальных нормальных напряжений в стержне. Кроме этого, требуется получить закон изменения сил инерции по длине стержня.

Поместим начало координат на левом конце стержня в точке O и вырежем из стержня на расстоянии x от начала координат бесконечно малый элемент стержня длиной dx. На вырезанный элемент будут действовать нормальное ускорение a_n, направленное в сторону начала координат и сила инерции $dF_{\text{ин}} = \rho \cdot A \cdot dx\omega^2 x$ (Рис.15.4,а).

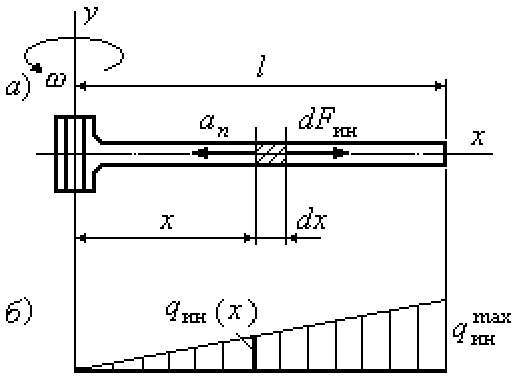


Рис.15.4

Максимальную продольную силу в стержне, вызванную действием сил инерции, найдем из интеграла:

$$N_{\max}^{\text{дин}} = \int_0^l \rho \cdot A \cdot \omega^2 x dx = \rho \cdot A \cdot \omega^2 \frac{l^2}{2} = \frac{\gamma}{2g} \cdot A \cdot v^2 . \tag{15.10}$$

Максимальные нормальные напряжения в стержне и условие прочности принимают вид:

$$\sigma_{\max}^{\text{дин}} = \frac{N_{\max}^{\text{дин}}}{A} = \rho \cdot \omega^2 \frac{l^2}{2} = \frac{\gamma}{2g} \cdot v^2 \le [\sigma]. \tag{15.11}$$

Так же, как и в ободе, прочность стержня от размера площади не зависит, а зависит от квадрата окружной скорости на свободном конце стержня $v^2 = \omega^2 l^2$.

Интенсивность распределенной нагрузки по длине стержня:

$$q_{ин} = \frac{dF_{ин}}{dx} = \rho \cdot A \cdot \omega^2 x = \frac{\gamma}{g} A \cdot \omega^2 x . \tag{15.12}$$

Выражение (15.12) представляет собой закон распределения интенсивности распределенной нагрузки по длине стержня. Из него видно, что интенсивность распределенных сил инерции является линейной функцией продольной координаты. График этой зависимости приведен на рис.15.4,б.

15.2.4. Учет сил инерции при расчете вращающихся дисков

Вращающийся диск обычно испытывает растяжение под действием центробежных сил, являющихся для него основной нагрузкой, а также изгиб. Обычно силы инерции действуют симметрично относительно оси диска, вследствие чего напряжение является функцией расстояния от оси вращения.

Будем считать, что в тонком плоском диске постоянной толщины h, напряжения по толщине распределены равномерно, а напряжения, параллельные оси диска, отсутствуют ($\sigma_z = 0$). Таким образом, во вращающемся диске возникает плоское напряженное состояние.

Рассмотрим диск, вращающийся с постоянной угловой скоростью ω[3]. Удельный вес материала диска γ. Силы инерции, действующие на выделенную часть диска, выразим в виде равнодействующей (Рис.15.5), лежащей в срединной плоскости элемента:

$$dF_{\text{ин}} = \frac{\gamma}{g} hrd\theta \cdot dr \cdot \omega^2 r\,.$$

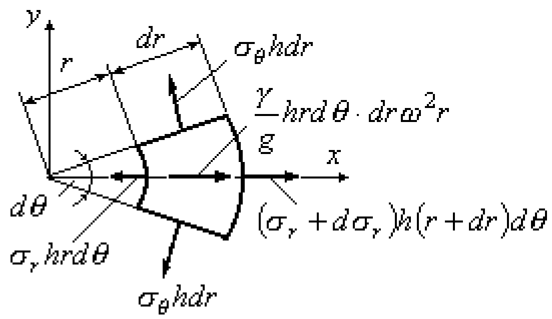


Рис.15.5

Спроектируем все силы, действующие на выделенный элемент, на ось x и приравняем нулю. После некоторых сокращений и преобразований, получим уравнение равновесия в виде:

$$\Sigma x = r\frac{d\sigma_r}{dr} + \sigma_r - \sigma_\theta - \frac{\gamma}{g}\omega^2 r^2 = 0\,. \qquad (15.13)$$

Геометрические и физические уравнения при расчете вращающихся дисков будут такими же, как и в задаче Ламе (13.18)-(13.21). Поэтому дифференциальное уравнение (15.13) в перемещениях с учетом (13.20), (13.21) примет вид:

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{r}\cdot\frac{du}{dr} - \frac{u}{r^2} = -\frac{1-\mu^2}{E}\cdot\frac{\gamma}{g}\omega^2 r\,. \qquad (15.14)$$

Переписав (15.14) в виде

$$\frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r}\cdot\frac{d(ur)}{dr}\right] = -\frac{1-\mu^2}{E}\cdot\frac{\gamma}{g}\omega^2 r$$

и проинтегрировав его последовательно дважды, найдем:

$$u = \overline{C}_1 r + \frac{\overline{C}_2}{r} - \frac{1-\mu^2}{8E} \cdot \frac{\gamma}{g}\omega^2 r^3 . \tag{15.15}$$

Подставив (15.15) в (13.20)-(13.21), получим:

$$\sigma_r = C_1 + \frac{C_2}{r^2} - \frac{3+\mu}{8} \cdot \frac{\gamma}{g}\omega^2 r^2 ; \tag{15.16}$$

$$\sigma_\theta = C_1 - \frac{C_2}{r^2} - \frac{1+3\mu}{8} \cdot \frac{\gamma}{g}\omega^2 r^2 , \tag{15.17}$$

где

$$C_1 = \frac{E}{1-\mu}\overline{C}_1 ; \; C_2 = -\frac{E}{1+\mu}\overline{C}_2 .$$

Постоянные $C_1, C_2, \overline{C}_1$ и $\overline{C}_2$ определяются из граничных условий. Для диска с центральным отверстием имеем следующие условия на внутреннем ($r = r_1$) и внешнем ($r = r_2$) контурах:

$$(\sigma_r)_{r=r_1} = \sigma_{r_1} ;$$

$$(\sigma_r)_{r=r_2} = \sigma_{r_2} .$$

В соответствии с (15.16) эти условия дают два уравнения:

$$\sigma_{r_1} = C_1 + \frac{C_2}{r_1^2} - \frac{3+\mu}{8} \cdot \frac{\gamma}{g}\omega^2 r_1^2 ;$$

$$\sigma_{r_2} = C_1 + \frac{C_2}{r_2^2} - \frac{3+\mu}{8} \cdot \frac{\gamma}{g}\omega^2 r_2^2 .$$

Решая совиместно эту систему уравнений, находим:

$$C_1 = \frac{r_2^2}{r_2^2 - r_1^2}\sigma_{r_2} - \frac{r_1^2}{r_2^2 - r_1^2}\sigma_{r_1} + \frac{3+\mu}{8} \cdot \frac{\gamma}{g}\omega^2 (r_1^2 + r_2^2); \tag{15.18}$$

$$C_2 = \frac{r_2^2 r_1^2}{r_2^2 - r_1^2}\sigma_{r_2} - \frac{r_1^2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2}\sigma_{r_1} - \frac{3+\mu}{8} \cdot \frac{\gamma}{g}\omega^2 r_1^2 r_2^2 . \tag{15.19}$$

В случае, когда $\sigma_{r_2} = 0$ и $\sigma_{r_1} = 0$,

$$C_1 = \frac{3+\mu}{8} \cdot \frac{\gamma}{g}\omega^2 (r_1^2 + r_2^2); \tag{15.20}$$

$$C_2 = -\frac{3+\mu}{8}\cdot\frac{\gamma}{g}\omega^2 r_1^2 r_2^2 . \qquad (15.21)$$

Подставляя последние значения C_1 и C_2 в формулы (15.16) и (15.17), получим:

$$\sigma_r = \frac{3+\mu}{8}\cdot\frac{\gamma}{g}\omega^2\left(r_1^2 + r_2^2 - \frac{r_1^2 r_2^2}{r^2} - r^2\right); \qquad (15.22)$$

$$\sigma_\theta = \frac{1}{8}\cdot\frac{\gamma}{g}\omega^2\left[(3+\mu)\left(r_1^2 + r_2^2 + \frac{r_1^2 r_2^2}{r^2}\right) - (1+3\mu)r^2\right]. \qquad (15.23)$$

Введем обозначения:

$$\frac{r_1}{r_2} = k;\ \ \frac{r}{r_2} = \rho;\ \ \frac{3+\mu}{8}\cdot\frac{\gamma}{g}\omega^2 r_2^2 = c;\ \ \frac{1+3\mu}{3+\mu} = m. \qquad (15.24)$$

Перепишем с учетом введенных обозначений уравнения (15.22) и (15.23) для радиальных и окружных напряжений в виде:

$$\sigma_r = c\left[1 + k^2\left(1 - \frac{1}{\rho^2}\right) - \rho^2\right]; \qquad (15.25)$$

$$\sigma_\theta = c\left[1 + k^2\left(1 + \frac{1}{\rho^2}\right) - m\rho^2\right]. \qquad (15.26)$$

Напряжение σ_r положительно и достигает наибольшей величины при $\rho = \sqrt{k} = \sqrt{\frac{r_1}{r_2}}$:

$$(\sigma_r)_{\max} = c(1 - k^2). \qquad (15.27)$$

Напряжение σ_θ тоже положительно при всех значениях ρ и достигает максимума при $\rho = k$:

$$(\sigma_\theta)_{\max} = c\left[2 + (1 - m)k^2\right]. \qquad (15.28)$$

Сравнивая (15.27) и (15.28) приходим к выводу, что всегда имеет место неравенство $(\sigma_\theta)_{\max} > (\sigma_r)_{\max}$. Поэтому, используя третью теорию прочности условие прочности запишем в виде:

$$\sigma_{\text{экв}}^{\text{III}} = (\sigma_\theta)_{\max} = c\left[2 + (1 - m)k^2\right] \le [\sigma]. \qquad (15.29)$$

Формулы для напряжений в сплошном диске ($r_1 = 0$) на основании (15.16) и (15.17) принимают вид:

$$\sigma_r = C_1 - \frac{3+\mu}{8} \cdot \frac{\gamma}{g}\omega^2 r^2; \qquad (15.30)$$

$$\sigma_\theta = C_1 - \frac{1+3\mu}{8} \cdot \frac{\gamma}{g}\omega^2 r^2. \qquad (15.31)$$

Если внешняя нагрузка на наружном контуре ($r = r_2$) отсутствует, т.е. $\sigma_{r_2} = 0$, то согласно (15.30) находим:

$$C_1 = \frac{3+\mu}{8} \cdot \frac{\gamma}{g}\omega^2 r^2 = c \;. \qquad (15.32)$$

Подставляя (15.32) в (15.30) и (15.31), получим:

$$\sigma_r = c\left(1 - \rho^2\right); \qquad (15.33)$$

$$\sigma_\theta = c\left(1 - m\rho^2\right). \qquad (15.34)$$

Оба напряжения положительны и увпеличиваются с приближением к центру. В центре диска при $\rho = 0$

$$(\sigma_r)_{\max} = (\sigma_\theta)_{\max} = c = \frac{3+\mu}{8} \cdot \frac{\gamma}{g}\omega^2 r_2^2. \qquad (15.35)$$

В соответствии с (13.19) радиальное перемещение

$$u = \varepsilon_\theta r. \qquad (15.36)$$

Так как

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{E}(\sigma_\theta - \mu\sigma_r),$$

то

$$u = \frac{r}{E}(\sigma_\theta - \mu\sigma_r). \qquad (15.37)$$

Для определения перемещения на наружном контуре диска в формулу (15.37) необходимо подставить значения $r = r_2$; $\sigma_\theta = \sigma_{\theta_2}$; $\sigma_r = \sigma_{r_2}$.

15.3. Примеры расчета элементов конструкций с учетом влияние сил инерции

Пример 15.1. Груз Q весом 30кН поднимается равноускоренно с помощью стального троса, причем за первые две секунды он поднимается на высоту $h=4$ м. Площадь поперечного сечения троса $A=5$ см^2, длина троса $l=90$ м, удельный вес материала $\gamma=72$ кН/м^3. Определить наибольшее нормальное напряжение в тросе без учета и с учетом его собственного веса.

Решение:

1. Из формулы для равноускоренного движения $h=\dfrac{at^2}{2}$ найдем величину ускорения движения груза:

$$a=\frac{2h}{t^2}=\frac{2\cdot 4}{2^2}=2\ \text{м/с}^2.$$

2. Находим динамический коэффициент при поступательном движении:

$$k_{\text{д}}=1+\frac{a}{g}=1+\frac{2}{9{,}81}=1{,}204\,.$$

4. Определяем динамическое напряжение в тросе без учета его веса:

$$\sigma_{\text{дин}}=\frac{N_{\text{дин}}}{A}=k_{\text{д}}\frac{Q}{A}=1{,}204\frac{30\cdot 10^3}{5\cdot 10^{-4}}10^{-6}=72{,}24\ \text{МПа}.$$

5. Определяем динамические напряжения в тросе с учетом его собственного веса:

$$\sigma_{\text{дин}}=\frac{N_{\text{дин}}}{A}=k_{\text{д}}\left(\frac{Q}{A}+\gamma\cdot l\right)=1{,}204\left(\frac{30\cdot 10^3}{5\cdot 10^{-4}}+72\cdot 10^3\cdot 90\right)10^{-6}=80{,}04\ \text{МПа}.$$

Пример 15.2. На двух балках корытного профиля №20 установлена лебедка весом $Q=8$кН, поднимающая груз $P=30$кН с помощью стального троса (Рис.15.6,а). Подъем груза происходит с постоянным ускорением $a=4$м/с^2. Учитывая вес груза, лебедки и собственный вес балок, определить величину наибольшего нормального напряжения в балках и тросе.

Решение:

1. Определяем коэффициент динамичности:

$$k_{\text{д}} = 1 + \frac{a}{g} = 1 + \frac{4}{9{,}81} = 1{,}408\,.$$

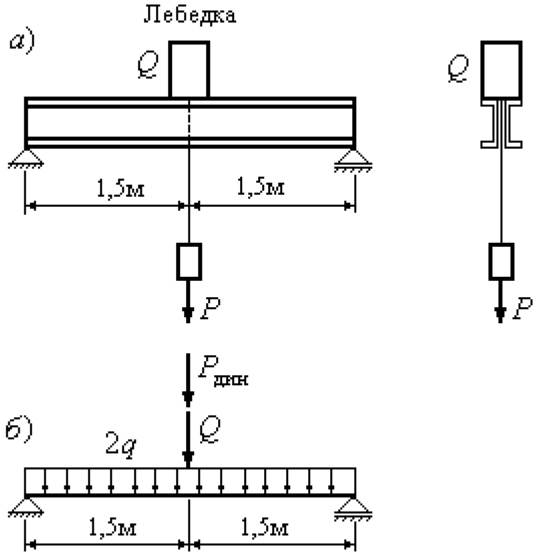


Рис.15.6

2. Определяем динамическое усилие в тросе:

$$N_{\text{дин}} = P_{\text{дин}} = k_{\text{д}} P = 1{,}408 \cdot 30 = 42{,}23 \text{ кН.}$$

3. Вычисляем динамическое напряжение в тросе:

$$\sigma_{\text{дин}} = \frac{N_{\text{дин}}}{A} = k_{\text{д}} \frac{P}{A} = 1{,}408 \frac{30 \cdot 10^3}{5 \cdot 10^{-4}} 10^{-6} = 84{,}46 \text{ МПа.}$$

4. Расчетная схема балок приведена на рис.15.6,б. Максимальный изгибающий момент в балках от веса лебедки Q, динамического усилия в тросе $P_{\text{дин}}$ и собственного веса балок:

$$M_{\max} = \frac{(Q + P_{\text{дин}}) \cdot l}{4} + \frac{2ql^2}{8} = \frac{(8 + 42{,}23) \cdot 3}{4} + \frac{2 \cdot 0{,}184 \cdot 3^2}{8} = 38{,}09 \text{ кНм,}$$

где $q = 0{,}184$ кН/м – вес одного метра швеллера №20.

4. Определяем максимальные нормальные напряжения в балках:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{2W_z} = \frac{38{,}09 \cdot 10^3}{2 \cdot 152 \cdot 10^{-6}} 10^{-6} = 125{,}3 \text{ МПа.}$$

Пример 15.3. Чугунный стержнень круглого поперечного сечения, несущий на свободном конце груз P (Рис.15.7), вращается вокруг горизонтальной оси $O - O$ с постоянной угловой скоростью $\omega = 120$ с$^{-1}$.

Определить величину груза P, при котором произойдет разрушение стержня, если предел прочности чугуна при растяжении равен $\sigma_B = 160$ МПа, о объемный вес $\gamma = 72$ кН/м^3.

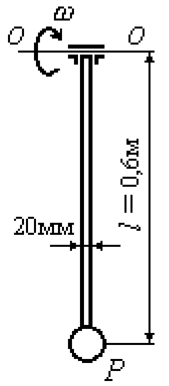


Рис.15.7

Решение:

1. Вычислим суммарную инерционную силу, вызванную вращением груза и стержня:

$$F_{\text{ин}} = \frac{P}{g}\omega^2 l + \frac{A\gamma}{2g}\omega^2 l^2 .$$

2. Полное динамическое усилие в стержне:

$$P_{\text{дин}} = P + \frac{P}{g}\omega^2 l + \frac{A\gamma}{2g}\omega^2 l^2 = \left(1 + \frac{\omega^2 l}{g}\right) P + \frac{A\gamma}{2g}\omega^2 l^2 .$$

3. Условие разрушения стержня имеет вид:

$$\sigma_{\text{дин}} = \left(1 + \frac{\omega^2 l}{g}\right)\frac{P}{A} + \frac{\gamma}{2g}\omega^2 l^2 = \sigma_B .$$

4. Разрушающее значение силы P равно:

$$P_{\text{разр}} = \frac{\left(\sigma_B - \frac{\gamma}{2g}\omega^2 l^2\right)\cdot A}{1 + \frac{\omega^2 l}{g}} = \frac{\left(160\cdot 10^6 - \frac{72\cdot 10^3\cdot 0,6\cdot 120^2\cdot 0,6}{2\cdot 9,81}\right)\cdot\frac{\pi\cdot 2^2}{4}10^{-4}}{1 + \frac{120^2\cdot 0,6}{9,81}} = 50,2 \text{ Н.}$$

Пример 15.4. Наибольшая безопасная окружная скорость для чугунных маховиков принимается равной $v = 25$ м/с. Пренебрегая влиянием спиц и считая удельный вес чугуна $\gamma = 74$ кН/м^3, определить наибольшее растягивающее напряжение в ободе маховика при указанной окружной скорости.

Решение:

Наибольшее растягивающее напряжение в ободе маховика определим из формулы:

$$\sigma_{\max} = \frac{\gamma}{g} v^2 = \frac{74 \cdot 10^3}{9{,}81} 25^2 \cdot 10^{-6} = 4{,}71 \text{ МПа.}$$

Пример 15.5. Скорость вращения чугунного маховика за время $t = 0{,}5$ секунды равномерно изменяется с $n_1 = 300$ об/мин до $n_1 = 200$ об/мин. Обод маховика весит $G = 8$ кН, радиус инерции его равен $i = 40$ см. Определить величину крутящего момента $M_{\text{кр}}$ и наибольшего касательного напряжения $\tau_{\max}$, возникающего вследствие этого изменения скорости вала, на который насажен маховик, если диаметр вала равен $d = 80$ мм.

Решение:

1. Определяем величину ускорения вращения вала:

$$\varepsilon = \frac{\pi \cdot (n_1 - n_2)}{30t} = \frac{3{,}14(300 - 200)}{30 \cdot 0{,}5} = 20{,}944 \text{ с}^{-1}.$$

2. Определяем величину крутящего момента, возникающего вследствие изменения скорости вала:

$$M_{\text{кр}} = m \cdot i^2 \varepsilon = \frac{G}{g} i^2 \varepsilon = \frac{8 \cdot 10^3}{9{,}81} 0{,}4^2 20{,}944 \cdot 10^{-3} = 2{,}732 \text{ кНм.}$$

3. Определяем максимальные касательные напряжения, возникающие в вале:

$$\tau_{\max} = \frac{M_{кр}}{W_p} = \frac{M_{кр}}{\frac{\pi \cdot d^3}{16}} = \frac{16 \cdot 2{,}732 \cdot 10^3}{3{,}14 \cdot 8^3 \cdot 10^{-6}} 10^{-6} = 27{,}19 \text{ МПа.}$$

Пример 15.6. На вал диаметром $d = 60$ мм насажен маховик с моментом инерции $J_0 = 600$ Нмс^2. Скорость вращения вала равна $n = 400$ об/мин. Внезапно начинает действовать тормоз, останавливающий маховик через $k = 20$ оборотов. Вал с маховиком отключаются от двигателя до пуска в ход тормоза. Определить величину наибольшего касательного напряжения в вале. Трением в подшипниках пренебречь.

Решение:

1. Определяем ускорение, возникшее в результате торможения:

$$\varepsilon = \frac{n}{t} = \frac{400}{t} \text{ 1/мин}^2.$$

2. Определяем время до остановки:

$$k = \omega_0 t - \frac{\varepsilon \cdot t^2}{2} = 400t - \frac{\frac{400}{t}}{2} t^2 = 200t = 20 \text{ об.}$$

Откуда:

$$t = \frac{20}{200} = 0{,}1 \text{ мин} = 6 \text{ с.}$$

3. Определяем величину крутящего момента:

$$M_{\text{кр}} = J_0 \varepsilon = J_0 \frac{\pi \cdot n}{30t} = 600 \frac{3{,}14 \cdot 400}{30 \cdot 6} 10^{-3} = 4{,}189 \text{ кНм.}$$

4. Вычисляем максимальные касательные напряжения в вале:

$$\tau_{\max} = \frac{M_{\text{кр}}}{W_p} = \frac{M_{\text{кр}}}{\frac{\pi \cdot d^3}{16}} = \frac{16 \cdot 4{,}189 \cdot 10^3}{3{,}14 \cdot 6^3 \cdot 10^{-6}} 10^{-6} = 98{,}78 \text{ МПа.}$$

Пример 15.7. Кожаный ремень шириной $b = 15$ см и толщиной $h = 6$ мм перекинут через шкив диаметром $D = 1$ м и передает мощность $N = 28$ л.с. Шкив вращается с постоянной скоростью и делает $n = 450$ об/мин. Вес 1см^3 ремня равен 10Н ($\gamma = 10$ кН/м^3). Определить напряжения в ремне без учета и с учетом возникающих в нем сил инерции, если отношение усилий в набегающей и сбегающей ветвях ремня равно $s = 2{,}5$.

Решение:

1. Определяем величину внешнего момента, который передает вал при вращении:

$$M = 7{,}162 \frac{N}{n} = 7{,}162 \frac{28}{450} = 0{,}446 \text{ кНм.}$$

2. Крутящий момент, действующий в вале, равен по величине внешнему и складывается из моментов, которые создают усилия в ветвях ремня:

$$M_{кр} = M = -T \cdot \frac{D}{2} + 2{,}5T \cdot \frac{D}{2} = 1{,}5T \cdot 0{,}5 = 0{,}446 \text{ кНм},$$

откуда

$$T = \frac{M_{кр}}{0{,}75} = \frac{0{,}446}{0{,}75} = 0{,}595 \text{ кН}.$$

Натяжение в набегающей ветви без учета сил инерции будет в 2,5 раза больше: $2{,}5T = 2{,}5 \cdot 0{,}505 = 1{,}488$ кН

3. Напряжение в набегающей ветви ремня без учета влияния сил инерции найдем, разделив усилие в ней на площадь поперечного сечения:

$$\sigma = \frac{2{,}5T}{A} = \frac{2{,}5T}{bh} = \frac{1{,}488 \cdot 10^3}{15 \cdot 0{,}6 \cdot 10^{-4}} 10^{-6} = 1{,}65 \text{ МПа}.$$

4. При учете сил инерции, возникающих в ремне, усилия в ветвях ремня увеличатся на величину:

$$N_{ин} = q_{ин} \frac{D}{2} = \frac{\gamma}{g} A\omega^2 \left(\frac{D}{2}\right)^2.$$

Дополнительные напряжения от влияния сил инерции составят:

$$\sigma_{ин} = \frac{\gamma^2}{g}\left(\omega \frac{D}{2}\right)^2 = \frac{10 \cdot 10^3 \cdot 1}{4 \cdot 9{,}81}\left(\frac{\pi \cdot 450}{30}\right)^2 10^{-6} = 0{,}566 \text{ МПа}.$$

Суммарные напряжения в ремне будут равны:

$$\sigma_{дин} = \sigma + \sigma_{ин} = 1{,}65 + 0{,}566 = 2{,}216 \text{ МПа}.$$

Пример 15.8. Груз весом $P = 10$ Н вращается с постоянной угловой скоростью $\omega = 18 \text{ с}^{-1}$ в горизонтальной плоскости, удерживаемый стальной пружиной, имеющей до деформации длину $l = 20$ см (Рис.15.8). Найти удлинение пружины и наибольшее касательное напряжение в ней, если она имеет $n = 30$ витков при среднем радиусе витке $R = 4$ см и радиусе проволоки $r = 3$ мм. Трением груза о гризонтальную плоскость пренебречь.

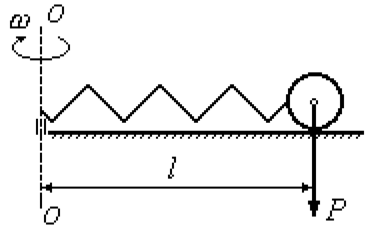


Рис.15.8

Решение:

1. Определяем динамическую силу, возникающую в пружине при вращении:

$$P_{\text{дин}} = F_{\text{ин}} = m\omega^2(l + \lambda_{\text{д}}) = m\omega^2\left(l + \frac{4\cdot P_{\text{дин}} R^3 n}{Gr^4}\right), \qquad \text{(a)}$$

где m - масса груза; $\lambda_{\text{д}}$ - удлинение пружины, вызванное силой инерции; G - модуль сдвига.

Из уравнения (а) динамическая сила равна:

$$P_{\text{дин}} = \frac{\frac{P}{g}\omega^2 l}{1 - \frac{\omega^2 P}{g}\cdot\frac{4R^3 n}{Gr^4}} = \frac{\frac{10}{9{,}81}18^2\cdot 0{,}2}{1 - \frac{18^2\cdot 10}{9{,}81}\cdot\frac{4\cdot 0{,}04^3\cdot 30}{8\cdot 10^{10}\cdot 3^4\cdot 10^{-12}}} = 108{,}54 \text{ Н.}$$

2. Вычисляем удлинение пружины $\lambda_{\text{д}}$:

$$\lambda_{\text{д}} = \frac{P_{\text{дин}} 4R^3 n}{Gr^4} = \frac{108{,}54\cdot 4\cdot 0{,}04^3\cdot 30}{8\cdot 10^{10}\cdot 3^4\cdot 10^{-12}} = 0{,}129 \text{ м.}$$

3. Определяем максимальные касательные напряжения, возникающие в пружине:

$$\tau_{\max} = \frac{M_{кр}}{W_p} + \frac{Q}{A} = \frac{P_{дин}R}{\frac{\pi\cdot r^3}{2}} + \frac{P_{дин}}{\pi\cdot r^2} = \left(\frac{108{,}54\cdot 0{,}04}{\frac{3{,}14\cdot 3^3\cdot 10^{-9}}{2}} + \frac{108{,}54}{3{,}14\cdot 3^2 1`0^{-6}}\right)\cdot 10^{-6} = 106{,}21 \text{ МПа.}$$

Пример 15.9. Валик и жестко связанный с ним ломаный стержень того же поперечного сечения вращаются с постоянной угловой скоростью ω вокруг оси АВ (Рис.15.9). Диаметр валика $d = 24$ мм. Определить допускаемое число оборотов валика в минуту при допускаемом напряжении $[\sigma] = 160$ МПа и удельным весом материала $\gamma = 78$ кН/м^3. Длина участка ломаного стержня $l = 0{,}5$ м.

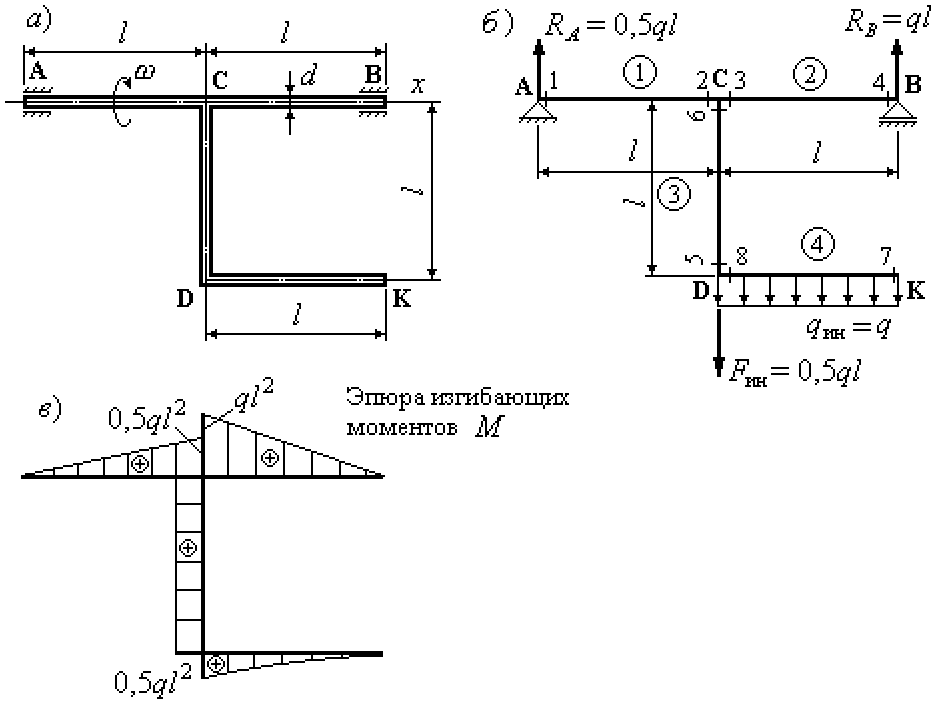


Рис.15.9

Решение:

1. Составим расчетную схему (Рис.15.9,б). Для этого приложим к элементу DK распределенную нагрузку интенсивности $q = q_{ин} = \frac{\gamma}{g} A\omega^2 l$, вызванную вращением валика вокруг оси x, а также равнодействующую сил инерции $F_{ин} = \frac{\gamma}{2g} A\omega^2 l^2$, возникающую в вертикальном стержне CD. Для удобства расчетов выразим равнодействующую сил инерции через интенсивность распределенной нагрузки $F_{ин} = 0{,}5ql$.

2. Найдем опорные реакции в сечениях A и B. Для этого составим два уравнения равновесия в общем виде:

$$\Sigma M_A = R_B \cdot 2l - ql \cdot 1{,}5l - F_{ин} l = 0;$$

$$\Sigma M_B = -R_A \cdot 2l + ql \cdot 0{,}5l + F_{ин} l = 0.$$

Решая эти уравнения относительно опорных реакций, находим:

$$R_A = 0{,}5ql; \quad R_B = ql.$$

3. Разбиваем раму, изображенную на рис.15.9,б, на участки, выбираем точку наблюдения, проставляем на каждом участке характерные сечения, вычисляем в этих сечениях в общем виде изгибающие моментов и строим эпюру изгибающих моментов (Рис.15.9,в).

4. Определяем расчетное значение изгибающего момента. Расчетным является максимальный изгибающий момент, действующий в сечении С:

$$M_P = ql^2 = \frac{\gamma}{g} A\omega^2 l^3 .$$

5. Вычисляем в общем виде максимальные нормальные напряжения в валике, вызванные силами инерции, и записываем условие прочности:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_P}{W_z} = \frac{\gamma}{g} \cdot \frac{\pi \cdot d^2}{4} \cdot \frac{\omega^2 l^3 \cdot 32}{\pi \cdot d^3} = \frac{8 \cdot \gamma \omega^2 l^3}{g \cdot d} \le [\sigma].$$

6. Из условия прочности определяем допускаемую угловую скорость вращения валика:

$$\omega = \sqrt{\frac{[\sigma] \cdot g \cdot d}{8\gamma \cdot l^3}} = \sqrt{\frac{100 \cdot 10^6 \cdot 9{,}81 \cdot 2{,}4 \cdot 10^{-2}}{8 \cdot 78 \cdot 10^3 \cdot 0{,}5^3}} = 17{,}37 \text{ с}^{-1}.$$

Или

$$n = \frac{30\omega}{\pi} = \frac{30 \cdot 17{,}37}{3{,}14} = 165{,}9 \text{ об/мин.}$$

Пример 15.10. Сплошной стальной диск одинаковой толщины вращается с постоянной угловой скоростью $\omega = 200$ с$^{-1}$ вокруг центральной оси, перпендикуляререй к его срединной плоскости. Определить наибольшее нормальное напряжение в диске, если его диаметр $D = 0{,}9$ м.

Решение:

Для сплошного диска радиальные и окружные напряжения определяются с помощью выражений (15.33) и (15.34):

$$\sigma_r = c(1 - \rho^2);$$

$$\sigma_\theta = c(1 - m\rho^2).$$

Максимальные напряжения возникают в центре диска при $\rho = 0$ и определяются с помощью формулы (15.35):

$$(\sigma_r)_{\max} = (\sigma_\theta)_{\max} = \frac{3+\mu}{8} \cdot \frac{\gamma}{g}\omega^2 \left(\frac{D}{2}\right)^2 = \frac{3+0{,}3}{8} \cdot \frac{78 \cdot 10^3}{9{,}81} 200^2 \cdot \left(\frac{0{,}9}{2}\right)^2 \cdot 10^{-6} = 26{,}57 \text{ МПа.}$$

Пример 15.11. Равномерно впащающийся вокруг центральной оси, перепендикулярной к его срединной плоскости, стальной диск постоянной толщины, диаметром $D_1 = 80$ см имеет центральное отверстие диаметром $D_2 = 10$

см. Определить наибольшее допускаемое число оборотов диска, при котором максимальное нормальное напряжение в нем не превысит $[\sigma]=120$ МПа.

Решение:

1. Для дисков с отверстием запишем условие прочности по третьей теории (15.29)

$$\sigma_{\text{экв}}^{\text{III}}=(\sigma_\theta)_{\max}=c\left[2+(1-m)k^2\right]\le[\sigma] \qquad \text{(а)}$$

и определим значения коэффициентов c, m и k, входящие в это уравнение:

$$c=\frac{3+\mu}{8}\cdot\frac{\gamma}{g}\omega^2 r_2^2=\frac{3+0,3}{8}\cdot\frac{78\cdot10^3}{9,81}\left(\frac{0,8}{2}\right)^2\omega^2=524,77\omega^2; \qquad \text{(б)}$$

$$m=\frac{1+3\mu}{3+\mu}=\frac{1+3\cdot0,3}{3+0,3}=0,576; \quad k=\frac{r_1}{r_2}=\frac{5}{40}=0,125. \qquad \text{(в)}$$

2. Подставим (б), (в) в (а), откуда найдем величину максимально допускаемой угловой скорости:

$$\omega=\sqrt{\frac{[\sigma]}{524,77\cdot\left[2+(1-m)k^2\right]}}=\sqrt{\frac{120\cdot10^6}{524,77\left[2+(1-0,576)\cdot0,125^2\right]}}=337,58\ \text{с}^{-1}$$

или

$$n=\frac{30\omega}{\pi}=\frac{30\cdot337,58}{3,14}\approx3224\ \text{об/мин.}$$

15.4. Расчет на прочность при ударных нагрузках. Техническая теория удара

Под ударом следует понимать взаимодействие движущихся тел в результате их соприкосновения, связанное с резким изменением скоростей точек этих тел за весьма малый промежуток времени. Время удара измеряется в тысячных, а иногда в миллионных долях секунды, а сила удара достигает большой величины, например, удар падающего груза при забивке свай, действие кузнечного молота на кусок металла при ковке и т.д. При расчете конструкций, подверженных удару, приходится иметь дело не с ускорениями, а с импульсом силы удара. Поэтому принцип Д’Аламбера (кинетостатики) при ударе не работает.

В физике различают две фазы удара. В первой фазе центры тяжести соударяемых тел сближаются, а сила взаимодействия между телами возрастает, достигая максимального значения в момент наибольшего сближения тел, когда скорость относительного движения обращается в ноль.

Во второй фазе (фазе восстановления) центры тяжести тел удаляются друг от друга, силы взаимодействия уменьшаются, обращаясь в ноль в конце удара, когда прекращается контакт тел, или в постоянную величину, если удар не является абсолютно упругим. Происходит быстрый обмен энергиями между ударяющим и ударяемым телами. Такой удар считается отскакивающим. Учет такого удара связан с изучением местных деформаций в окрестностях контакта (так называемая контактная задача теории упругости), а также с изучением явления волнового распространения деформации в упругом теле. Задача оказывается сложной, поэтому при инженерных расчетах используется приближенная техническая теория удара, основанная на следующих гипотезах:

1. Удар является прилипающим в отличие от упругого удара, рассматриваемого в физике. При прилипающем ударе оба тела начинают двигаться совместно.
2. Напряжения в стержне не превышают предела пропорциональности, выполняется закон Гука, модуль упругости остается таким же, как и при статическом нагружении.
3. Деформации распространяются по телу мгновенно.
4. Напряженно-деформированные состояния тел при статическом и динамическом нагружении подобны.
5. Вся кинетическая энергия удара T переходит в потенциальную энергию упругой деформации U (потерь энергии нет).

15.5.Обобщение динамического коэффициента

Рассмотрим подробнее гипотезу технической теории удара №4. Гипотеза утверждает наличие подобия между напряженно-деформированными состояниями при статическом и динамическом нагружениях. Это подобие между динамическими $S_{\text{д}}$ и статическими $S_{\text{ст}}$ усилиями, напряжениями $\sigma_{\text{д}}$ и $\sigma_{\text{ст}}$, деформациями $\Delta_{\text{д}}$ и $\Delta_{\text{ст}}$ может быть выражено с помощью коэффициента динамичности в виде:

$$\frac{S_{\text{д}}}{S_{\text{ст}}} = \frac{\sigma_{\text{д}}}{\sigma_{\text{ст}}} = \frac{\Delta_{\text{д}}}{\Delta_{\text{ст}}} = k_{\text{д}}. \qquad (15.38)$$

Установим связь между потенциальной энергией деформации, накапливаемой в теле при ударе, и потенциальной энергией при статической нагрузке.

Общее выражение для потенциальной энергии деформации при статической нагрузке имеет вид:

$$U_{ст} = \int_l \frac{S_{ст}^2}{2B} dx . \qquad (15.39)$$

Аналогичный вид принимает общее выражение для потенциальной энергия при динамической нагрузке:

$$U_{д} = \int_l \frac{S_{д}^2}{2B} dx . \qquad (15.40)$$

Здесь: S - любое внутреннее усилия (N, M, $M_{кр}$ и т.д.); B - жесткость поперечного сечения при любом виде деформации (EA, EJ, GJ_p и т.д.).

Выразим динамическое усилие $S_д$ через статическое $S_{ст}$ из (15.38) и подставим в (15.40). Получим:

$$U_{д} = \int_l \frac{(k_д S_{ст})^2}{2B} dx = k_д^2 \int_l \frac{S_{ст}^2}{2B} dx = k_д^2 U_{ст} . \qquad (15.41)$$

Дополним ряд соотношений (15.38) полученным соотношением между динамической и статической потенциальными энергиями:

$$k_д = \frac{S_д}{S_{ст}} = \frac{\sigma_д}{\sigma_{ст}} = \frac{\Delta_д}{\Delta_{ст}} = \sqrt{\frac{U_д}{U_{ст}}} . \qquad (15.42)$$

Анализируя последнее выражение, приходим к выводу, что, зная коэффициент динамичности и статические усилия, напряжения, преремещения, потенциальную энергию и т.д., можно найти динамические значения усилий, напряжений, преремещений и потенциальной энергии. В частности, условие прочности при ударе можно записать в виде:

$$\sigma_{\max} = k_д \sigma_{ст} \le [\sigma]. \qquad (15.43)$$

15.5. Вывод формулы для коэффициента динамичности при ударе

Сразу же отметим, что формула для коэффициента динамичности будет одинаковой независимой от вида деформации.

Рассмотрим балку, на которую с некоторой высоты H падает груз P. На балке в том сечении, в котором просходит удар, находится груз Q(Рис.15.10).

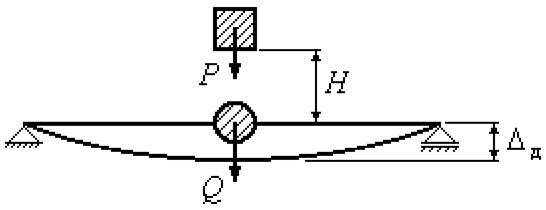


Рис.15.10

В соответствии с принятой гипотезой удар будем считать прилипающим (абсолютно неупругим). В этом случае оба груза объединились в один ($P+Q$), который, продолжая перемещаться вниз, изгибает балку.

Пятая гипотеза технической теории удара утверждает, что вся кинетическая энергия удара T переходит в потенциальную энергию деформации $U_д$ ($T = U_д$).

Кинетическую энергию определим по формуле:

$$T = PH + (P + Q)\Delta_д . \tag{15.44}$$

Потенциальная энергия деформации, накапливаемая в балке при действии динамической нагрузки, равна:

$$U_д = k_д^2 U_{ст} = k_д^2 \cdot \frac{1}{2}(P + Q)\Delta_{ст} . \tag{15.45}$$

Коэффициент $\frac{1}{2}$ в формуле (15.45) берется потому, что сила $(P+Q)$ меняется от нуля до своего конечного значения.

Приравнивая значение кинетической єнергии (15.44) величине потенциальной энергии деформации (15.45), получим:

$$PH + (P + Q)\Delta_д = k_д^2 \cdot \frac{1}{2}(P + Q)\Delta_{ст} . \tag{15.46}$$

Выражая динамическое перемещение $\Delta_д = k_д \Delta_{ст}$ и подставляя в формулу (15.46), имеем:

$$\frac{1}{2}k_д^2(P + Q)\Delta_{ст} - (P + Q)k_д\Delta_{ст} - PH = 0$$

или после некоторых преобразований

$$k_д^2 - 2k_д - \frac{2H}{\Delta_{ст}} \cdot \frac{P}{P + Q} = 0 . \tag{15.47}$$

Уравнение (15.47) имеет два корня:

$$k_д^{(1,2)} = 1 \pm \sqrt{1 + \frac{2H}{\Delta_{ст}\left(1 + \frac{Q}{P}\right)}}. \qquad (15.48)$$

Из двух корней (15.48) оставляем положительный:

$$k_д = 1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{\Delta_{ст}\left(1 + \frac{Q}{P}\right)}}. \qquad (15.49)$$

Таким образом, окончательно динамический коэффициент при ударе принимает вид (15.49).

Полученное решение является приближенным, так как при выводе формулы (15.49) не был учтен целый ряд факторов, а именно: удар считался неупругим, в реальной системе он является частично упругим. Не были учтены местные деформации в точке, по которой наносится удар. Учет местных деформаций может оказать существенное влияние на окончательный результат. Из-за сделанных отступлений от реальных условий формула (15.49) дает завышенное значение динамического коэффициента.

Если масса на балке отсутствует, т.е. $Q = 0$, а тело P падает на невесомую балку, то динамический коэффициент будет равен:

$$k_д = 1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{\Delta_{ст}}}. \qquad (15.50)$$

Из формулы (15.50) следует, чем больше статическое удлинение $\Delta_{ст}$, тем меньше динамический коэффициент. Чем больше жесткость системы, тем больше величина ударной силы. Уменьшить силу удара можно, увеличив $\Delta_{ст}$. При продольном ударе, чем больше длина стержня и меньше его жесткость, тем меньше динамический коэффициент, а, следовательно, меньше динамическая сила и динамические напряжения. Этим можно объяснить то, что при буксировке тяжелых барж канаты, соединяющие буксирный катер с баржей, имеют большую длину. Короткие канаты при случайцном ударе, возникающем вследствие различных причин, не выдерживают динамичесой нагрузки и разрываются.

Этим же объясняется установка демпфирующих пружин и рессор, деформация которых сильно увеличивает статическое перемещение, и в результате уменьшается динамический коэффициент и динамические напряжения.

Величину динамического коэффициента при падении груза на невесомую балку можно выразить через скорость падения груза в момент подлета к балке. Для этого необходимо вместо величины $2H$ подставить величину $\frac{v^2}{g}$, так как скорость падения груза в момент, предшествующий удару, связана с высотой падения равенством $v^2 = 2gH$. Следовательно:

$$k_{\text{д}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{v^2}{g\Delta_{\text{ст}}}}\,. \qquad (15.51)$$

Когда высота падения равна нулю, динамический коэффициент равен двум. Такое загружение называется внезапным. Физически эту задачу можно представить так: если на нити подвесить груз, укрепив его над балкой таким образом, чтобы он касался верха балки, но не давил на нее, а передавался целиком на нить, и если при этом нить мгновенно рассечь, то груз всей своей величиной передастся на балку. Напряжения и прогибы в этом случае будут в два раза больше, чем при статическом нагружении, при котром предполагается постепенное нарастание величины нагрузки от нуля до конечного значения.

Если высота падения значительно превыщает статичесий прогиб $\Delta_{\text{ст}}$, то единицей по сравнению со вторым членом, стоящим под корнем, можно пренебречь. Тогда

$$k_{\text{д}} = 1 + \frac{v}{\sqrt{g\Delta_{\text{ст}}}} = 1 + \sqrt{\frac{2H}{\Delta_{\text{ст}}}}\,. \qquad (15.52)$$

15.6.Учет собственного веса при ударе

Если груз падает на балку, обладающую значительным весом, которым нельзы пренебречь (Рис.15.11,а), то решение сильно усложняется. В этом случае применяют приближенное решение, которое сводится к замене реальной балки системой с одной степенью свободы. Распределенная по длине балки масса заменяется приведенной массой, сосредоточенной в месте удара (Рис.15.11,б).

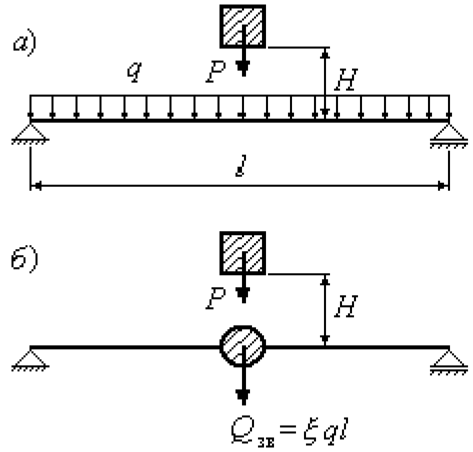


Рис.15.11

Буквой $Q_п$ обозначен приведенный вес. Приведенным он называется потому, что прогиб от равнодействующей сосредоточенной силы, заменяющей распределенную нагрузку, будет больше. Поэтому весь вес посредине балки прикладывать нельзя. Величину приведенного веса найдем, используя динамическую эквивалентность двух систем: исходной системы (Рис.15.11,а) и динамически эквивалентной (Рис.15.11,б).

Две системы называются динамически эквивалентными, если их кинетические энергии одинаковы. Найдем значения коэффициентов приведения β для некоторых частных случаев.

1. *Продольный удар.* Определим величину коэффициента ξ для случая продольного удара по стержню постоянного сечения, заделанного одним концом (Рис.15.12,а). Вес стержня равномерно распределен по длине стержня в виде интенсивности распределенной нагрузки q. Стержень подвергается удару грузом P, который в начальный момент времени занимает верхнее положение в месте заделки.

Поместим начало координат в жесткой заделке, ось x направим вниз. Выделим на расстоянии x от начала координат бесконечно малый элемент длиной dx. Масса этого элемента $dm = \frac{qdx}{g}$. Предположим, что скорость $v(x)$ падения груза P пропорциональна перемещению рассматриваемого сечения, которое в свою очередь пропорционально координате x (Рис.15.12,б). Максимального значения $v_{\max}$ скорость падения груза достигает в нижней точке падения на нижнем конце стержня, где расположен упор. Тогда $v(x) = v_{\max}\frac{x}{l}$.

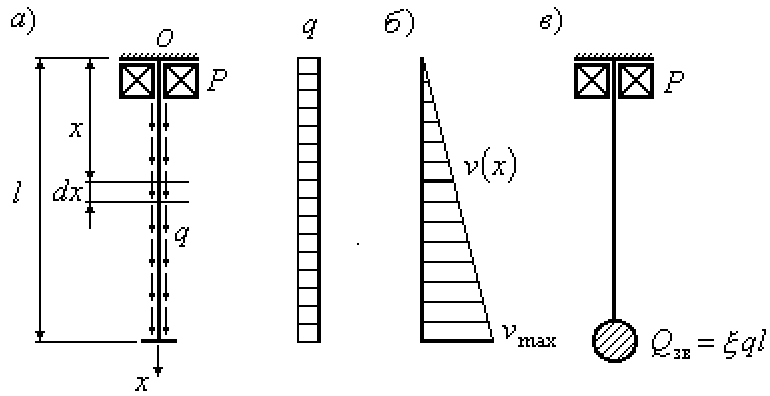


Рис.15.12

Кинетическая энергия для исходной системы с распределенной массой имеет вид:

$$T_q = \int_0^l \frac{v^2(x)}{2}dm = \frac{1}{2}\int_0^l \frac{v^2(x)qdx}{g} = \frac{q}{2g}\int_0^l \left(v_{\max}\frac{x}{l}\right)^2 dx = \frac{qv_{\max}^2}{2gl^2}\cdot\frac{l^3}{3}.$$

Кинетическая энергия динамически эквивалентной системы (Рис.15.11,в) равна:

$$T_{Q_п} = \frac{Q_п}{2g} v_{\max}^2 = \frac{\xi \cdot ql}{2g} v_{\max}^2 .$$

Приравнивая найденные кинетические энергии ($T_q = T_{Q_п}$) на основании принципа динамической эквивалентности двух систем, получим:

$$\frac{qv_{\max}^2}{2gl^2} \cdot \frac{l^3}{3} = \frac{\xi \cdot ql}{2g} v_{\max}^2 .$$

Откуда: $\xi = \frac{1}{3}$.

2. *Поперечный удар.* Рассмотрим балку постоянного сечения, шарнирно закрепленную на двух опорах. Масса балки распределена равномерно по ее длине, интенсивность распределенной нагрузки составляет q. Для определения кинетической энергии системы предположим, что скорость $v(x)$ элемента балки, отстоящего от левой опоры на расстоянии x (Рис.15.13,а) пропорциональна перемещению этого сечения $\Delta(x)$ от статической нагрузки, приложенной в виде силы P в точке удара. Это условие пропорциональности можно выразить следующим равенством:

$$\frac{v(x)}{v_{\max}} = \frac{\Delta(x)}{\Delta_{\max}} .$$

Здесь $v_{\max}$ и $\Delta_{\max}$ - соответственно скорость и прогиб в середине пролета.

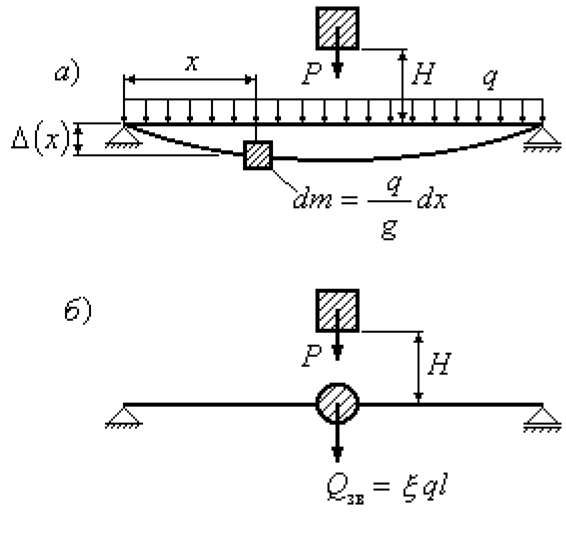


Рис.15.13

Приняв, что точка удара расположена в середине балки (Рис.15.13,б), получим следующее уравнение прогибов:

$$\Delta(x)=\frac{Pl^3}{48EJ}\left(3\frac{x}{l}-4\frac{x^3}{l^3}\right)=\Delta_{\max}\left(3\frac{x}{l}-4\frac{x^3}{l^3}\right).$$

Следовательно,

$$v(x)=v_{\max}\left(3\frac{x}{l}-4\frac{x^3}{l^3}\right);\quad 0\le x\le\frac{l}{2}.$$

Кинетическую энергию найдем из равенства:

$$T_q=\int_0^l\frac{v^2(x)dm}{2}=\int_0^l\frac{qdx}{g}\cdot\frac{v^2(x)}{2}=2\int_0^{\frac{l}{2}}\frac{1}{2}\cdot\frac{q}{g}v^2(x)\left(3\frac{x}{l}-4\frac{x^3}{l^3}\right)^2dx=$$

$$=\frac{q}{g}v^2(x)\int_0^{\frac{l}{2}}\left(9\frac{x^2}{l^2}-24\frac{x^4}{l^4}+16\frac{x^6}{l^6}\right)dx=\frac{17}{35}\cdot\frac{ql\cdot v^2(x)}{2g}.$$

Определим теперь кинетическую энергию для балки, у которой посредине пролета прикреплена приведенная масса. Считая, что скорость движения этой массы будет равна $v_{\max}$, получим:

$$T_{Q_п}=\frac{Q_п}{g}\cdot\frac{v_{\max}^2}{2}=\frac{\xi\cdot ql}{g}\cdot\frac{v_{\max}^2}{2}.$$

Приравнивая полученные кинетические энергии ($T_q=T_{Q_п}$) на основании принципа динамической эквивалентности двух систем, получаем значение коэффициента ξ:

$$\xi=\frac{17}{35}.$$

Для случая, изображенного ра рис.15.14, коэффициент $\xi=\frac{33}{140}$.

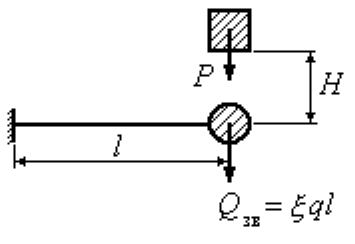


Рис.15.14

Для других случаев нагружения балок можно брать значение для коэффициента приведения массы в соответсвующих справочниках по сопротивлению материалов.

Таким образом, динамический коэффициент при ударе с учетом распределенной массы приобретает вид:

$$k_{\text{д}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{\Delta_{\text{ст}}\left(1 + \frac{\xi \cdot ql}{P}\right)}} \; . \tag{15.53}$$

Динамический коэффициент при ударе можно также выразить через значения кинетической энергии ударяющего тела T и потенциальную энергию ударяемого тела при статической деформации $U_{\text{ст}}$:

$$k_{\text{д}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{T}{U_{\text{ст}}}} \; . \tag{15.54}$$

При продольном ударе силой P потенциальная энергия стержня имеет вид:

$$U_{\text{ст}} = \frac{P^2 l}{2EA} = \frac{\sigma_{\text{ст}}^2 Al}{2E} = \frac{\Delta l_{\text{ст}}^2 EA}{2l} \; . \tag{15.55}$$

Для вычисления динамического коэффициента при этом может быть выбрано одно из выражений:

$$k_{\text{д}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{\Delta l_{\text{ст}}}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2TEA}{P^2 l}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2TE}{\sigma_{\text{ст}}^2 Al}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2Tl}{\Delta l_{\text{ст}}^2 EA}} \; .$$

При поперечном ударе нагрузки величина статической деформации $\Delta_{\text{ст}}$, представляющей собой статический прогиб балки в месте удара, зависит от схемы нагоужения и условий опирания балки.

Так, например, для балки пролетом l, шарнирно закрепленной по концам и испытывающей посредине пролета удар от падающего с высоты H груза P, получаем:

$$\Delta_{\text{ст}} = \frac{Pl^3}{48EJ}; \quad \sigma_{\text{ст}}^{\max} = \frac{Pl}{4W}; \quad U_{\text{ст}} = \frac{P^2 l^3}{96EJ} \; .$$

Динамический коэффициент при этом принимает вид:

$$k_{\text{д}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{96TEJ}{Q^2 l^3}} \; .$$

Для консоли, испытывающей удар от груза P, падающего на свободный конец консоли:

$$\Delta_{\text{ст}} = \frac{Pl^3}{3EJ}; \quad \sigma_{\text{ст}}^{\max} = \frac{Pl}{W}; \quad U_{\text{ст}} = \frac{P^2 l^3}{6EJ}.$$

Динамический коэффициент для консольной балки имеет вид:

$$k_{\text{д}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{6TEJ}{Q^2 l^3}}.$$

Максимальные динамические напряжения для балки на двух опорах принимают вид:

$$\sigma_{\text{д}} = k_{\text{д}} \sigma_{\text{ст}}^{\max} = \frac{Pl}{4W}\left[1 + \sqrt{1 + \frac{96TEJ}{Q^2 l^3}}\right].$$

Рассмотрим несколько примеров расчета конструкций, испытывающих удар.

Пример 15.12. Определить величину наибольшего нормального напряжения в стальном ступенчатом стержне (Рис.15.15), подвергающемся действию удара при падении груза $P = 4$ кН с высоты $H = 6$ мм. Площадь поперечного сечения стержня $A = 2$ см^2, длина стержня $l = 5$ м. Какое наибольшее напряжение возникнет в стержне, если на кольцевой выступ В для смягчения удара поместить цилиндрическую винтовую пружину, которая при действии статической нагрузки, равной 10Н, сжимается на $4 \cdot 10^{-3}$ мм?

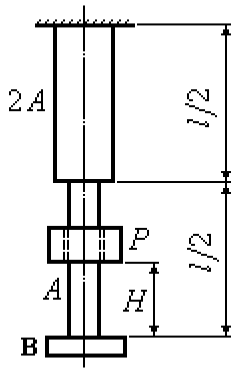


Рис.15.15

Решение:

1. Определяем статическое удлинение стержня, вызванное силой P:

$$\Delta l_{\text{ст}} = \frac{P\dfrac{l}{2}}{E\cdot 2A} + \frac{P\dfrac{l}{2}}{E\cdot A} = \frac{3Pl}{4EA} = \frac{3\cdot 4\cdot 10^3\cdot 5}{4\cdot 2\cdot 10^{11}\cdot 2\cdot 10^{-4}}10^3 = 0{,}375 \text{ мм.}$$

2. Вычисляем коэффициент динамичности:

$$k_{\text{д}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{\Delta l_{\text{ст}}}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2\cdot 6}{0{,}375}} = 6{,}744 .$$

3. Определяем наибольшие динамические нормальные напряжения в стержне при осутствии пружины:

$$\sigma_{\text{д}} = k_{\text{д}}\frac{P}{A} = 6{,}744\frac{4\cdot 10^3}{2\cdot 10^{-4}}10^{-6} = 134{,}89 \text{ МПа.}$$

4. Определяем статическое перемещение с учетом осадки пружины. Жесткость пружины $c = 0{,}0004$ мм/Н. Осадка пружины $\lambda = Pc = 4\cdot 10^3\cdot 0{,}0004 = 1{,}6$ мм.

$$\Delta l_{\text{ст}} = \Delta l_{\text{ст}}^{\text{стержня}} + \lambda = 0{,}375 + 1{,}6 = 1{,}975 \text{ мм.}$$

5. Вычисляем динамический коэффициент:

$$k_{\text{д}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{\Delta l_{\text{ст}}}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2\cdot 6}{1{,}975}} = 3{,}66 .$$

6. Определяем наибольшие динамические напряжения в стержне при наличии пружины:

$$\sigma_{\text{д}} = k_{\text{д}}\frac{P}{A} = 3{,}66\frac{4\cdot 10^3}{2\cdot 10^{-4}}10^{-6} = 73{,}2 \text{ МПа.}$$

Пример 15.13. Стержень, имеющий длину $l = 0{,}8$ м и площадь поперечного сечения $A = 5$ см^2, подвергается продольному растягивающему удару при падении груза $P = 2$ кН. Кинетическая энергия груза к моменту соударения равна $T = 1{,}5$ Нм. Найти напряжение в стержне при ударе в предположении, что он изготовлен из стали.

Решение:

1. Вычисляем потенциальную энергию, накапливаемую в стержне, при статическом приложении силы P:

$$U_{\text{ст}} = \frac{P^2 l}{2EA} = \frac{\left(2\cdot 10^3\right)^2\cdot 0{,}8}{2\cdot 2\cdot 10^{11}\cdot 5\cdot 10^{-4}} = 0{,}016 \text{ Нм.}$$

2. Определяем динамический коэффициент по формуле:

$$k_{\text{д}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{T}{U_{\text{ст}}}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{1{,}5}{0{,}016}} = 10{,}734.$$

3. Находим динамические напряжения в стержне:

$$\sigma_{\text{д}} = k_{\text{д}} \frac{P}{A} = 10{,}734 \frac{2 \cdot 10^3}{5 \cdot 10^{-4}} 10^{-6} = 42{,}94 \text{ МПа.}$$

Пример 15.14. На шарнирно опертый по концам деревянный брус прямоугольного поперечного сеченния $b \times h = 12 \times 24$ см^2 посредине пролета $l = 4$ м с высоты $H = 5$ см падает груз $P = 1$ кН. Определить наибольшее нормальное напряжение и наибольший прогиб бруса при изгибающем моменте в плоскости наибольшей жесткости. Модуль упругости дерева $E = 1 \cdot 10^4$ МПа.

Решение:

1. Определяем стрелу прогиба при статическом приложении нагрузки:

$$f_{\text{ст}} = \frac{Pl^3}{48EJ} = \frac{1 \cdot 10^3 \cdot 4^3}{48 \cdot 1 \cdot 10^{10} \cdot \frac{12 \cdot 24^3}{12} 10^{-8}} = 9{,}645 \cdot 10^{-4} \text{ м.}$$

2. Находим динамический коэффициент:

$$k_{\text{д}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{f_{\text{ст}}}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 5 \cdot 10^{-2}}{9{,}645 \cdot 10^{-4}}} = 11{,}231.$$

3. Определяем динамические напряжения в брусе:

$$\sigma_{\text{д}} = k_{\text{д}} \frac{Pl}{4W} = 11{,}231 \frac{1 \cdot 10^3 \cdot 4}{4 \cdot \frac{12 \cdot 24^2}{6} 10^{-6}} 10^{-6} = 9{,}75 \text{ МПа.}$$

4. Находим максимальный динамический прогиб в плоскости наибольшей гибкости:

$$f_{\text{д}} = k_{\text{д}} f_{\text{ст}} = 11{,}231 \cdot 9{,}645 \cdot 10^{-4} = 108{,}32 \cdot 10^{-4} \text{ м} = 10{,}8 \text{ мм.}$$

Пример 15.15. Двутавровая балка №24 длиной $l = 3$м опирается на шарнирные опоры. Груз $P = 10$ кН падает посредине пролета со скоростью $v = 0{,}5$ м/сек к моменту удара (Рис.15.16,а). Определить наибольшее нормальное напряжение и наибольший прогиб в результате удара, предполагая, что: а) опоры балки абсолютно жесткие; б) опоры балки представляют упругие конструкции; смещение каждой из них на единицу приложенной к ней нагрузки равно $c = 4 \cdot 10^{-7}$ м/Н; в) опоры балки абсолютно жесткие, но посредине пролета лежит груз $Q = 10$ кН. Массой балки во всех случаях пренебречь. Момент инерции двутавра №24 $J = 3460$ см^4, момент сопротивления $W = 289$ см^3.

Решение:

1. Опоры абсолютно жесткие. Определяем стрелу прогиба:

$$f_{\text{ст}} = \frac{Pl^3}{48EJ} = \frac{10 \cdot 10^3 \cdot 3^3}{48 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 3460 \cdot 10^{-8}} = 8{,}12 \cdot 10^{-4} \text{ м}.$$

Находим коэффициент динамичности:

$$k_{\text{д}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{v^2}{g \cdot f_{\text{ст}}}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{(0{,}5)^2}{9{,}81 \cdot 8{,}12 \cdot 10^{-4}}} = 6{,}69.$$

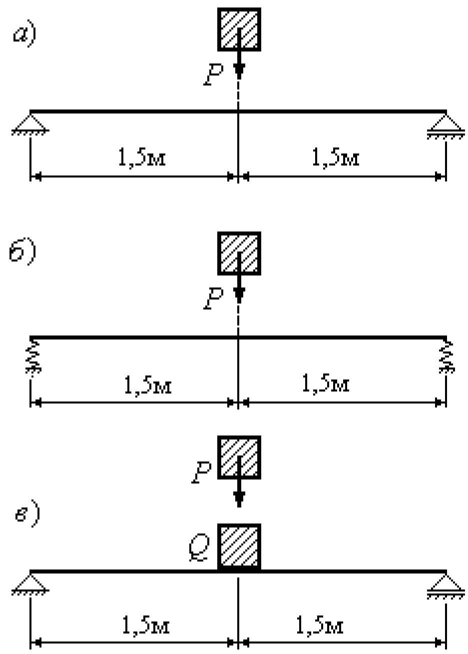


Рис.15.16

Определяем наибольшие динамические напряжения в балке и максимальный прогиб:

$$\sigma_{\text{д}} = k_{\text{д}} \frac{Pl}{4W} = 6{,}69 \frac{10 \cdot 10^3 \cdot 3}{4 \cdot 289 \cdot 10^{-6}} 10^{-6} = 25{,}9 \text{ МПа};$$

$$f_{\text{д}} = k_{\text{д}} f_{\text{ст}} = 6{,}69 \cdot 8{,}12 \cdot 10^{-4} = 54{,}32 \cdot 10^{-4} \text{ м} = 5{,}43 \text{ мм}.$$

2. Опоры балки – упругие конструкции. Определяем осадку пружины на опоре от статического приложения нагрузки:

$$\lambda = \frac{1}{2} P \cdot c = \frac{1}{2} 10 \cdot 10^{3} \cdot 4 \cdot 10^{-7} = 2 \cdot 10^{-3} \text{ м.}$$

Находим перемещение сечения посредине балки с учетом осадки пружин:

$$\Delta_{\text{ст}} = f_{\text{ст}} + \lambda = 8{,}12 \cdot 10^{-4} + 2 \cdot 10^{-3} = 28{,}12 \cdot 10^{-4} \text{ м.}$$

Определяем коэффициент динамичности:

$$k_{\text{д}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{v^2}{g \cdot f_{\text{ст}}}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{(0{,}5)^2}{9{,}81 \cdot 28{,}12 \cdot 10^{-4}}} = 4{,}172 .$$

Вычисляем максимальные динамические напряжения в балке и динамическую стрелу прогиба:

$$\sigma_{\text{д}} = k_{\text{д}} \frac{Pl}{4W} = 4{,}172 \frac{10 \cdot 10^{3} \cdot 3}{4 \cdot 289 \cdot 10^{-6}} 10^{-6} = 108{,}05 \text{ МПа;}$$

$$f_{\text{д}} = k_{\text{д}} f_{\text{ст}} = 4{,}172 \cdot 8{,}12 \cdot 10^{-4} = 33{,}9 \cdot 10^{-4} \text{ м} = 3{,}39 \text{ мм.}$$

3. Опоры жесткие, груз P падает на груз Q, расположенный посредине балки. Определяем динамический коэффициент:

$$k_{\text{д}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{v^2}{g \cdot f_{\text{ст}}\left(1 + \frac{Q}{P}\right)}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{(0{,}5)^2}{9{,}81 \cdot 28{,}12 \cdot 10^{-4}\left(1 + \frac{10 \cdot 10^{3}}{10 \cdot 10^{3}}\right)}} = 5{,}086 .$$

Находим наибольшие динамические напряжения и динамическую стрелу прогиба:

$$\sigma_{\text{д}} = k_{\text{д}} \frac{Pl}{4W} = 5{,}086 \frac{10 \cdot 10^{3} \cdot 3}{4 \cdot 289 \cdot 10^{-6}} 10^{-6} = 131{,}98 \text{ МПа;}$$

$$f_{\text{д}} = k_{\text{д}} f_{\text{ст}} = 5{,}086 \cdot 8{,}12 \cdot 10^{-4} = 41{,}3 \cdot 10^{-4} \text{ м} = 4{,}13 \text{ мм.}$$

Пример 15.16. Льдина, плывущая со скоростью $v = 1$ м/с, ударяется о деревянную сваю круглого поперечного сечения (Рис.15.17). Определить наибольшее нормальное напряжение и наибольший прогиб сваи при ударе, если модуль упругости дерева $E = 8 \cdot 10^{3}$ МПа. Сваю в нижнем сечении считать жестко защемленной.

Решение:

1. В момент удара свая испытывает действие динамической силы $P_{\text{дин}}$ со стороны льдины. Найдем эту силу. Кинетическая энергия удара равняется потенциальной энергии деформации, накапливаемой в свае от действия динамической силы $P_{\text{дин}}$:

$$T = \frac{mv^2}{2} = U_{\text{д}}.$$

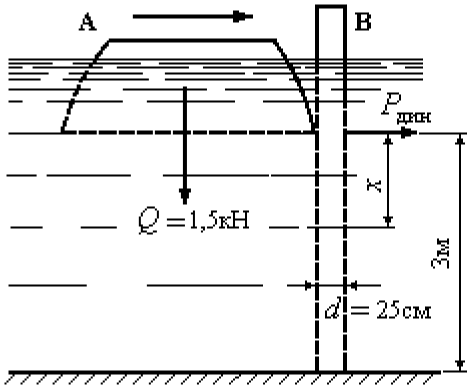


Рис.15.17

Потенциальную энергию $U_{\text{д}}$ найдем, выражая ее через динамическую силу:

$$U_{\text{д}} = \int_0^l \frac{(P_{\text{дин}} x)^2}{2EJ} dx = \frac{P_{\text{дин}}^2 l^3}{6EJ}.$$

Приравнивая кинетическую и потенциальную энергии, получаем:

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{P_{\text{дин}}^2 l^3}{6EJ},$$

звідки

$$P_{\text{дин}} = \sqrt{\frac{mv^2 \cdot 3EJ}{l^3}} = \sqrt{\frac{Qv^2 \cdot 3E\frac{\pi \cdot d^4}{64}}{gl^3}} = \sqrt{\frac{1{,}5 \cdot 10^3 \cdot 3 \cdot 8 \cdot 10^9 \frac{3{,}14 \cdot 0{,}25^4}{64}}{9{,}81 \cdot 3^3}} = 5105{,}05 \text{ Н}.$$

2. Определяем наибольший прогиб сваи:

$$\Delta_{\max} = \frac{P_{\text{дин}} l^3}{3EJ} = \frac{P_{\text{дин}} l^3}{3E\frac{\pi \cdot d^4}{64}} = \frac{5105{,}05 \cdot 3^3}{3 \cdot 8 \cdot 10^9 \frac{3{,}14 \cdot 0{,}25^4}{64}} = 3 \cdot 10^{-2} \text{ м} = 3 \text{ см}.$$

3. Вычисляем наибольшее напряжение в свае:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_z} = \frac{P_{\text{дин}} l}{\frac{\pi \cdot d^3}{32}} = \frac{5105{,}05 \cdot 3}{\frac{3{,}14 \cdot 0{,}25^3}{32}} 10^{-6} = 9{,}98 \text{ МПа.}$$

Пример 15.17. Деревянная балка круглого поперечного сечения и длиной $l = 4$ м, шарнирно оперта на концах, посредине пролета испытывает удар телом, движущимся горизонтально. Тело имеет в начальный момент удара кинетическую энергию $T = 80$ Нм. Определить диаметр d поперечного сечения балки таким образом, чтобы наибольшее нормальное напряжение в ней $\sigma_{\max}$ не превышало 10МПа, а максимальный прогиб f был не больше 1 см.

Решение:

1. Определим величину динамической силы, з которой тело, движущиеся горизонтально, ударяет по балке. Будим исходить из того, что кинетическая энергия удара полностью переходит в потенциальную энергию деформации тела, подверженного удару

$$T = U_{\text{д}} = \frac{P_{\text{дин}} f}{2}.$$

Откуда

$$P_{\text{дин}} = \frac{2T}{f} = \frac{2 \cdot 80}{0{,}01} 10^{-3} = 16 \text{ кН.}$$

2. Вычисляем максимальный изгибающий момент в балке:

$$M_{\max} = \frac{P_{\text{дин}} l}{4} = \frac{16 \cdot 4}{4} = 16 \text{ кНм.}$$

3. Записываем условие прочности при изгибе и определяем диаметр поперечного сечения балки:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_z} = \frac{M_{\max}}{\frac{\pi \cdot d^3}{32}} \le [\sigma],$$

откуда

$$d = \sqrt[3]{\frac{M_{\max}}{\frac{\pi \cdot [\sigma]}{32}}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 10^3 \cdot 32}{3{,}14 \cdot 10 \cdot 10^6}} = 0{,}254 \text{ м.}$$

Пример 15.18. Диск диаметром $D = 20$ см и весом $Q = 0{,}5$ кН, насаженный на вал AB длиной $l = 1$ м и диаметром $d = 6$ см (Рис.15.19,а), вращается с постоянной угловой скоростью, соответствующую $n = 120$ об/мин. Определить величину наибольших касательных напряжений в вале в тот момент, когда конец вала A внезапно останавливается. Массой вала пренебречь. Модуль сдвига для материала вала принять $G = 8 \cdot 10^4$ МПа.

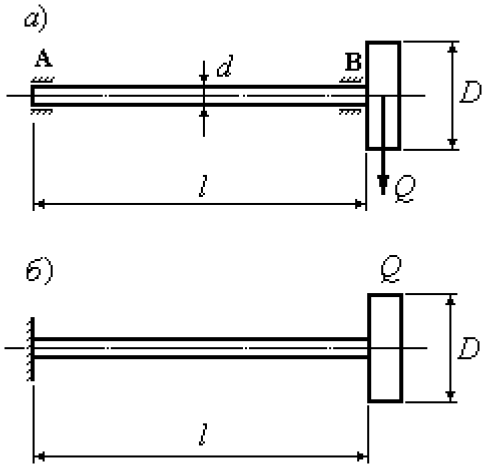


Рис.15.18

Решение:

1. Расчетная схема вала приведена на рис.15.18,б. Вычисляем кинетическую энергию вращающейся системы:

$$T = \frac{J_0 \omega^2}{2} = \frac{QD^2}{16g} \cdot \left(\frac{\pi \cdot n}{30} \right)^2 = \frac{0{,}5 \cdot 10^3 \cdot 0{,}2^2}{16 \cdot 9{,}81} \cdot \left(\frac{3{,}14 \cdot 120}{30} \right)^2 = 20{,}12 \text{ Нм.}$$

2. Определяем площадь поперечного сечения вала:

$$A = \frac{\pi \cdot d^2}{4} = \frac{3{,}14 \cdot 6^2}{4} = 28{,}27 \text{ см}^2.$$

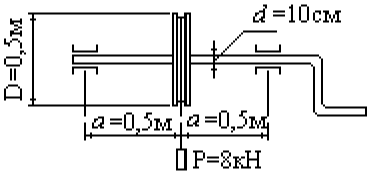
3. Находим максимальное касательное напряжение в вале:

$$\tau_{\max} = 2\sqrt{\frac{TG}{lA}} = 2\sqrt{\frac{20{,}12 \cdot 8 \cdot 10^{10}}{1{,}0 \cdot 28{,}27 \cdot 10^{-4}}} 10^{-6} = 47{,}72 \text{ МПа.}$$

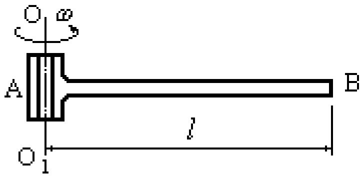
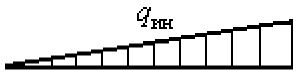
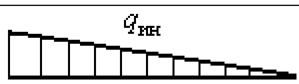
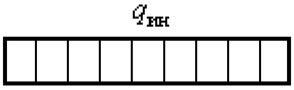
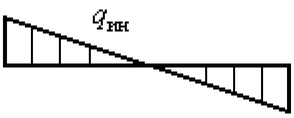
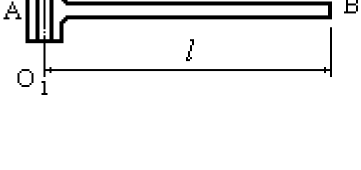
15.8. Тесты к теме №15 “Задачи динамики. Учет сил инерции и ударного действия нагрузки”

Таблица 15.1

№	Вопрос	Время для ответа, секунды
1	2	3
1	Какой принцип применяется при решении задач, в которых учитывается влияние сил инерции?	30
	1. Принцип возможных перемещений.	
	2. Принцип Д’Аламбера.	
	3. Принцип Сен-Венана.	
	4. Принцип суперпозиции.	
2	Груз весом 40кН поднимается равноускоренно с помощью стального троса диаметром 4см с ускорением 2м/с^2. Определить наибольшее нормальное напряжение в тросе.	120
3	Наибольшая безопасная окружная скорость для чугунных маховиков равна 25м/с. Пренебрегая влиянием спиц и принимая удельный вес чугуна равный $\gamma = 78{,}5$ кН/м^3, определить наибольшее растягивающее напряжение (в МПа) в ободе маховика при указанной окружной скорости. Результат округлить до целого числа.	240
4	Кожаный ремень шириною 20см и толщиною 5мм перекинут через шкив диаметром 1м и передает мощность 30 л.с. Шкив вращается с постоянной угловой скоростью, соответствующей 480 об/мин. Удельный вес кожи равен $\gamma = 10$ кН/м^3. Определить напряжение (в МПа) в ремне с учетом сил инерции, возникающих в нем, если отношение усилий в набегающих и сбегающих ветвях ремня равняется трем. Результат округлить до целого числа.	600

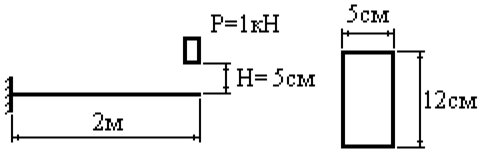
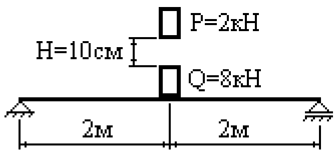
5	Груз Р поднимается на тросе, навернутом на шкив. Груз поднимается с ускорением 1м/с^2. Определить максимальное напряжение (в МПа) в опасном сечении вала по третьей теории прочности. Результат округлить до ближайшего целого числа. 	600

Продолжение таблицы 15.1

1	2	3
6	Стержень АВ поворачивается с постоянной угловой скоростью ω вокруг осі OO_1.  Як выглядит закон распределения сил инерции вдоль стержня?	60
		
		
		
		
7	Стержень АВ длиной $l=1$м вращается с постоянной угловой скоростью $\omega=40$ 1/с вокруг оси OO_1. Удельный вес материала стержня $\gamma=78$ кН/м^3. Определить максимальное напряжение, возникающее в стержне (в МПа). 	180
8	Какая теория удара рассматривается в сопротивлении материалов?	20
	1. Практическая.	

	2. Техническая.	
	3. Физическая.	
	4. Механическая.	
9	Каким является удар в соответствии с теорией, принятой в сопротивлении материалов?	20
	1. Проникающим.	
	2. Прилипающим.	
	3. Отскакивающим.	
	4. Абсолютно упругим.	
10	Сколько гипотез содержит в себе теория удара, принятая в сопротивлении материалов?	20
	1. Две.	
	2. Четыре.	
	3. Три.	
	4. Пять.	
11	Какой зависимостью звязан коэффициент динамичности при ударе с динамическими и статическими напряжениями?	
	1. Линейной.	
	2. Кубической.	
	3. Квадратной.	
	4. Тригонометрической.	
12	Какой зависимостью звязан коэффициент динамичности при ударе з потенциальной энергией деформации при динамической и статической нагрузках?	20
	1. Линейной.	
	2. Кубической.	
	3. Квадратной.	
	4. Тригонометрической.	
13	Какая из гипотез используется при выводе динамического коэффициента при ударе?	20
	1. Равенство энергий.	
	2. Равенство деформаций.	
	3. Равенство напряжений.	
	4. Равенство усилий.	
14	Какое их выражений для динамического коэффициента при ударе написано правильно?	40
	1. $$k_д = 1 + \sqrt{1 - \frac{2H}{\Delta_{ст}\left(1 + \frac{Q}{P}\right)}}$$	

	2. $$k_{д} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{\Delta_{ст}\left(1 + \frac{Q}{P}\right)}}$$	
	3. $$k_{д} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2\Delta_{ст}}{H\left(1 + \frac{Q}{P}\right)}}$$	
	4. $$k_{д} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{\Delta_{ст}\left(1 - \frac{Q}{P}\right)}}$$	
15	Какую величину можно определить с помощью следующего выражения? $$? = 1 + \sqrt{1 + \frac{v^2}{g\Delta_{ст}}}$$	30
	1. Амплитуду колебаний.	
	2. Динамический коэффициент при ударе.	
	3. Динамический коэффициент при колебаниях.	
	4. Динамический коэффициент при учете сил инерции.	
16	Какой принцип используется при учете влияния распределенной массы при ударе?	30
	1. Принцип возможных перемещений.	
	2. Принцип динамической эквивалентности.	
	3. Принцип суперпозиции.	
	4. Принцип кинетостатики.	
17	Какие системы считаются динамически эквивалентными при ударе?	30
	1. Имеющие одинаковые кинетические энергии.	
	2.Имеющие одинаковые потенциальные энергии.	
	3. Если потенциальная энергия ударяющего тела равняется кинетической энергии ударяемого тела.	
	4. Если кинетическая энергия ударяющего тела равняется потенциальной энергии ударяемого тела.	
18	В выражении $2\sqrt{\frac{TG}{lA}}$ T - кинетическая энергия; G - модуль сдвига; l - длина скручиваемого вала; A - площадь поперечного сечения вала. Что можно определить с помощью этого выражения при скручивающем ударе ?	40
	1. Угол закручивания.	
	2. Касательное напряжение.	
	3. Крутящий момент.	

	4. Потенциальную энергию.	
19	На балку прямоугольного поперечного сечения (размеры указаны на рисунке) падает груз P с высоты $H = 5$ см. Материал балки – дерево с модулем упругости $E = 1{,}8 \cdot 10^4$ МПа. Определить максимальное нормальное напряжение (в МПа) в балке при ударе. Результат округлить до целого числа. 	480
20	На балку с высоты $H = 10$ см падает груз $P = 2$ кН посредине пролета. На балке в месте падения груза P находится груз $Q = 8$ кН. Балка представляет собой двутавр №20 с осевым моментом инерции $J_z = 1840$ см^4 и моментом сопротивления $W_z = 184$ см^3. Определить наибольшее динамическое напряжение (в МПа) в балке. Результат решения округлить до ближайшего целого значения. 	480