

**Тема:** *Линейное программирование. Общая постановка задачи. Методы решения задач линейного программирования. Двойственная задача линейного программирования.*

Примеры задач, относящихся к классу задач линейного программирования: задача планирования производства при ограниченных ресурсах, задача о составлении оптимального рациона, задача о загрузке производственного оборудования, задача о раскрое материалов и другие.

Преобразование задачи одной из имеющихся постановок в другие формы. Базисные и свободные переменные. Многогранник ограничений, его определение и пример построения для задач малой размерности. Целевая функция, её градиент, линии уровня. Экономический смысл градиента, его изображение в задачах ЛП малой размерности.

Общая постановка задачи линейного программирования:

$$f = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \max$$

при ограничениях:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i \quad (i=1, 2, \dots, k) \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i \quad (i=k+1, k+2, \dots, m) \\ x_j \geq 0 \quad (j=1, 2, \dots, l; l \leq n) \end{array} \right. \quad \text{или}$$

$$f = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \min$$

при ограничениях:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq b_i \quad (i=1, 2, \dots, k) \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i \quad (i=k+1, k+2, \dots, m) \\ x_j \geq 0 \quad (j=1, 2, \dots, l; l \leq n) \end{array} \right.$$

Задача линейного программирования в стандартной постановке (в ней

все ограничения имеют вид неравенств, все неизвестные имеют неотрицательные значения):

$$f = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \max$$

при ограничениях:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i & (i=1, 2, \dots, k) \\ x_j \geq 0 & (j=1, 2, \dots, n) \end{cases}$$

$$f = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \min$$

при ограничениях:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq b_i & (i=1, 2, \dots, k) \\ x_j \geq 0 & (j=1, 2, \dots, n) \end{cases}$$

или

Каноническая задача линейного программирования (система ограничений состоит из уравнений, все переменные неотрицательны):

$$f = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \max$$

при ограничениях:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i & (i=1, 2, \dots, n) \\ x_j \geq 0 & (j=1, 2, \dots, n) \end{cases}$$

$$f = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \min$$

при ограничениях:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i & (i=1, 2, \dots, n) \\ x_j \geq 0 & (j=1, 2, \dots, n) \end{cases}$$

или

Задача линейного программирования как задача выпуклого анализа.

Обоснование свойств задачи линейного программирования и возможности её решения (теоремы о выпуклости множества допустимых решений задачи линейного программирования (ЛП) и существовании её оптимального решения).

Геометрический метод решения задач линейного программирования, его применимость для решения задач ЛП малой размерности. Симплекс – метод как универсальный метод решения любых задач ЛП. Аналитический и табличный варианты алгоритма симплекс – метода. Особые случаи, возникающие при решении задач ЛП: неединственность оптимального решения (оптимальное решение достигается в любой точке некоторой грани многогранника ограничений), появление вырожденных базисных решений, приводящих к закливанию, решение такой проблемы. Метод искусственного базиса для решения задач ЛП.

Существование для каждой задачи ЛП двойственной или сопряжённой.

Примеры существования двойственных задач для конкретных примеров экономических задач. Взаимно двойственные задачи линейного программирования и их свойства. Алгоритм составления двойственной задачи по данной прямой. Основное неравенство теории двойственности:

$$F(\vec{x}) \leq Z(\vec{y}) \quad \text{или} \quad \sum_{j=1}^n c_j x_j \leq \sum_{i=1}^m b_i y_i, \quad \text{где} \quad \vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \quad \text{и}$$

$\vec{y} = (y_1, y_2, \dots, y_m)$  - допустимые решения исходной и двойственной задач.

Достаточный признак оптимальности (теорема).

*Первая (основная) теорема двойственности:* если одна из взаимно двойственных задач имеет оптимальное решение, то его имеет и другая:  $F_{\max} = Z_{\min}$ . Экономический смысл первой теоремы двойственности.

*Вторая теорема двойственности:* компоненты оптимального решения двойственной задачи равны абсолютным значениям коэффициентов при соответствующих переменных линейной функции исходной задачи, выраженной через неосновные переменные её оптимального решения.

*Третья теорема двойственности:* компоненты оптимального решения двойственной задачи равны значениям частных производных линейной функции  $F_{\max}(b_1, b_2, \dots, b_m)$  по соответствующему аргументу ( $b_i, i = 1, 2, \dots, m$ ).