Задача 1

Малое предприятие имеет два цеха – А и В. Каждому установлен месячный план выпуска продукции. Известно, что цех А свой план выполняет с вероятностью 0,5. Вероятность выполнения плана цехом В при условии, что цех А выполнит свой план, равна 0,4. Известно также, что с вероятностью 0,1 может сложиться ситуация, когда ни один из цехов свой план не выполнит.

Если оба цеха выполнят свои планы в предстоящий месяц, то предприятие увеличит свой счёт в банке на 5 единиц; если оба не выполнят- снимет со счёта 4 единицы; если цех А выполнит, а цех В не выполнит – увеличит счёт только на 2 единицы; если же цех А не выполнит, а цех В выполнит - сократит свой счёт на 1 единицу.

Требуется:

1) определить вероятность выполнения плана цехом В;

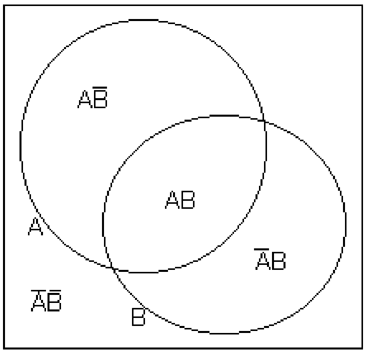
2) выяснить, зависит ли выполнение плана цехом А от того, выполнит или не выполнит свой план цех В;

3) найти вероятность того, что предприятию придётся снимать деньги со счёта в банке;

4) определить, на сколько и в какую сторону (увеличения - уменьшения) изменится в среднем счёт предприятия в банке по результатам работы в предстоящем месяце (ожидаемое изменение счёта в банке).

Решение:

Указанные в задаче события полезно представить графически с помощью диаграммы Эйлера-Венна:



Очевидно, что события $\mathrm{AB}, A\overline{B}, \overline{A}B, \overline{A}\overline{B}$ попарно несовместны и образуют полную группу. Кроме того, видно, что справедливы равенства

$$A=\mathrm{AB}+A\overline{B},\quad B=\mathrm{AB}+\overline{A}B,\quad A+B=A\overline{B}+\overline{A}B+\mathrm{AB},\ A+B=A+\overline{A}B=B+A\overline{B}.$$

Правые части этих равенств представляют собой суммы опять-таки несовместных событий.

С учётом изложенного выше на поставленные в задаче вопросы можно ответить следующим образом:

1) по условию, Р(А)=0,5; $P_B(A)=0,4;$
$P(\mathrm{AB})=P(A)\cdot P_A(B)=P(B)\cdot P_B(A),$ =0,1

$$P(B)=\frac{P(\mathrm{AB})}{P_B(A)}=\frac{0,1}{0,4}=0,25$$

2) Тогда из Р(АВ)=0,1 и $P(A)\cdot P(B)=0$,4¿0,25 следует, что $P(\mathrm{AB})\neq P(A)\cdot P(B)$. Это значит, что события А и В являются зависимыми.

3) Предприятию придется снимать деньги в банке при условии, что оба банка не выполнят план , и вероятность этого события равна $P(\overline{AB})=1-0,1-0,25-0,4=0,25$ либо цех А не выполнит план, а цех В – выполнит, вероятность этого события равна $P(\overline{A}B)=P(B)-P(AB)=0.25-0.1=0.15$

Тогда вероятность снятия денег со счета равна $P=P(\overline{AB})+P(\overline{A}B)=0.25+0.15=0.4$

4) Определим, на сколько и в какую сторону (увеличения - уменьшения) изменится в среднем счёт предприятия в банке по результатам работы в предстоящем месяце (ожидаемое изменение счёта в банке).

5-4+2-1=2 ед. – по результатам работы предприятие получит на счет дополнительно 2 единицы.

Задача 2

Оптовая база заключает договоры с магазинами на снабжение товарами. Известно, что от каждого магазина заявка на обслуживание на очередной день может поступить на базу с вероятностью 0,4, причём независимо от других магазинов. $\alpha=0,95$

Требуется:

1) определить минимальное количество магазинов (n_α), с которыми база должна заключить договоры, чтобы с вероятностью не менее α от них поступала хотя бы одна заявка на обслуживание на очередной день;

2) при найденном в пункте **1)** значении n_α определить:

   a) наиболее вероятное число заявок ($m^{¿}$) на обслуживание на очередной день и вероятность поступления такого количества заявок;

   b) вероятность поступления не менее $(n-1)$ заявок;

   c) математическое ожидание и дисперсию числа заявок на обслуживание на очередной день.

Решение:

Анализ условия задачи позволяет сделать вывод о том, что в основу её решения можно положить формулу Бернулли

$$P_n(m)=C_n^m p^m q^{n-m}$$

при $p=0,4;\ q=1-p=1-0,4=0,6;\ m=0,1,2,\dots,n.$

1) Минимальный объём n_α серии испытаний, при котором вероятность наступления события A хотя бы один раз будет не меньше 0,95, определим из условия $P_n(X\geq 1)\geq\alpha$ с помощью неравенства

$$n_\alpha\geq\frac{\ln(1-\alpha)}{\ln(1-p)}\quad \text{при}\quad \alpha=0,95,\ p=0,4.$$

Получим:

$$n_\alpha\geq\frac{\ln(1-0,95)}{\ln(1-0,4)}=\frac{\ln 0,05}{\ln 0,6}=\frac{-2,3026}{-0,3567}\approx 6,45.$$

Отсюда $n_\alpha=6$

2) Случайная величина X- число наступлений события A в серии из 6 испытаний, является дискретной с возможными значениями 0; 1; 2;…; 10, вероятности которых вычисляются по формуле

$$P(X=m)=P_6(m)=C_6^m\cdot 0,4^m\cdot 0,6^{6-m},\ m=0;1;2;\dots;10.$$

Записанная формула выражает закон распределения вероятностей случайной величины X. Как известно, этот закон называют биномиальным.

3) Вероятность того, что в данной серии испытаний событие A наступит хотя бы один раз, определим по формуле

$$P(X\geq 1)=1-(1-p)^n.$$

Получим: $P(X\geq 1)=1-(1-0,4)^6\approx 0,1176.$

4) Для определения вероятности того, что событие A наступит не менее 5 раз, воспользуемся формулой

$$P(X\geq 5)=\sum_{m=5}^{6}P_6(m)=P(X=5)+P(X=6).$$

Вычислим вероятности, стоящие в этом равенстве справа:

$$P(X=5)=C_6^5\cdot 0,4^5\cdot 0,6^1\approx 0,0102;$$

$$P(X=6)=C_6^6\cdot 0,4^5\cdot 0,6^0\approx 0,00001$$

В итоге $P(X \geq 5) \approx 0,0102 + 0,0001 = 0,0103$.

5) Наиболее вероятное значение $m^{¿}$ случайной величины X найдем из условия $m^{¿} \in [np-q;\ np+p]$. В нашем случае при $n=6$ и $p=0,4$ оно принимает вид $m^{¿} \in [1,1;\ 2,5]$.
Отсюда $m^{¿}=2$. Тогда

$$P(X=m^{¿}) = P(X=2) = C_6^2 \cdot 0,4^2 \cdot 0,6^4 \approx 0,3241.$$

6) Для случайной величины X , распределённой по биномиальному закону с параметрами n и p, её математическое ожидание и дисперсия определяются по формулам

$$m_x = np, \quad D_x = npq.$$

При $n=6$ и $p=0,4$ это даёт $m_x = 1,8$ и $D_x = 1,26$.

Задача 3

В автосалоне ежедневно выставляются на продажу автомобили двух марок – A и B. В течение дня продаётся X машин марки A и Y машин марки B, причём независимо от того, сколько их было продано в предыдущие дни. Машина марки A стоит 5 ед., машина марки B – 7 ед.

Закон распределения вероятностей системы (X,Y) задан таблицей

y_j / x_i	**0**	**1**	**2**
0	0,08	0,07	0,02
1	0,05	0,37	0,22
2	0,04	0,10	0,05

Требуется:

1) определить, какая марка машин пользуется в автосалоне наибольшим спросом;

2) выяснить, зависит ли число проданных автомашин марки A от числа проданных автомашин марки B;

3) найти ожидаемую (среднюю) дневную выручку автосалона;

4) оценить (с помощью дисперсии) возможные отклонения дневной выручки относительно среднего значения.

Пояснение: считать, что если P(X >Y) > P(Y >X), то машины марки A пользуются большим спросом, чем машины марки B.

1) Определим, какие марки автомобилей пользуются наибольшим спросом:

P(X >Y)=0,05+0,04+0,10=0,19

P(Y >X)=0,07+0,22+0,02=0,31

Условие P(X >Y) > P(Y >X) не выполняется, значит, машины марки B пользуются большим спросом, чем машины марки A.

2) Найдём частные распределения вероятностей системы (X,Y). Возможные значения случайных величин X и Y прямо указаны в таблице 1, а вероятности этих значений легко вычисляются по формулам

$$P(x_i)=p_i=\sum_{j=1}^{2} p_{ij},\ i=1,2,3;$$

$$P(y_j)=q_j=\sum_{i=1}^{3} p_{ij},\ j=1,2.$$

В итоге получаем ряд распределения случайной величины X:

x_i	$x_1=0$	$x_2=1$	$x_3=2$
p_i	$p_1=0,17$	$p_2=0,64$	$p_3=0,19$

и ряд распределения случайной величины Y:

y_j	$y_1=0$	$y_2=1$	$y_3=2$
q_j	$q_1=0,17$	$q_2=0.54$	$q_3=0.29$

Используя полученные данные, определяем числовые характеристики случайных величин X и Y:

$$m_x=\sum_{i=1}^{3} x_i p_i=1.02;\ D_x=\sum_{i=1}^{3} x_i^2 p_i-m_x^2=0.36;$$

$$m_y=\sum_{j=1}^{2} y_j q_j=1.12;\ D_y=\sum_{j=1}^{2} y_j^2 q_j-m_y^2=0,45.$$

3) Для выяснения вопроса о том, зависимы или нет случайные величины X и Y, поступим следующим образом. Последовательно, ориентируясь на клетки таблицы 1, вычислим соответствующие произведения $p_i \cdot q_j$ и сравним их с вероятностями p_{ij}, стоящими в этих клетках: если встретится клетка, для которой $p_i \cdot q_j \neq p_{ij}$, то сделаем вывод о том , что случайные величины X и Y являются зависимыми; если же равенство $p_i \cdot q_j = p_{ij}$ выполняется для всех клеток табл.1, то последует вывод о независимости случайных величин X и Y.

Итак, для клетки (1,1): $p_1 \cdot q_1 = 0,17 \cdot 0,17 = 0,0289,$ но $p_{11} = 0,08;$ следовательно, случайные величины X и Y зависимы.

4) Корреляционный момент K_{xy} системы (X,Y) вычислим по формуле $K_{xy} = M[X \cdot Y] - m_x \cdot m_y$. было установлено, что $m_x = 1.02; \; m_y = 1.12$. Для нахождения $M[X \cdot Y]$ используем формулу

$$M[X \cdot Y] = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{2} x_i y_j \cdot p_{ij}$$

и данные таблицы 1. Получим $M[X \cdot Y] = 3,92$. В итоге $K_{xy} = 3,92 - 5,54 \cdot 0,68 = 0,1528.$

Коэффициент корреляции r_{xy} определим по формуле

$$r_{xy} = \frac{K_{xy}}{\sigma_x \cdot \sigma_y}, \quad \text{где } \sigma_x = \sqrt{D_x}, \sigma_y = \sqrt{D_y}.$$

В пункте **1)** было установлено, что

$$D_x = 0.36; \; D_y = 0,45.$$

С учётом того, что $K_{xy} = 0,1528,$ находим $r_{xy} = 0,375$. Это значит, что случайные величины X и Y коррелированны и, следовательно, зависимы (второе подтверждение зависимости).

Задача 4

Торговая фирма располагает разветвлённой сетью филиалов и есть основания считать, что её суммарная дневная выручка X является нормально распределённой случайной величиной. Наблюдённые значения этой величины по 100 рабочим дням представлены в виде следующего интервального ряда:

i	1	2	3	4	5	6	7	8
$(x_{i-1}; x_i)$	(0;5)	(5;10)	(10;15)	(15;20)	(20;25)	(25;30)	(30;35)	(35;40)
n_i	3	5	20	24	22	15	7	4

Требуется:

1) построить гистограмму относительных частот;

2) определить несмещённые оценки для неизвестных математического ожидания m_x и дисперсии $D_x = \sigma_x^2$ случайной величины X;

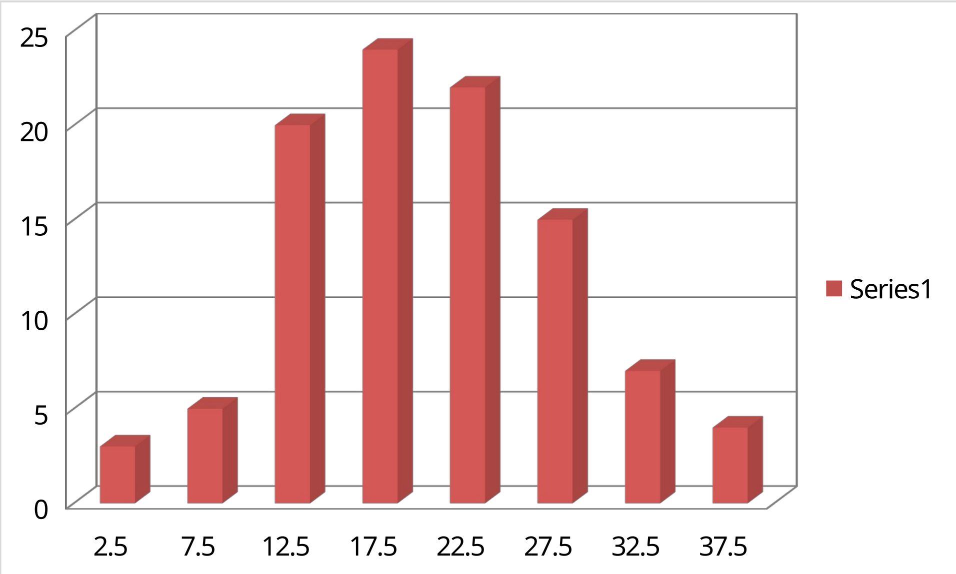
3) найти 95-процентные доверительные интервалы для m_x и σ_x.

Решение:

1 Построим гистограмму относительных частот

Для этого определим середины интервалов

i	1	2	3	4	5	6	7	8
$(x_{i-1}; x_i)$	(0;5)	(5;10)	(10;15)	(15;20)	(20;25)	(25;30)	(30;35)	(35;40)
	2,5	7,5	12,5	17,5	22,5	27,5	32,5	37,5
n_i	3	5	20	24	22	15	7	4



2 Определим несмещенные оценки для неизвестных математического ожидания m_x и дисперсии $D_x = \sigma_x^2$ случайной величины X;

3 Доверительный интервал для неизвестного m_x имеет вид

$$I_\gamma = \left(m_x^{¿} - \delta \,;\, m_x^{¿} + \delta \right),$$ где $\gamma = 0,95$, а $m_x^{¿} = 14$.

Так как выборка взята из нормальной генеральной совокупности с известным средним квадратическим отклонением, то величина δ определяется по формуле

$$\delta = x_\gamma \cdot \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}},$$

где $\sigma_x = 5$, $n = 25$, а x_γ есть аргумент функции Лапласа Ф(x), при котором $\Phi(x_\gamma) = \frac{\gamma}{2} = \frac{0,95}{2} = 0,475$. По таблице приложения 2 в [2] находим $x_\gamma = 1,96$. Тогда

$$\delta = 1,96 \cdot \frac{5}{\sqrt{25}} = 1,96$$ и $$I_{\gamma = 0,95} = (14 - 1,96;\ 14 + 1,96).$$

В итоге $I_{\gamma=0,95}=(12,04;\ 15,96)$. Записанный интервал найден по одной реализации выборки и его следует понимать так: он либо содержит, либо не содержит неизвестное математическое ожидание m_x; однако если получить большое число реализаций выборки объёма $n=25$ из

$$X\sim N\ (m_x;\ 5)$$

и по каждой реализации найти доверительный интервал, то в среднем 95% найденных интервалов накроют неизвестное m_x. Длины же этих интервалов в данных условиях будут одинаковыми, равными 2δ.

Задача 5

По результатам 18 замеров времени X изготовления детали определены выборочное среднее $\overset{\text{¿}}{m_x}$ =87,17 и исправленная дисперсия s^2=18. Полагая распределение случайной величины X нормальным, на уровне значимости α = 0,01 решить, можно ли принять a_0 =90 в качестве нормативного времени изготовления детали.

Пояснение: Основную гипотезу $H_0: m_x=a_0$ проверить при альтернативной гипотезе H_a, указанной в исходных данных для решения задач.

1. $H_0: m_x=a_0=90$.

2. $H_a: m_x<90$.

3. Так как выборка извлечена из нормальной генеральной совокупности с известным $\sigma_x\ (\sigma_x=3)$, то в качестве критерия проверки гипотез выберем

$$K=\frac{\overset{\text{¿}}{m_x}-a_0}{\sigma_x}\cdot\sqrt{n}\sim N\ (0;1)$$

– стандартное нормальное распределение. Заметим, что это имеет место при условии справедливости нулевой гипотезы H_0 .

4. По виду H_0, H_a и K заключаем, что критическая область в данном случае будет левосторонней.

5. Левую критическую точку $\kappa_{кр}^{лев}$ определим так: сначала при уровне значимости $\alpha=0,01$ из уравнения

$$\Phi\left(\kappa_{кр}^{пр}\right)=\frac{1-2\alpha}{2}$$

по таблице приложения 2 в [2] найдём $к_{кр}^{пр};$ после этого положим $к_{кр}^{лев}=-к_{кр}^{пр}$. Получим:

$$\Phi\left(к_{кр}^{пр}\right)=\frac{1-2\cdot 0,01}{2}=0,49;\;\; к_{кр}^{пр}=2,33;\;\; к_{кр}^{лев}=-2,33.$$

6. Вычислим наблюдаемое значение критерия K:

$$к_{набл}=\frac{m_x^{¿}-a_0}{\sigma_x}\cdot\sqrt{n}=\frac{49-50}{3}\cdot\sqrt{16}=-1,33.$$

7. Так как $к_{набл}>к_{кр}^{лев}$ $\left(к_{набл}=-1,33;\; к_{кр}^{лев}=-2,33\right)$, то нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу $H_0: m_x=90.$ Она принимается.