Российский государственный социальный университет

РУБЕЖНЫЙ КОНТРОЛЬ 1

по дисциплине «Математика»

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

ФИО студента	**Ярматов Ягшимурат Жумамуратович**
Направление подготовки	**Информационные системы и технологии в экономической сфере**
Группа	

Москва 2023

РУБЕЖНЫЙ КОНТРОЛЬ 1

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

Задача 1

Определить собственные значения и собственные векторы матрицы третьего порядка.

$$\begin{bmatrix} 9 & 2 & -2 \\ 0 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Решение

Уравнение для нахождения собственных значений:

$$\begin{vmatrix} 9-\lambda & 2 & -2 \\ 0 & 5-\lambda & 0 \\ 1 & 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 9-\lambda & 2 & -2 \\ 0 & 5-\lambda & 0 \\ 1 & 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \textit{раскладываем по второй строке} = \text{¿} (5-\lambda)\left((9-\lambda)(3-\lambda)-1\cdot(-2)\right)=(5-\lambda)\left(\lambda^2-12\lambda+29\right)=$$

$$-\lambda^3+17\lambda^2-89\lambda+145=0$$

$$(5-\lambda)\left(\lambda^2-12\lambda+29\right)=0$$

$$\lambda_1=5$$

$$\lambda_2=6-\sqrt{7}$$

$$\lambda_3=6+\sqrt{7}$$

Собственное значение:

$$\lambda_1=5$$

Найдем собственный вектор:

$$A-\lambda E=\begin{vmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix}$$

$$(A-\lambda E)X=0$$

Тогда имеем однородную систему линейных уравнений, решим ее методом Гаусса:

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \underset{¿}{стр.1 - стр.3} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \underset{¿}{стр.1/3}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} стр.2/2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Полагая x_3 свободной - $x_3 = c$, получим следующее решение:

$$X = \begin{pmatrix} 0 \\ c \\ c \end{pmatrix}$$

Пусть $c = 1$, тогда собственный вектор: $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Собственное значение:

$$\lambda_2 = 6 - \sqrt{7}$$

Найдем собственный вектор:

$$A - \lambda E = \begin{vmatrix} 3+\sqrt{7} & 2 & -2 \\ 0 & -1+\sqrt{7} & 0 \\ 1 & 2 & -3+\sqrt{7} \end{vmatrix}$$

$$(A - \lambda E) X = 0$$

Тогда имеем однородную систему линейных уравнений, решим ее методом Гаусса:

$$\begin{pmatrix} 3+\sqrt{7} & 2 & -2 \\ 0 & -1+\sqrt{7} & 0 \\ 1 & 2 & -3+\sqrt{7} \end{pmatrix} \underset{¿}{стр.2/(-1+\sqrt{7})}$$

$$\begin{matrix} стр.1 - 2\,стр.2 \\ ¿\,стр.3 - 2\,стр.2 \end{matrix} \begin{pmatrix} 3+\sqrt{7} & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -3+\sqrt{7} \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} стр.1 * (-3+\sqrt{7}) \\ ¿\,стр.3 - 2\,стр.2 \end{matrix} \begin{pmatrix} -2 & 0 & -2*(-3+\sqrt{7}) \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -3+\sqrt{7} \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} стр.1/(-2) \\ ¿\,стр.3 - 2\,стр.2 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3+\sqrt{7} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -3+\sqrt{7} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3+\sqrt{7} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Полагая x_3 свободной - $x_3 = c$, получим следующее решение:

$$X=\begin{pmatrix} c+3-\sqrt{7} \\ 0 \\ c \end{pmatrix}$$

Пусть $c=1$, тогда собственный вектор: $\begin{pmatrix} 4-\sqrt{7} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Собственное значение:

$\lambda_3=6+\sqrt{7}$

Найдем собственный вектор:

$$A-\lambda E=\begin{vmatrix} 3-\sqrt{7} & 2 & -2 \\ 0 & -1-\sqrt{7} & 0 \\ 1 & 2 & -3-\sqrt{7} \end{vmatrix}$$

$(A-\lambda E)X=0$

Тогда имеем однородную систему линейных уравнений, решим ее методом Гаусса:

$$\begin{pmatrix} 3-\sqrt{7} & 2 & -2 \\ 0 & -1-\sqrt{7} & 0 \\ 1 & 2 & -3-\sqrt{7} \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} стр.2/(-1-\sqrt{7}) \\ ¿ \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} стр.1-2\,стр.2 \\ ¿\,стр.3-2\,стр.2 \end{matrix} \quad \begin{pmatrix} 3-\sqrt{7} & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -3-\sqrt{7} \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} стр.1*(-3-\sqrt{7}) \\ ¿\,стр.3-2\,стр.2 \end{matrix} \quad \begin{pmatrix} -2 & 0 & -2*(-3-\sqrt{7}) \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -3-\sqrt{7} \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} стр.1/(-2) \\ ¿\,стр.3-2\,стр.2 \end{matrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3-\sqrt{7} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -3-\sqrt{7} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3-\sqrt{7} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Полагая x_3 свободной - $x_3=c$, получим следующее решение:

$$X=\begin{pmatrix} c+3+\sqrt{7} \\ 0 \\ c \end{pmatrix}$$

Пусть $c=1$, тогда собственный вектор: $\begin{pmatrix} 4+\sqrt{7} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Задача 2

Доказать совместность системы и решить её тремя способами: по формулам Крамера, методом Гаусса и средствами матричного исчисления.

$$\left| -x_1-9x_2-4x_3=-8, ¿ \right| 2x_1+7x_2+3x_3+x_4=6, ¿¿¿¿$$

Система линейных алгебраических уравнений совместна тогда и только тогда, когда ранг её основной матрицы равен рангу её расширенной матрицы.

Вычислим ранг расширенной матрицы:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & -9 & -4 & 0 & -8 \\ 2 & 7 & 3 & 1 & 6 \\ 3 & 5 & 2 & 2 & 4 \end{array}\right) \begin{array}{c} стр.1/(-1) \\ стр.3+2стр.1 \\ стр.3+3стр.1 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 9 & 4 & 0 & 8 \\ 0 & -11 & -5 & 1 & -10 \\ 0 & -22 & -10 & 2 & -20 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} стр.2/(-11) \\ стр.3-2стр.2 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 9 & 4 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 5/11 & -1/11 & 10/11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$стр.2/(-11) \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 9 & 4 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 5/11 & -1/11 & 10/11 \\ & & & & 0 \end{array}\right) стр.2-9стр.1$$

$$стр.2/(-11) \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1/11 & 9/11 & -2/11 \\ 0 & 1 & 5/11 & -1/11 & 10/11 \\ & & & & 0 \end{array}\right)$$

Ранг расширенной матрицы равен рангу основной матрицы и равен 2.

Количество переменных равно 4>2, следовательно система имеет бесконечное значение решений. Решение системы по формулам Крамера и средствами матричного исчисления не возможно.

Метод Гаусса

Запишем расширенную матрицу системы:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 5 & 5 \\ 4 & -2 & 1 & 21 \\ 5 & 10 & 4 & 4 \end{array}\right)$$

Получим единицы на главной диагонали.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & -9 & -4 & 0 & -8 \\ 2 & 7 & 3 & 1 & 6 \\ 3 & 5 & 2 & 2 & 4 \end{array}\right) \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1/11 & 9/11 & -2/11 \\ 0 & 1 & 5/11 & -1/11 & 10/11 \\ & & & & 0 \end{array}\right)$$

Полагаем x_3, x_4 свободными - $x_3 = c_1$, $x_4 = c_2$, получим следующее общее решение:

$$X = \begin{pmatrix} \frac{1}{11} c_1 - \frac{9}{11} c_2 - \frac{2}{11} \\ \frac{-5}{11} c_1 + \frac{1}{11} c_2 + \frac{10}{11} \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$