Бланк выполнения задания

Вариант 4

Задача 1 Дано дифференциальное уравнение первого порядка и его начальные условия. Найти общее решение этого уравнения и определить частное решение: $y' - \frac{y}{x} = -2\ln x$, $y_0 = 1,\ x_0 = \frac{\pi}{2}$

Решение:

$y' - \frac{y}{x} = -2\ln x$

Это линейное неоднородное уравнение первого порядка

Решаем сначала линейное однородное уравнение $y' - \frac{y}{x} = 0$, соответствующее данному уравнению:

$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x},\quad \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x},\quad \int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x},\quad \ln|y| = \ln|x| + \ln C$

$y = C \cdot x$

Ищем общее решение данного уравнения в виде: $y = C(x) \cdot x$.

Тогда $y' = C'(x) \cdot x + C(x)$.

Подставляя y и y′ в уравнение $y' - \frac{y}{x} = -2\ln x$, получим:

$C'(x) \cdot x + C(x) - C(x) = -2\ln x$

$C'(x) = -\frac{2\ln x}{x}$

$C(x) = -2\int \frac{\ln x dx}{x} = -2\int \ln x d(\ln x) = -\ln^2 x + C,$ где C – произвольная постоянная.

Общее решение исходного уравнения имеет вид:

$y = -x\ln^2 x + C \cdot x$ где C – произвольная постоянная.

Найдем частное решение, соответствующее y(π/2) = 1:

$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{2} \cdot \ln^2\left(\frac{\pi}{2}\right) + C = 1 \Rightarrow C = 1 + \frac{\pi}{2} \cdot \ln^2\left(\frac{\pi}{2}\right).$

Искомое частное решение имеет вид: $y = x\left(1 + \frac{\pi}{2} \cdot \ln^2\left(\frac{\pi}{2}\right) - \ln^2 x\right)$

Ответ: $y=x\left(1+\frac{\pi}{2}\cdot\ln^2\left(\frac{\pi}{2}\right)-\ln^2 x\right)$.

Задача 2 Решить дифференциальное уравнение первого порядка:

$x\,y'-y=arctg\ x$

Решение:

$x\,y'-y=arctg\ x$

$y'-\frac{y}{x}=\frac{arctgx}{x}$

Решаем сначала линейное однородное уравнение $y'-\frac{y}{x}=0$, соответствующее данному уравнению:

$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}$, $\frac{dy}{y}=\frac{dx}{x}$, $\int\frac{dy}{y}=\int\frac{dx}{x}$, $\ln|y|=\ln|x|+\ln C$

$y=C\cdot x$

Ищем общее решение данного уравнения в виде: $y=C(x)\cdot x$.

Тогда $y'=C'(x)\cdot x+C(x)$.

Подставляя y и y′ в уравнение $y'-\frac{y}{x}=\frac{arctgx}{x}$, получим:

$C'(x)\cdot x+C(x)-C(x)=\frac{arctgx}{x}$

$C'(x)=\frac{arctgx}{x^2}$

$$C(x)=\int\frac{arctgx}{x^2}dx=¿\left|u=arctgx\,;du=\frac{dx}{1+x^2}¿\right|¿¿¿¿$$

¿

¿

где C – произвольная постоянная.

Общее решение исходного уравнения имеет вид:

$y=-arctgx-\frac{x}{2}\ln\left(\frac{1}{x^2}+1\right)+Cx$, где C – произвольная постоянная.

Ответ: $y=-arctgx-\frac{x}{2}\ln\left(\frac{1}{x^2}+1\right)+Cx$ где C – произвольная постоянная.