Задача 4. Численное решение нелинейных уравнений с заданной точностью

Задание: по заданному нелинейному уравнению

$$F(x)=0,$$

где F(x) – некоторое нелинейное аналитическое выражение, определенное на интервале [a, b], вычислить корни этого уравнения с требуемой точностью E одним из трех методов:

1. итераций;
2. половинного деления;
3. Ньютона.

Исходные данные для решения нелинейных уравнений приведены в табл. 4.

Таблица 4

Исходные данные для решения нелинейных уравнений

Вариант	**Выражение**	**Интервал**		**Метод**	**Точность**
№	**F(x)**	**a**	**b**	**N**	**E**
00	$3\sin(\sqrt{x})+0{,}35x-3{,}8$	2	3	1	10^{-5}
01	$0{,}25x^3+x-1$	0	2	3	10^{-5}
02	$x+\sqrt{x}+x^{1/3}-2{,}5$	0	1	2	10^{-5}
03	$x-1/(3+\sin(3{,}6x))$	0,4	0,85	1	10^{-6}
04	$0{,}1x^2-x\ln x$	0	2	3	10^{-5}
05	$tgx-(tgx)^3/3-1/3$	1	0,8	2	10^{-5}
06	$\arccos x-(1-0{,}3x^3)^{0,5}$	0	1	1	10^{-6}
07	$3x-4\ln x-5$	0,1	4	3	10^{-5}
08	$\cos(x/2)-2\sin(1/x)+1/x^2$	0,5	2	2	10^{-5}
09	$(1-0{,}4x^2)^{0.5}-\arcsin x$	0	1	1	10^{-5}
10	$e^x-(e^x)^2/2$	0	1	3	10^{-6}
11	$\sin(\ln x)-\cos(\ln x)+2\ln x$	0	3	2	10^{-5}
12	$x-2+\sin(1/x)$	1	2	1	10^{-5}
13	x^3-5x^2+3x-2	1,2	6	3	10^{-6}
14	x^3+4x+3	-1,5	-0,3	2	10^{-6}
15	x^3+2x-4	1	2	3	10^{-5}
16	e^x+x-3	1	3	2	10^{-5}
17	$5x-8\ln x-8$	3	5	2	10^{-6}
18	$x-\sin x-0{,}25$	0,5	2	3	10^{-5}
19	$1-x+\sin x-\ln(1+x)$	0	1,5	1	10^{-5}
20	$(1-x)^{0,5}-tgx$	0	1	2	10^{-6}
21	$3(\ln x)^2+6\ln x-5$	1	3	3	10^{-6}
22	$0{,}4+arctg(x^{0,5})-x$	1	2	1	10^{-5}
23	$x^3+0{,}25x-7$	1,5	2,5	2	10^{-5}
24	$5x^3+10x^2+5x+1$	-2	0	3	10^{-6}

25	$e^x + \ln x - 10x$	3	4	2	10^{-6}
26	$5x^2 - 8\ln x - 7$	2	5	3	10^{-6}
27	$x^3 - \sin x - 0{,}75$	0	2	2	10^{-5}
28	$5 - x^2 + \sin x - \ln(1+x)$	0,5	1,5	1	10^{-5}
29	$(1-x)^{1,5} - tgx$	1	3	3	10^{-6}
30	$2(\ln x)^3 + 8\ln x - 5$	1	2	2	10^{-6}

РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ ЗАДАЧИ 4

При разработке модуля программы решения нелинейных уравнений необходимо иметь ввиду следующее.

Решение нелинейных уравнений вида *F(x)=0* заключается в поиске одного или всех таких значений *x* на интервале [*a,b*], при подстановке которых функция *F(x)* обращается в нуль.

Работу по решению этой задачи целесообразно провести в два этапа.

На первом этапе оценивается характер изменения функции *F(x)* при изменении аргумента *x* на интервале [*a,b*] и проверяется, имеет ли место перемена ее знака (переход через нуль). Количество таких переходов определяет и количество корней.

Рис. 3. Графическое представление функции *F(x)*

Для этого интервал [*a,b*] разбивается на *n* участков, где *n* принимается равным 10..15, и вычисляется функция *F(x)* на каждом участке, т.е. при изменении *x* от *a* до *b* с шагом *h=(b-a)/n*.

Из полученной таким образом таблицы будет виден и характер изменения функции, и количество переходов через нуль.

На втором этапе путем последовательных приближений производится поиск корней одним из предлагаемых методов.

Метод итераций основан на последовательном задании аргумента *x* и вычислении по нему функции *F(x)*, причем очередное значение *x* получается присваиванием значения функции от предыдущего *x* по формуле $x_{n+1}=F(x_n)$ до тех пор, пока соблюдается условие $|x_{n+1} - x_n| >= E$. Первоначальное значение аргумента *x* (первое приближение: x_1) определяется из таблицы как ближайшее к месту перехода функции *F(x)* через нуль. Последнее приближение *x* и будет корнем уравнения с точностью *E*.

Метод половинного деления (дихотомии) состоит в следующем.

1. Определяем начальное значение *x=(a+b)/2* (как результат деления интервала [*a,b*] пополам).
2. Вычисляем *F(x)*.

3. Если $F(x)>0$ и $F(a)>0$ или $F(x)<0$ и $F(a)<0$ (т.е. перемена знака функции $F(x)$ не произошла), то задаем $a=x$ (т.е. перемещаем левую границу интервала в середину), уменьшая интервал вдвое и исключая при этом левую половину, на которой либо нет корней, либо есть четное число корней, иначе задаем $b=x$ (исключаем правую половину интервала). См. рис. 4.
4. Проверяем условие $b-a<E$, если оно не выполняется, то возвращаемся к п.1. с новыми значениями границ интервала, иначе заканчиваем вычисления и считаем, что последнее значение x и будет корнем уравнения с заданной точностью E.

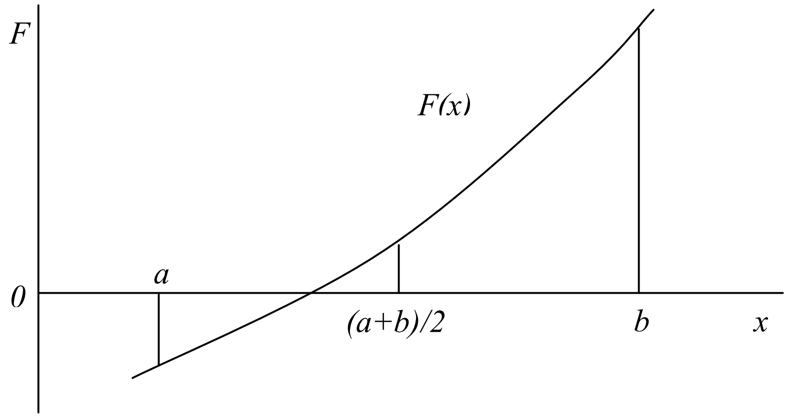


Рис.4. Геометрическое представление метода половинного деления

Метод Ньютона (касательных) основан также на последовательном задании значений x и вычислении функции $F(x)$, причем очередное значение x определяется формулой:

$$x_{n+1}=x_n-F(x_n))/F'(x_n),$$

где $F'(x_n)$ – производная от функции $F(x)$ в точке x_n.

Геометрически производная от $F(x)$, как известно, по величине равна тангенсу угла наклона касательной к кривой $F(x)$ в точке x. Тогда точка x_{n+1} есть точка пересечения с осью абсцисс касательной к кривой $F(x)$, проведенной в точке $x=x_n$. См. рис. 5.

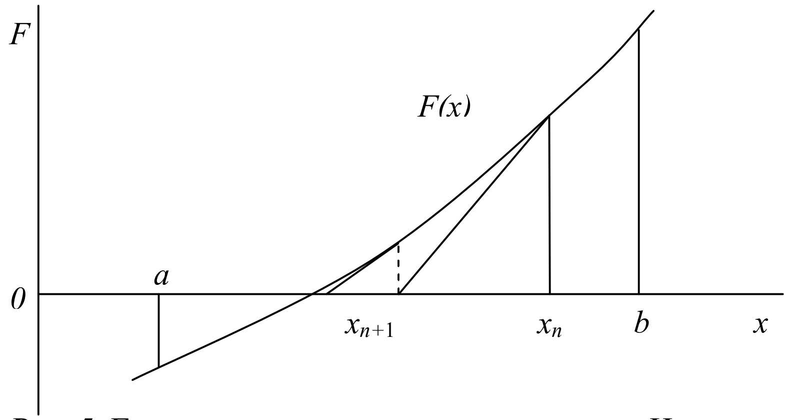


Рис. 5. Геометрическое представление метода Ньютона

Как и в методе итераций, начальное значение x задается как ближайшее табличное к месту перехода функции $F(x)$ через ноль.

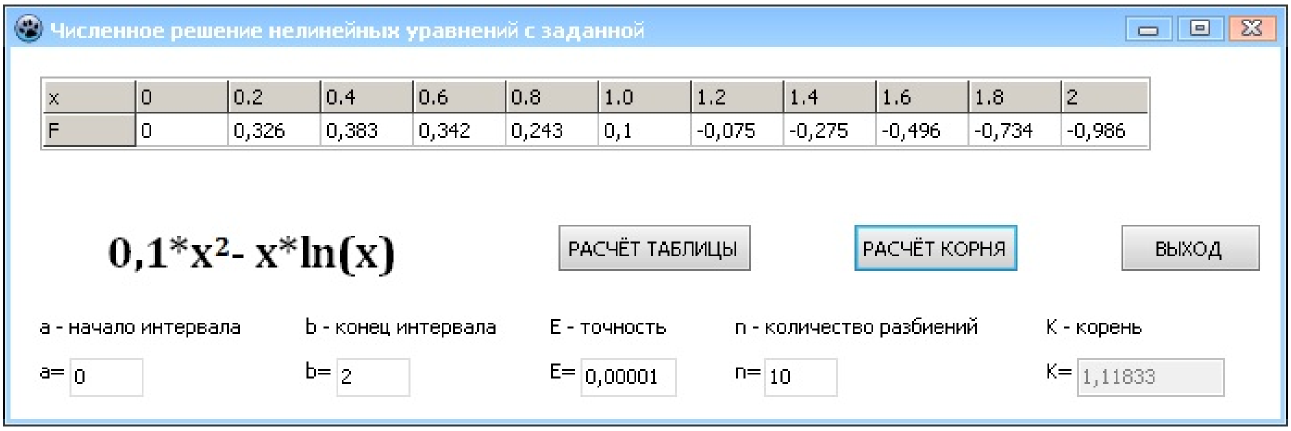
Выражение для производной $F'(x)$ получают аналитически в результате дифференцирования функции $F(x)$. Значение производной может быть получено приближенно и численным методом:

$$F'(x)=(F(x+E)-F(x))/E.$$

Итерационный процесс приближения к корню (последовательное вычисление x_{n+1}) продолжается до тех пор, пока будет выполняться условие $|x_{n+1} - x_n|>=E$.

Следует иметь ввиду, что при выполнении задания и алгоритм, и программа должны предусматривать оба этапа работы: табулирование функции *F(x)* с выбором начального приближения и процесс поиска корней с заданной точностью.

Примерный(!) вид формы решения задачи 4 представлен на рисунке ниже.



Как строить таблицы описано в файле **ТаблицаСтрок.pdf**.

В данном примере из таблицы видно, что функция *F(x)* меняет свой знак при изменении *x* от 1,0 до 1,2. В качестве начального значения корня можно взять произвольное значение из этого интервала.

Уравнение, на указанном для варианта интервале, может иметь не один корень. В этом случае надо найти все корни. Для этого предварительно надо исследовать интервал на возможные изменения знака функции *F(x)*.