Министерство науки и образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное учреждение высшего образования
"Владимирский государственный университет имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых"
(ВлГУ)

Институт машиностроения и автотранспорта
Кафедра "Технология машиностроения"

РЕФЕРАТ
по дисциплине "Теоретическая механника"
на тему "Кинематика движения"

Выполнил
студент группы С-422
Корниенко Ю.В
Проверил
Беляев Б.А

Владимир 2023

Содержание

Введение

Кинематика - это раздел физики, посвящённый математическому описанию движения без анализа причин, приводящих к его возникновению или изменению. Причиной изменения или возникновения движения является сила, а сила по II-у закону Ньютона связана с массой. Поэтому для того, чтобы исключить из рассмотрения силу достаточно не рассматривать массу. При этом кроме силы из рассмотрения выпадают многие механические понятия: импульс, энергия, момент импульса. А что остаётся, то и рассматривается в кинематике. Таким образом, кинематику можно было бы назвать механикой без массы.

Самый простой объект, способный двигаться - это материальная точка: тело, размеры которого пренебрежимо малы в условиях данной физической задачи. Движением материальной точки называется смена её положения с течением времени. Поэтому первое кинематическое понятие, с которым мы сталкиваемся - это положение.

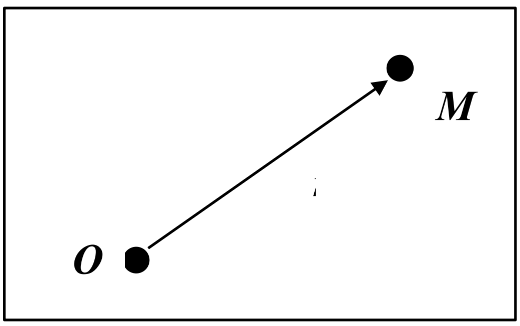
1. Вектор положения

Положение чего угодно невозможно задать само по себе. Всё находится *относительно* чего-то. Значит, мы должны сначала установить начало отсчёта (точку О), а это невозможно сделать по-другому, кроме как поставив туда какое-либо материальное тело (тело отсчёта). И от этого «главного» тела уже можно проводить геометрические векторы, соединяющие начало отсчёта с тем или иным положением материальной точки.

Геометрическим вектором называется направленный отрезок, соединяющий положения двух материальных точек.

Геометрический вектор, соединяющий тело отсчёта с материальной точкой, называется вектором положения материальной точки.

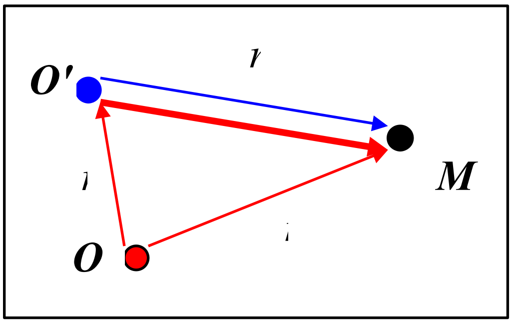
При задании положения материальной точки относительно тела отсчёта последнее по определению считается неподвижным. Поэтому все возможные векторы положений начинаются из одной точки и называются радиус-векторами r .



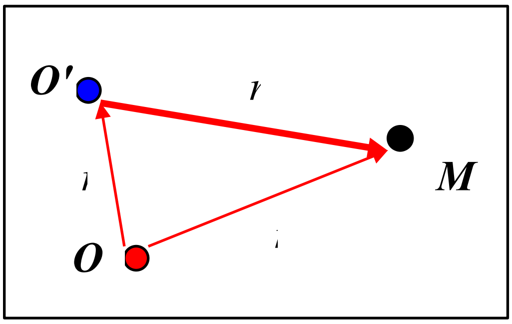
Совокупность всех возможных радиус-векторов образует пространство.

Смена начала отсчёта приводит к изменению *всех* радиус-векторов. Каким образом? Ответ зависит от системы постулатов, которыми мы собираемся пользоваться. Классическая механика, которую мы в основном и изучаем, использует постулаты Галилея-Ньютона.

Если положение материальной точки M относительно тела отсчёта в точке O обозначить r, относительно другого тела отсчёта в точке O' обозначить r', а геометрический вектор, соединяющий точки O и O', обозначить r_0, то наблюдатель в точке O будет видеть *три* геометрических вектора: r, r_0 и $O'M$.



Пусть другому наблюдателю в точке O' нет дела ни до чего, кроме материальной точки M. В дальнейшем системе отсчёта с нелюбопытным наблюдателем будет отводиться «второстепенная» роль. В противовес этому система с наблюдателем, который видит всё, будет считаться «основной». В общем, наблюдатель O' видит только один вектор r'. Как соотносится геометрический вектор r', видимый в пространстве O' с геометрическим вектором $O'M$, видимым в пространстве O? Ответ на этот вопрос даёт первый постулат Галилея: геометрические векторы в разных системах отсчёта одинаковы. Т.е. $O'M = r'$. Тогда предыдущий рисунок можно переделать так:



И правило сложения векторов по треугольнику позволяет записать соотношение между тремя векторами:

$$r = r' + r_0 \quad .$$

В соответствии с этим соотношением можно находить положения в «основной» системе отсчёта, зная их во «второстепенной». Такое преобразование радиус-векторов будем называть *обратным* преобразованием Галилея. Соответственно, *прямое* преобразование позволяет находить положения во «второстепенной» системе отсчёта, зная их в «основной»:

$$r' = r - r_0$$

В дальнейшем какая-либо величина в «основном» пространстве будет называться «*абсолютной*», во «второстепенном» пространстве - «*относительной*», а та, через которую они связаны, - *переносной.* Значит

- r - «абсолютный» радиус-вектор;
- r' - «относительный» радиус-вектор;
- r_0 - переносный радиус-вектор.

Итак, в соответствие с первым постулатом Галилея смена начала отсчета приводит к изменению пространства, которое описывается преобразованием Галилея. Это означает, что пространство относительно.

2. Траектория движения

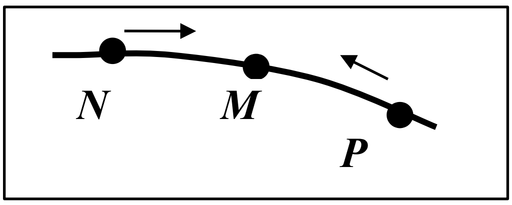
Используя понятие радиус-вектора, движение можно описать функциональной зависимостью $r(t)$, где t - время. Поскольку положение относительно, то и движение относительно. Относительны и все понятия, связанные с ним. Первым из таких понятий мы рассмотрим траекторию.

Траекторией называется совокупность положений, пройденных телом в процессе движения.

Тело не может в один и тот же момент времени находиться в разных положениях. Поэтому траектория представляет собой линию, и при этом линию *непрерывную*. В зависимости от формы траектории различают *прямолинейное* и *криволинейное* движение. Если криволинейная траектория лежит в одной плоскости, то движение называется плоским.

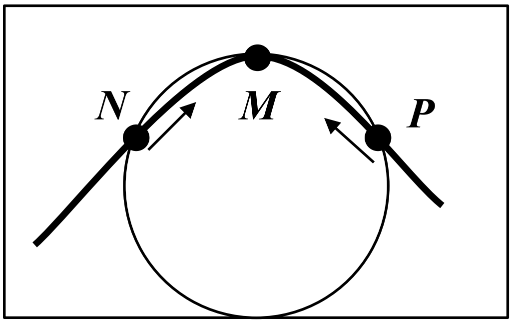
Если траектория представляет собой пространственную кривую, то в каждой точке траектории можно ввести понятие *соприкасающейся плоскости*.

Соприкасающейся плоскостью в какой-либо точке траектории M называется предельное положение плоскости, проходящей через три точки N, M, P этой траектории, когда точки N и P неограниченно приближаются (стремятся) к точке M.



Через три точки, не лежащие на одной прямой можно прости окружность и при том единственную. Поэтому для любой точки криволинейной траектории можно ввести понятие соприкасающейся окружности.

Соприкасающейся окружностью в какой-либо точке траектории М называется предельная окружность, проходящая через три точки N, M, P этой траектории, когда точки N и P неограниченно приближаются (стремятся) к точке М.



Центром и радиусом кривизны траектории в точке М называется центр и радиус кривизны окружности, соприкасающейся с траекторией в точке М. Очевидно, что в случае пространственной траектории соприкасающаяся окружность лежит в соприкасающейся плоскости. Прямолинейную траекторию можно считать траекторией с бесконечным радиусом кривизны.

Орт - это вектор, не обладающий физической размерностью (безразмерный), модуль которого равен единице. Любой вектор можно представить как произведение модуля на орт. Например, радиус-вектор:

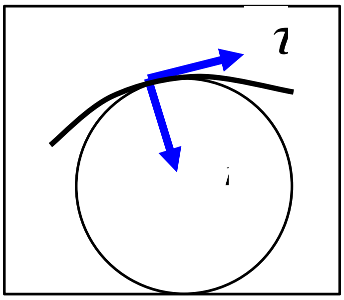
$$r = r \cdot \rho$$

Значит, орт любого вектора равен частному от деления вектора на его орт:

$$\vec{\rho} = \frac{r}{r} .$$

Нормалью траектории n в точке М называется орт, направленный из точки М в центр кривизны траектории в точке М.

Ортом касательной τ в точке М называется орт, касательный к соприкасающейся окружности в точке М и направленный по движению.



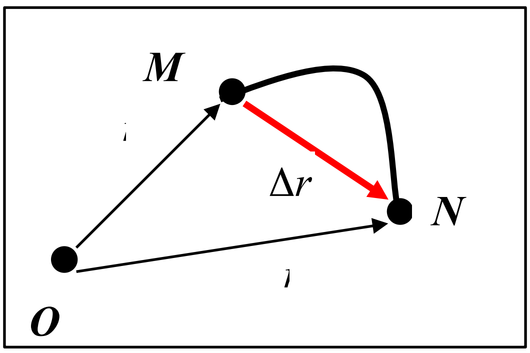
Ясно, что $\tau \perp n$.

Перемещением называется вектор изменения положения или вектор разности между последующим положением и предыдущим:

$$\Delta r = r(t_2) - r(t_1)$$

В случае, если ни один отрезок траектории не проходился материальной точкой дважды, то путь или путевая координата *S(t)* - это длина траектории от точки начала движения к данному моменту времени.

Отметим две точки на траектории: *M* с радиусом-вектором r_1 и *N* с радиусом-вектором r_2.



Тогда для перемещения $\Delta r = r_2 - r_1$ и приращения пути *ΔS* всегда справедливо:

$$\left|\Delta r\right| \leq \Delta S$$

(равенство выполняется в случае прямолинейной траектории). При этом

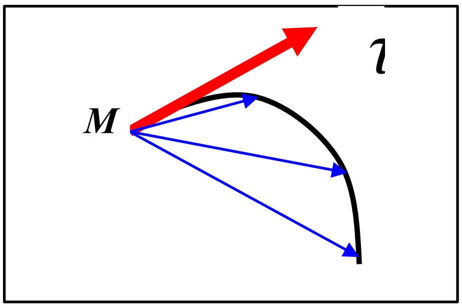
$$\lim_{|\Delta r|\to 0}\frac{|\Delta r|}{\Delta S}=1$$

В случае криволинейной траектории элементарным перемещением dr и приращением пути dS называются такие, для которых с заданной наперёд точностью выполняется

$$\frac{|dr|}{dS}=1 \Rightarrow |d\vec{r}|=dS$$

Очевидно, что

$$\lim_{|\Delta r|\to 0}\frac{\Delta \vec{r}}{|\Delta r|}=\vec{\tau},$$



т.е. $$\frac{d\vec{r}}{|dr|}=\vec{\tau} \Rightarrow d\vec{r}=|d\vec{r}|\cdot\vec{\tau}=dS\cdot\vec{\tau}.$$

3. Скорость и ускорение движения

Средней скоростью движения называется отношение перемещения к промежутку времени, в течение которого произошло перемещение:

$$\langle \vec{\upsilon} \rangle = \frac{\Delta r}{\Delta t}.$$

Средней путевой скоростью называется отношение приращения пути к промежутку времени, в течение которого было пройдено это приращение:

$$\langle \upsilon_S \rangle = \frac{\Delta S}{\Delta t}.$$

Т.к. $|\Delta r| \le \Delta S$, то $|\langle \upsilon \rangle| \le \langle \upsilon_S \rangle$.

Мгновенной скоростью движения называется предел средней скорости при стремлении промежутка времени к 0:

$$\vec{\upsilon} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta r}{\Delta t}.$$

Мгновенной путевой скоростью называется предел средней путевой скорости при стремлении промежутка времени к 0:

$$\upsilon_S = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t}.$$

Элементарным промежутком времени *dt* называется промежуток времени, для которого с заданной наперёд точностью и средняя, и средняя путевая скорость совпадают с соответствующими мгновенными скоростями.

Элементарным перемещением dr <u>в произвольном случае</u> назовём перемещение, произошедшее за элементарный промежуток времени *dt*. Элементарным приращением пути *dS* <u>в произвольном случае</u> назовём приращение, пройденное за элементарный промежуток времени dt.

Пользуясь языком высшей математики, мы можем сказать, что мгновенная скорость движения или просто скорость движения является первой производной радиус-вектора по времени, а путевая скорость является первой производной по времени путевой координаты.

$$\vec{\upsilon} = \frac{dr}{dt} = \dot{\vec{r}}\ ; \qquad \upsilon_S = \frac{dS}{dt} = \dot{S}\ .$$

Для того чтобы элементарное перемещение в произвольном случае совпадало с элементарным перемещением для криволинейной траектории нужно, чтобы точности вычисления соотношений

$$\frac{|dr|}{dS} = 1\ ; \qquad \frac{|\langle \upsilon \rangle|}{\upsilon} = 1 \quad \text{и} \quad \frac{\langle \upsilon_S \rangle}{\upsilon_S} = 1$$

совпадали. Об этом всегда можно условиться. Поэтому мы всегда будем считать, что для элементарного промежутка времени $|dr| = dS$, следовательно, $dr = dS \cdot \tau$, т.е.

$$\vec{\upsilon} = \frac{1}{dt} \cdot dS \cdot \vec{\tau} = \frac{dS}{dt} \cdot \vec{\tau} = \upsilon_S \cdot \vec{\tau}\ .$$

Итак,

$$\upsilon = \upsilon_S \cdot \tau \quad .$$

Т.е. модуль скорости движения совпадает с путевой скоростью. Конечное приращение пути по определению

$$\Delta S = \int_t^{t+\Delta t} \frac{dS}{dt} dt = \int_t^{t+\Delta t} \upsilon_S dt = \int_t^{t+\Delta t} \upsilon dt$$

$$\Delta S = \int_t^{t+\Delta t} \upsilon(t) dt \quad .$$

По определению ускорением материальной точки называется первая производная по времени скорости движения, т.е. вторая производная по времени радиус-вектора:

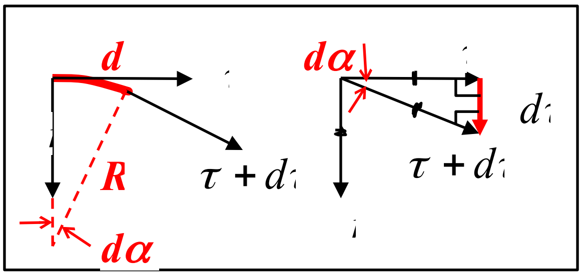
$$a = \dot{\upsilon} = \ddot{r} \quad .$$

Итак,

$$\vec{a} = \frac{d\upsilon}{dt} = \frac{d}{dt}(\upsilon \cdot \vec{\tau}) = \frac{d\upsilon}{dt} \cdot \vec{\tau} + \upsilon \cdot \frac{d\tau}{dt}$$

Первое слагаемое связано только со скоростью изменения величины скорости движения. Т.к. эта часть полного ускорения направлена по касательной, то она называется *касательным* ускорением a_τ .

Второе слагаемое связано только с изменением направления скорости движения. Изобразим два положения материальной точки на траектории, разделённые элементарным приращением пути *dS*, и соответствующие орты касательной τ и $\tau + d\tau$. Соединим положения с центром кривизны траектории в точке *dS*.



Малый угол $d\alpha$ между радиусами совпадает с углом между ортами касательной как острые углы с взаимно перпендикулярными сторонами. Из второго рисунка видно, что $d\tau$ направлен перпендикулярно τ, т.е. по орту нормали, а его величина

$$|d\tau| = |\tau| \cdot d\alpha = d\alpha ,$$

следовательно,

$$d\tau = d\alpha \cdot n .$$

Угол $d\alpha$ связан с элементарным приращением пути $dS = R \cdot d\alpha$, где R – радиус кривизны траектории. Отсюда $d\alpha = \dfrac{dS}{R}$. Подставим:

$$d\vec{\tau} = \frac{dS}{R} \cdot \vec{n} \Rightarrow \frac{d\tau}{dt} = \frac{1}{R} \cdot \frac{dS}{dt} \cdot \vec{n} = \frac{\upsilon}{R} \cdot \vec{n} .$$

Тогда вторая часть полного ускорения имеет вид:

$$\vec{a}_n = \frac{\upsilon^2}{R} \cdot \vec{n}$$
.

Т.к. эта часть ускорения направлена по нормали, то она называется *нормальным* ускорением.

Сведём все формулы вместе:

$$a = a_\tau + a_n$$

$$\vec{a}_\tau = \frac{d\upsilon}{dt} \cdot \vec{\tau}; \qquad \vec{a}_n = \frac{\upsilon^2}{R} \cdot \vec{n}$$

4. Относительность скорости движения

Мы уже пользовались понятием системы отсчёта, хотя делать этого не имели права. Из всех атрибутов системы отсчёта был введён только один: начало отсчёта. Другой атрибут – часы, находящиеся в начале отсчёта. Пусть двое часов находились в одной системе отсчёта, а потом «разошлись» по разным. Находясь в одном месте, они были синхронизованы. Как повлияет на их показания относительная скорость? Ответ на это опять зависит от выбора системы постулатов. В механике Ньютона-Галилея «работает» второй постулат Галилея: об абсолютности промежутков времени. Согласно этому постулату, если часы были синхронизованы, то их относительная скорость не влияет на их показания. Вспомним обратное преобразование Галилея для радиус-векторов: $r = r' + r_0$. Возьмём элементарные изменения (дифференциалы) от обеих частей этого равенства.

$$dr = d(r' + r_0) \Rightarrow dr = dr' + dr_0$$
.

Поделим это равенство на элементарный промежуток времени по часам «основного» наблюдателя, в течение которого произошли элементарные перемещения, равенство останется верным:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr'}{dt} + \frac{dr_0}{dt}.$$

В соответствие со вторым постулатом Галилея $dt=dt'$, где dt' – промежуток времени по часам «второстепенного» наблюдателя, в течение которого материальная точка переместилась относительно него на dr'. Значит, можно записать:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr'}{dt'} + \frac{dr_0}{dt}.$$

Это обратное преобразование скорости по Галилею:

$$\upsilon = \upsilon' + \upsilon_0.$$

Прямое преобразование скорости:

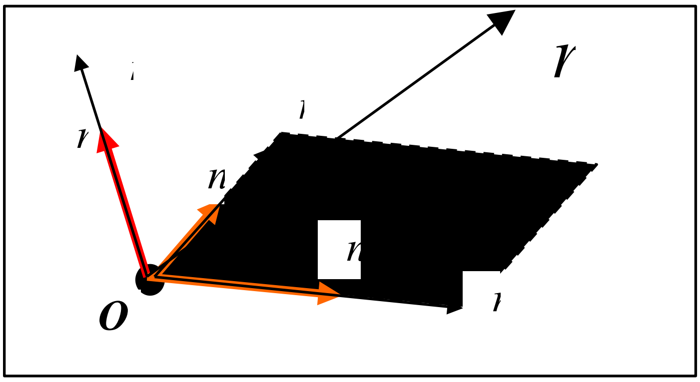
$$\upsilon' = \upsilon - \upsilon_0$$

5. Система координат

Для количественного описания движения в пространстве необходимо введение координат точки, т.е. совокупности чисел, однозначно определяющей положение материальной точки относительно начала отсчёта. Это возможно только в случае введения третьего атрибута системы отсчёта:

системы координат. Теперь можно дать определение системы отсчёта: системой отсчёта называется система координат, в начале которой находится тело отсчёта, снабжённое часами.

В одномерном пространстве для задания «адреса» материальной точки достаточно одного числа, в двумерном пространстве – двух чисел, в трёхмерном – трёх чисел. Способов введения адресации – не один. Например, на плоскости можно задать полярную систему координат (угол, длина радиус-вектора), в пространстве сферическую (длина радиус-вектора, азимутальный угол и угол горизонта). Мы остановимся на подробном рассмотрении системы координат, связанной с разложением радиус-вектора.



Известно, что любой вектор может быть представлен как сумма трёх векторов, направленных по трём наперёд заданным направлениям, *не лежащим в одной плоскости*.

$$r = r_1 + r_2 + r_3 = r_1 \cdot n_1 + r_2 \cdot n_2 + r_3 \cdot n_2 \,.$$

Здесь $\{n_i\}$ – совокупность ортов, задающих направления. Она называется базисом системы отсчёта. $\{r_i\}$ – совокупность координат радиус-вектора в этом базисе. Т.к. вектор по трём избранным направлениям раскладывается однозначно, то однозначно и определение координат точки пространства.

Рассмотрим операцию скалярного умножения двух векторов a и b (например, радиус-векторов точек пространства *A* и *B*):

$$(a,b)=(a_1n_1+a_2n_2+a_3n_3)\cdot(b_1n_1+b_2n_2+b_3n_3)=$$

$$=\begin{pmatrix} a_1b_1(\vec{n}_1,\vec{n}_1)+ & a_1b_2(\vec{n}_1,\vec{n}_2)+ & a_1b_3(\vec{n}_1,\vec{n}_3)+ \\ a_2b_1(\vec{n}_1,\vec{n}_2)+ & a_2b_2(\vec{n}_2,\vec{n}_2)+ & a_2b_3(\vec{n}_1,\vec{n}_3)+ \\ a_3b_1(n_3,n_1)+ & a_3b_2(n_3,n_2)+ & a_3b_3(n_3,n_3) \end{pmatrix}.$$

Всего девять слагаемых. Т.к. $(n_1,n_1)=(n_2,n_2)=(n_3,n_3)=1$, то сумма диагональных элементов совсем проста: $a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$. Все остальные (перекрёстные члены) кроме произведения координат содержат множители типа

$$(n_i,n_j)=\cos\angle n_i,n_j \quad i\neq j$$.

Выражение скалярного произведения (a,b) можно существенно упростить, если выбрать углы $\angle\vec{n}_i,\vec{n}_j=\frac{\pi}{2}$. В этом случае говорят, что базис системы координат ортогональный. Только в ортогональном базисе

$$(a,b)=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3,$$

т.к. $\cos\angle\vec{n}_i,\vec{n}_j=\cos\frac{\pi}{2}=0$ и все перекрёстные члены равны 0. Именно в силу простоты записи скалярного произведения ортогональный базис является предпочтительным.

Впервые ортогональную систему координат (СК) ввёл Р. Декарт, и она называется декартовой. Только в декартовой СК

- координаты вектора являются его проекциями на соответствующую ось:

$$a_i = (a, n_i)\;;$$

докажем это для первой координаты:

$$(a, n_1) = (a_1 n_1 + a_2 n_2 + a_3 n_3) \cdot n_1 = a_1 (n_1, n_1) + a_2 (n_1, n_2) + a_3 (n_1, n_3) = \\ = a_1 (n_1, n_1) = a_1;$$

- координаты вектора связаны с его модулем соотношением Пифагора:

$$a^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2\;,$$

т.к. $a^2 = (a, a) = a_1 \cdot a_1 + a_2 \cdot a_2 + a_3 \cdot a_3$ в соответствие с выражением скалярного произведения в декартовой системе.

Существуют традиционные обозначения декартовой СК.

Ось	Обозначение координаты	Обозначение орта
1	$r_1 = x$	$n_1 = i$
2	$r_2 = y$	$n_2 = j$
3	$r_3 = z$	$n_3 = k$

Таким образом, разложение радиус-вектора в декартовой СК будет иметь вид:

$$r = xi + yj + zk \quad .$$

Векторную функцию движения $r(t)$ можно заменить тремя скалярными зависимостями, которые называются законами движения: x(t), y(t), z(t). Законы движения содержат всю информацию о движении. Т.е. если известны законы движения, то можно ответить на любой вопрос, касающийся движения материальной точки.

- Скорость.

$$\vec{\upsilon} = \frac{dr}{dt} = \frac{d}{dt}\left(x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}\right) = \frac{d}{dt}\left(x \cdot \vec{i}\right) + \frac{d}{dt}\left(y \cdot \vec{j}\right) + \frac{d}{dt}\left(z \cdot \vec{k}\right) =$$
$$\vec{i} \cdot \frac{dx}{dt} + \vec{j} \cdot \frac{dy}{dt} + \vec{k} \cdot \frac{dz}{dt} = \upsilon_x \vec{i} + \upsilon_y \vec{j} + \upsilon_z \vec{k}.$$

Таким образом, проекции вектора скорости равны производным соответствующих законов движения.

- Ускорение.

$$\frac{d\upsilon}{dt} = \frac{d\upsilon_x}{dt} \cdot \vec{i} + \frac{d\upsilon_y}{dt} \cdot \vec{j} + \frac{d\upsilon_z}{dt} \cdot \vec{k} =$$
$$= \frac{d^2 x}{dt^2} \cdot \vec{i} + \frac{d^2 y}{dt^2} \cdot \vec{j} + \frac{d^2 z}{dt^2} \cdot \vec{k} = a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j} + a_z \cdot \vec{k} \quad .$$

Таким образом, проекции вектора ускорения равны вторым производным законов движения.

А как найти касательное и нормальное ускорения? Они являются результатом разложения вектора полного ускорения по направлениям касательной и нормали:

$$a = a_\tau + a_n = a_\tau \tau + a_n n \quad .$$

Касательный орт и орт нормали являются осями двумерного ортогонального базиса. Т.е. алгебраическое значение касательного ускорения представляет собой проекцию полного ускорения на орт τ :

$$a_\tau = (a, \tau) .$$

Но касательный орт можно выразить через вектор скорости:

$$\vec{\upsilon} = \upsilon \cdot \vec{\tau} \Rightarrow \vec{\tau} = \frac{\upsilon}{\upsilon} .$$

Следовательно,

$$a_\tau = \left(\vec{a}, \frac{\upsilon}{\upsilon} \right) = \frac{1}{\upsilon} (\vec{a}, \vec{\upsilon}) = \frac{(a_x \upsilon_x + a_y \upsilon_y + a_z \upsilon_z)}{\sqrt{\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2 + \upsilon_z^2}} .$$

Тогда легко получить:

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2} .$$

А найдя нормальное ускорение, легко найти радиус кривизны:

$$a_n = \frac{\upsilon^2}{R} \Rightarrow R = \frac{\upsilon^2}{a_n}$$

Заключение

Подведем некоторые итоги. Материальная точка представляет собой ключевую физическую модель. На примере этой модели рассматриваются очень многие физические явления. Описав движение материальной точки, можно затем перейти и к описанию движения твердого тела, но не наоборот.

Основными понятиями кинематики материальной точки являются понятия положения точки, ее скорости и ускорения. Но все эти понятия не имеют смысла вне системы отсчета, включающей в себя систему координат и часы.

Важнейшую роль в кинематике материальной точки играют векторная алгебра и принцип относительности движения.

Сложное движение материальной точки всегда можно разложить на составляющие, причем не однозначно: по координатам, на касательное и нормальное движение, прямолинейное и вращательное.

Литература

1. Мякишев Г.Я. Физика – 10. Механика. – М.: Дрофа. 2002.
2. Мякишев Г.Я., Синяков А.З. Физика – 10. Молекулярная физика. Термодинамика. – М.: Дрофа. 2002.
3. Мякишев Г.Я., Синяков А.З., Слободков Б.А. Физика – 10–11. Электродинамика. – М.: Дрофа. 2002.
4. Мякишев Г.Я., Синяков А.З. Физик – 11. Колебания и волны. – М.: Дрофа. 2002.
5. Демков В.П., Третьякова О.Н. В помощь поступающим в ВУЗы. Физика. Механика. – М.: Издательство МАИ, 1996.
6. Калашников Н.П., Смондырев М.А. Основы физики. Т.1. - М.: Дрофа, 2003
7. Калашников Н.П., Смондырев М.А. Основы физики. Упражнения и задачи. - М.: Дрофа, 2004.
8. Касаткина И.Л. Репетитор по физике. Т.1. - Ростов н/Д: Феникс, 2002.
9. Новодворская Е.М., Дмитриев Э.М. Сборник задач по физике с решениями для втузов. - М.: ООО Издательство «Мир и Образование», 2003.