Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Саратовский государственный технический университет
имени Гагарина Ю.А.»

Институт урбанистики, архитектуры и строительства Кафедра
«Строительные материалы, конструкции и технологии»

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА

по дисциплине «Нелинейные задачи строительной механики»
на тему:
«Расчет нелинейно деформируемой балки»

Выполнил:
студент гр. с1-СЗС-41
Харченко Никита
Олегович

№ 190232

(дата, подпись)

Проверил:
доктор технических
наук, профессор
Петров Владилен
Васильевич.

(дата, подпись)

Саратов 2022 г.

Задача №1

Для нелинейно деформируемой балки с индивидуально заданными схемами закрепления и загружения распределенной нагрузкой требуется:

1. Аппроксимировать экспериментальную зависимость $\sigma_i - \varepsilon_i$ кубической параболой, параметры которой следует определить из условия прохождения кривой $\sigma_i - \varepsilon_i$ через две заданные точки на участке упрочнения материала.
2. Для балки с заданными условиями закрепления и нагрузкой построить аппроксимирующую функцию прогиба статическим методом В.З. Власова.
3. Используя уравнение изгиба <u>нелинейно деформируемой балки</u> (НДБ) в полных функциях

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(J_c(W)\frac{d^2W}{dx^2}\right)=q(x), \quad J_c(W)=\int_{-h/2}^{h/2} E_c\, b\, z^2 dz$$

расчетать балку заданным методом.
4. Применяя аппроксимацию кривой деформирования в виде кубической параболы рассчитать балку методами:
- Бубнова-Галеркина в полных функциях и инкрементальным методом последовательных нагружений.
- Ритца-Тимошенко в полных функциях и инкрементальным методом последовательных нагружений.
- Итерационным методом переменных параметров упругости И.А. Биргера с использованием на каждой итерации алгоритма метода Бубнова-Галеркина.
- Итерационным методом упругих решений А.А. Ильюшина с использованием на каждой итерации алгоритма метода Бубнова-Галеркина.
- Итерационным методом Ньютона-Канторовича с использованием на каждой итерации алгоритма метода Бубнова-Галеркина.

5. Результаты расчета представить в виде эпюр прогибов и изгибающих моментов. При решении задачи инкрементальными методами построить кривую «нагрузка – амплитуда прогиба».
6. Сравнить результаты расчетов (максимальные прогибы и изгибающие моменты) при заданной нагрузке, полученные всеми методами.
7. В сечении балки с наибольшим по модулю изгибающим моментом $|M_{x\max}|$ построить эпюру нормальных напряжений σ_x по высоте сечения.
8. В конце работы провести анализ полученных результатов и сформулировать развернутые выводы.

Исходные данные

Параметры нелинейно деформируемой балки:

Длина $L = 24\ (м)$

Прямоугольным поперечным сечением с высотой $h = 0,3\ (м)$ и шириной $b = 0,15 (м)$

Левая опора балки — Шарнир

Правая опора балки — Заделка

Нагрузка —

Метод расчета для п.3 — Ритца-Тимошенко

Диаграмма № 3

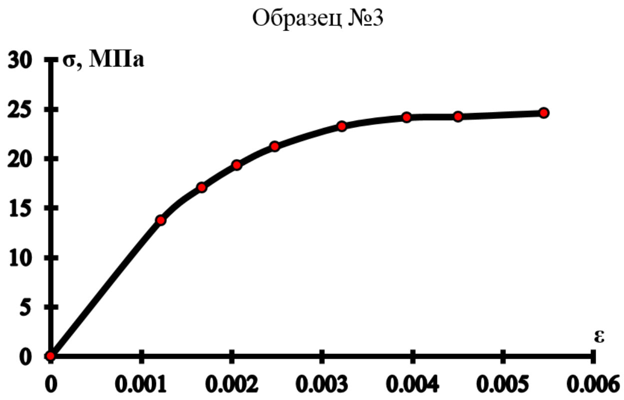


Рисунок 4 – *Диаграмма деформирования образца №3*

Образец №3	
ε	Σ
0	0
0.001217	13.75250
0.001671	17.08208
0.002061	19.31700
0.00248	21.16041
0.003224	23.23974
0.003935	24.10748
0.004507	24.21108
0.005454	24.57353

1. Аппроксимировать экспериментальную зависимость $\sigma_i - \varepsilon_i$ кубической параболой, параметры которой следует определить из условия прохождения кривой $\sigma_i - \varepsilon_i$ через две заданные точки на участке упрочнения материала.

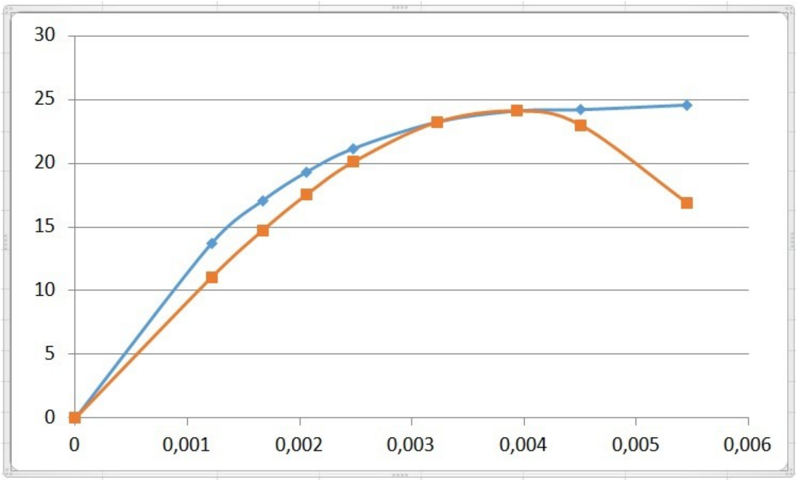
Если экспериментальную диаграмму деформирования аппроксимируем **кубической параболой** $\sigma_i(\varepsilon_i) = E\varepsilon_i - m\varepsilon_i^3$, то условия прохождения ее через точки 9 – 11 будет иметь вид

$$\begin{cases} ¿\sigma_6 = E\,\varepsilon_6 - m\,\varepsilon_6^3 \Rightarrow E, m \\ ¿\sigma_7 = E\,\varepsilon_7 - m\,\varepsilon_7^3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} ¿23.23974 = E \cdot 0.003224 - m \cdot 0.003224^3 \\ 24.10748 = E \cdot 0.003935 - m \cdot 0.003935^3 \end{cases}$$

E=9418

m=$2.126 \cdot 10^8$



Синяя — Исходная диаграмма деформирования

Красная — Аппроксимация диаграммы в виде кубической параболы

2. Для балки с заданными условиями закрепления и нагрузкой построить аппроксимирующую функцию прогиба статическим методом В.З. Власова.

1) Определяем граничные условия:

На защемленных краях пластины должны быть равны нулю прогиб и углы наклона касательной к изогнутой срединной поверхности:

- Жестко защемленный край: $u = 0\,;\, \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} = 0 : \xi = 0$
- Жестко защемленный край: $u = 0\,;\, \frac{\partial u}{\partial \xi} = 0 : \xi = 1$

В первом приближении методом Власова прогиб пластинки будем искать в виде $u(\xi) = K\varphi(\xi)$,

Для решения используем частный вид уравнения Софи Жермен:

$$\frac{\partial^4 u}{\partial \xi^4} = p_0 \cdot p(\xi) = p_0 \cdot (5 + \xi)$$

Постепенно интегрируем обе части уравнения:

$$\frac{\partial^3 u}{\partial \xi^3} = -p_0 \frac{\xi^2}{2} + 5 p_0 \xi + C_1$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} = \frac{-p_0 \xi^3}{6} + p_0 \cdot \xi^2 + C_1 \xi + C_2$$

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = \frac{-p_0 \cdot \xi^4}{24} + p_0 \frac{\xi^3}{3} + \frac{C_1 \xi^2}{2} + C_2 \xi + C_3$$

$$\bar{u}_1 = \frac{5 p_0 \cdot \xi^4}{120} + \frac{p_0 \cdot \xi^4}{12} + \frac{C_1 \cdot \xi^3}{6} + \frac{C_2 \cdot \xi^2}{2} + C_3 \xi + C_4$$

Подставляем граничные условия и определяем неизвестные константы:

$\bar{u}_1(0) = C_4 = 0;\ \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} = C_2 = 0 C_1 = -p_0 \frac{13}{20};\ C_2 = p_0 \frac{1}{30}$

$$\bar{u}_1(\xi) = p_0 \frac{\xi^4}{12} - p_0 \frac{1}{120} \xi^5 - p_0 \frac{13}{120} \xi^3 + p_0 \frac{1}{30} \xi^2$$

Выделяем главную часть решения, принимая $\frac{p_0}{120} = 1$:

$$\bar{u}_2(\xi) = 6\xi^5 + 50\xi^4 - 87\xi^3 + 31\xi$$

Выполняем проверку формулы прогиба балки, подставляя граничные условия:

$\bar{u}_2(0) = 6 \cdot 0^5 + 1 \cdot 0^4 - 87 \cdot 0^3 + 31 \cdot 0 = 0$

$\bar{u}_2(1) = 6 \cdot 1^5 + 50 \cdot 1^4 - 87 \cdot 1^3 + 31 \cdot 1 = 0$

Проверка выполнена.

Рассчитаем балку методом Ритца-Тимошенко.

Выражение полной потенциальной энергии деформирования в безразмерной форме имеет вид:

$$V_\xi = \frac{\beta^3}{24} \int_0^1 \left(\frac{d^2 u}{d \xi^2} \right)^2 d\xi - \frac{\gamma \beta^7}{240} \int_0^1 \left(\frac{d^2 u}{d \xi^2} \right)^4 d\xi = 1.994 \cdot 10^{-5}$$

Работа внешних распределенных и сосредоточенных нагрузок в безразмерной форме подсчитывается по формуле:

$A_\xi = \frac{\beta^3}{12} \left(\int_0^1 p(\xi) u(\xi) d\xi \right) = 6.65 \cdot 10^{-7}$ Выражение полной энергии деформируемой системы:

$$Э_\xi(u) = V_\xi - A_\xi$$

В первом приближении прогиб ищем в виде:

$$u(\xi) = K\varphi(\xi)$$

В этом случае выражение полной энергии принимает вид

$$Э_\xi(K) = f_1 K^2 - f_2 K^4 - QK,$$

коэффициенты которого определяются по формулам

$$f_1=\frac{\beta^3}{24}\int_0^1\left[\varphi''(\xi)\right]^2 d\xi=1.995\cdot10^{-5}$$

$$f_2=\frac{\gamma\beta^7}{240}\int_0^1\left[\varphi''(\xi)\right]^4 d\xi=9.663\cdot10^{-9}$$

$$Q=\frac{\beta^3\cdot250}{12}\left(\int_0^1 p(\xi)\varphi(\xi)d\xi\right)=1.662\cdot10^{-4}$$

На основании теоремы Лагранжа имеем кубическое уравнение:

$$\frac{dЭ_{\xi}(K)}{dK}=2f_1K-4f_2K^3-Q=0,$$

Решая которое найдем действительный корень $K_{РТ(куб.параб.)}=4.241$
Прогиб в 1 приближении будет иметь вид:
$u(\xi)=K\varphi(\xi)=4.241\cdot(6\xi^5+50\xi^4-87\xi^3+31\xi)$
Максимальные значения прогиба и изгибающего момента:

$$u_{max}(0.5)=4.638$$

$$M_{max}(1)=152.659$$

Метод Бубнова-Галеркина в полных функциях

Для расчета балки методом Бубнова-Галеркина необходимо решить обыкновенное нелинейное дифференциальное уравнение при соответствующих граничных условиях. Приближенный прогиб балки ищем в виде ряда с конечным числом членов. Аппроксимирующая функция должна быть линейно независимая, и, в отличие от метода РТ, должна удовлетворять заданным граничным условиям, как геометрическим, так и статическим.

В первом приближении обобщенная координата K определяется как действительный корень уравнения:

$$f_1K-f_2K^3-Q=0,$$

коэффициенты которого определяются по формулам:

$$f_1=\frac{\beta^3}{12}\int_0^1\left(\varphi''(\xi)\right)^2 d\xi=1.776\cdot10^{-5}$$

$$f_2=\frac{3\gamma\beta^7}{240}\int_0^1\left(\varphi''(\xi)\right)^4 d\xi=2.755\cdot10^{-7}$$

$$Q=\frac{\beta^3}{12}\left(\int_0^1 p(\xi)\varphi(\xi)d\xi\right)=3.843\cdot10^{-8}$$

Решая которое найдем действительный корень $K_{РТ(куб.параб.)}=2.375$
Прогиб в 1 приближении будет иметь вид:
$u(\xi)=K\varphi(\xi)=2.375\cdot(6\xi^5+50\xi^4-87\xi^3+31\xi)$

Максимальные значения прогиба и изгибающего момента:

$$u_{max}(0.5)=2.215$$

$$M_{max}(1)=50.293$$

Инкрементальный метод последовательных нагружений Бубнова-Галеркина

Для расчета балки необходимо решить линейное обыкновенное дифференциальное уравнение с известными переменными коэффициентами при заданных граничных условиях. Приращение прогиба ищем в виде ряда с конечным числом членов.

Приращение обобщенной координаты ΔK_n на каждом этапе нагружения определяется по формуле: В первом приближении прогиб и приращение прогиба ищем в виде:

$$u(\xi)=K\varphi(\xi), \quad \Delta u(\xi)=\Delta K\varphi(\xi)$$

Приращение обобщенной координаты ΔK_n на каждом этапе нагружения определяется по формуле:

$$\Delta K_n=\frac{\Delta Q_n}{\left(f_1-K_{n-1}^2 f_2\right)}$$

коэффициенты которого определяются по формулам:

$$f_1=\frac{\beta^3}{12}\int_0^1\left[\varphi''(\xi)\right]^2 d\xi; \quad f_2=\frac{9\gamma\beta^7}{240}\int_0^1\left[\varphi''(\xi)\right]^4 d\xi; \quad \Delta Q=\frac{\beta^3}{12}\left(\int_0^1 \Delta p(\xi)\Delta u(\xi)d\xi\right)$$

$$f_1=\frac{\beta^3}{12}\int_0^1\left[\varphi''(\xi)\right]^2 d\xi=1.7764\cdot 10^{-5}$$

$$f_2=\frac{9\gamma\beta^7}{240}\int_0^1\left[\varphi''(\xi)\right]^4 d\xi=8.267\cdot 10^{-7}$$

$$Q=\frac{\beta^3\cdot 250}{12}\left(\int_0^1 p(\xi)\varphi(\xi)d\xi\right)=3.8489\cdot 10^{-5}$$

n=3;

$$\Delta K_1=\Delta Q/3 f_1=0.7222$$

$$\Delta K_2=\Delta Q/3(f_1¿-f_2\Delta K_1^2)=0.7402¿$$

$$K_2=\Delta K_1+\Delta K_2=1.462$$

$$\Delta K_3=\Delta Q/3(f_1¿-f_2\Delta K_2^2)=0.802¿$$

$$K_3=K_2+\Delta K_3=2.264$$

Решая линейное уравнение, найдем действительный корень:

$$K_{БГ(куб.парб.)}=2.264$$

$$u(\xi)=K\varphi(\xi)=2.264\cdot(6\xi^5+50\xi^4-87\xi^3+31\xi)$$

Максимальные значения прогиба и изгибающего момента:

$$u_{max}(0.5)=2.194$$
$$M_{max}(1)=49.818$$

Метод Ритца-Тимошенко в полных функциях

А) Выражение полной потенциальной энергии деформирования в безразмерной форме имеет вид:

$$V_\xi=\frac{\beta^3}{24}\int_0^1\left(\frac{d^2u}{d\xi^2}\right)^2 d\xi-\frac{\gamma\beta^7}{320}\int_0^1\left(\frac{d^2u}{d\xi^2}\right)^4 d\xi=8.709\cdot10^{-6}$$

Б) Работа внешних распределенных и сосредоточенных нагрузок в безразмерной форме подсчитывается по формуле:

$$A_\xi=\frac{\beta^3}{12}\left(\int_0^1 p(\xi)u(\xi)d\xi\right)=-1.473\cdot10^{-8}$$ В) Выражение полной энергии деформируемой системы:

$$Э_\xi(u)=V_\xi-A_\xi$$

В первом приближении прогиб ищем в виде:

$$u(\xi)=K\varphi(\xi)$$

В этом случае выражение полной энергии принимает вид

$$Э_\xi(K)=f_1K^2-f_2K^4-QK,$$

коэффициенты которого определяются по формулам

$$f_1=\frac{\beta^3}{24}\int_0^1\left[\varphi''(\xi)\right]^2 d\xi=8.82\cdot10^{-6}$$

$$f_2=\frac{\gamma\beta^7}{320}\int_0^1\left[\varphi''(\xi)\right]^4 d\xi=6.889\cdot10^{-8}$$

$$Q=\frac{\beta^3}{12}\left(\int_0^1 p(\xi)\varphi(\xi)d\xi\right)=3.849\cdot10^{-5}$$

На основании теоремы Лагранжа имеем кубическое уравнение:

$$\frac{dЭ_\xi(K)}{dK}=2f_1K-4f_2K^3-Q=0,$$

Решая которое найдем действительный корень $K_{PT(куб.параб.)}=2.374$

Прогиб в 1 приближении будет иметь вид:

$$u(\xi)=K\varphi(\xi)=2.374\cdot(6\xi^5+50\xi^4-87\xi^3+31\xi)$$

Максимальные значения прогиба и изгибающего момента:

$$u_{max}(0.5)=2.3$$

$$M_{max}(1)=52.234$$

Инкрементальный метод последовательных нагружений Ритца-Тимошенко

Для расчета балок методом Ритца-Тимошенко в инкрементальной форме необходимо получить выражение приращения удельной потенциальной энергии.

В первом приближении прогиб ищем в виде:

$$u(\xi)=K\varphi(\xi), \quad \Delta u(\xi)=\Delta K\varphi(\xi)$$

В этом случае выражение приращения полной энергии принимает вид

$$\Delta Э_{\xi}(\Delta K)=f_1(\Delta K)^2 - f_2K^2(\Delta K)^2 - \Delta Q(\Delta K),$$

коэффициенты которого определяются по формулам

$$f_1=\frac{\beta^3}{24}\int_0^1\left[\varphi''(\xi)\right]^2 d\xi=8.882\cdot10^{-6}$$

$$f_2=\frac{3\gamma\beta^7}{320}\int_0^1\left[\varphi''(\xi)\right]^4 d\xi=1.037\cdot10^{-6}$$

$$Q=\frac{\beta^3\cdot250}{12}\left(\int_0^1 p(\xi)\varphi(\xi)d\xi\right)=3.849\cdot10^{-4}$$

На основании теоремы Лагранжа имеем линейное уравнение:

$$\frac{d(\Delta Э_{\xi})}{d(\Delta K)}=2f_1(\Delta K)-2f_2K^2(\Delta K)-f_3=0\Rightarrow\Delta K=\frac{\Delta Q}{\left(2f_1-2f_2K^2\right)}\Rightarrow\Delta K_n=\frac{\Delta Q_n}{\left(2f_1-2f_2K_{n-1}{}^2\right)}$$

n=4; $\Delta Q=Q/n=-7.179\cdot10^{-7}$

$\Delta K_1=\Delta Q/2f_1=-0.04041$

$\Delta K_2=\Delta Q/(2f_1¿-2f_2\Delta K_1^2)=-0.04042¿$

$K_2=\Delta K_1+\Delta K_2=-0.0808$

$\Delta K_3=\Delta Q/(2f_1¿-2f_2\Delta K_2^2)=-0.04044¿$

$K_3=K_2+\Delta K_3=-0.1213$

$\Delta K_4=\Delta Q/(2f_1¿-2f_2\Delta K_3^2)=-0.04048¿$

$K_4=K_3+\Delta K_4=-0.1618$

Находим амплитуду прогиба соответствующую величине заданной нагрузки

$$K_{PT(куб.параб.)}=-0.1618$$

$$u(\xi)=K\varphi(\xi)=-0.1618\cdot(6\xi^5+50\xi^4-87\xi^3+31\xi)$$

Максимальные значения прогиба и изгибающего момента:

$$u_{max}(0.5)=2.215$$

$$M_{max}(1)=50.293$$

Метод ППУ И.А. Биргера с использованием на каждой итерации алгоритма метода Бубнова-Галеркина

В соответствии с методом нелинейных параметров упругости придаем искомому прогибу в дифференциальном уравнении индекс итерации n, а прогибу в коэффициенте этого уравнения индекс n-1. В результате получаем обыкновенное линейное дифференциальное уравнение с переменными коэффициентами.
В первом приближении прогиб ищем в виде:

$$u_n(\xi)=K_n\varphi(\xi),\quad u_{n-1}(\xi)=K_{n-1}\varphi(\xi)$$

Выражение для определения обобщенной координаты K_n имеет вид:

$$K_n=\frac{Q}{\left(f_1-K_{n-1}^2 f_2\right)},$$

коэффициенты которого определяются по формулам:

$$f_1=\frac{\beta^3}{12}\int_0^1[\varphi''(\xi)]^2d\xi;\quad f_2=\frac{3\gamma\beta^7}{240}\int_0^1[\varphi''(\xi)]^4d\xi;\quad Q=\frac{\beta^3}{12}\int_0^1 p(\xi)u(\xi)d\xi$$

$$f_1=\frac{\beta^3}{12}\int_0^1[\varphi''(\xi)]^2d\xi=1.177\cdot10^{-3}$$

$$f_2=\frac{3\gamma\beta^7}{240}\int_0^1[\varphi''(\xi)]^4d\xi=7,583\cdot10^{-3}$$

$$Q=\frac{\beta^3\cdot250}{12}\left(\int_0^1 p(\xi)\varphi(\xi)d\xi\right)=1.095\cdot10^{-3}$$

$K_1=Q/f_1=0.931$

$K_2=Q/(f_1¿-f_2K_1^2)=-0.203¿$

$K_3=Q/(f_1¿-f_2K_2^2)=1.268¿$

$K_4=Q/(f_1¿-f_2K_3^2)=-0.099¿$

Решая линейное уравнение, при определенном количестве итераций, найдем действительный корень:

$$K_{МППУ\,(куб.\,параб.)}=2.373$$

$$u(\xi)=K\varphi(\xi)=2.373\cdot(6\xi^5+50\xi^4-87\xi^3+31\xi)$$

Максимальные значения прогиба и изгибающего момента:

$$u_{max}(0.5)=2.298$$

$$M_{max}(1)=52.205$$

Метод УР А.А. Ильюшина с использованием на каждой итерации алгоритма метода Бубнова-Галеркина

Метод основан на возможности представления уравнения в виде линейной и нелинейной составляющих — метод начальных напряжений.
Алгоритм:

1) Для нелинейно-деформируемого материала балки выбираем подходящее аналитическое выражение диаграммы деформирования и определяем функцию пластичности $\omega(W)$ и параметр $J\omega$
2) Для заданной нагрузки методом интегрирования ищем решение упругой задачи W1
3) С учетом найденного прогиба, получаем фиктивную нагрузку
4) Решаем уравнение с фиктивной нагрузкой, находим прогиб W2
5) Определяем фиктивную нагрузку и определяем уточненное значение прогиба балки W3

В первом приближении прогиб ищем в виде:

$$u_n(\xi) = K_n\varphi(\xi), \quad u_{n-1}(\xi) = K_{n-1}\varphi(\xi)$$

Выражение для определения обобщенной координаты K_n имеет вид:

$$K_n = \frac{1}{f_1}\left(Q + K_{n-1}^3 f_2\right),$$

коэффициенты которого определяются по формулам:

$$f_1 = \frac{\beta^3}{12}\int_0^1 \left[\varphi''(\xi)\right]^2 d\xi = 1.776\cdot 10^{-5}$$

$$f_2 = \frac{3\gamma\beta^7}{240}\int_0^1 \left[\varphi''(\xi)\right]^4 d\xi = 6.915\cdot 10^{-7}$$

$$Q = \frac{\beta^3\cdot 250}{12}\left(\int_0^1 p(\xi)\varphi(\xi)\,d\xi\right) = 3.489\cdot 10^{-5}$$

$K_1 = Q/f_1 = 2.167$

$K_2 = (Q + f_2 K_1^3)/f_1 = 2.324$

$K_3 = (Q + f_2 K_2^3)/f_1 = 2.361$

$K_4 = (Q + f_2 K_3^3)/f_1 = 2.371$

Решая линейное уравнение найдем действительный корень:
$K_{МУР(куб.параб)} = ¿\ 2.371$
$u(\xi) = K\varphi(\xi) = 2.371\cdot(6\xi^5 + 50\xi^4 - 87\xi^3 + 31\xi)$
Максимальные значения прогиба и изгибающего момента:

$$u_{max}(0.5) = 2.297$$
$$M_{max}(1) = 52.161$$

Метод Ньютона-Канторовича

Сочетание 2 методов (итерационного метода НК и инкрементального метода БГ) позволяет получить рекуррентную формулу для уточнения приближенного решения нелинейной задачи.

В первом приближении прогиб ищем в виде:

$$u_n(\xi)=K_n\varphi(\xi)$$

Выражение для определения обобщенной координаты K_n имеет вид:

$$\Delta K_n=\frac{Q-f_1K_{n-1}+f_2K_{n-1}^3}{f_1-3f_2K_{n-1}^2},$$

коэффициенты которого определяются по формулам:

$$f_1=\frac{\beta^3}{12}\int_0^1\left[\varphi''(\xi)\right]^2 d\xi=1.776\cdot 10^{-5}$$

$$f_2=\frac{3\gamma\beta^7}{240}\int_0^1\left[\varphi''(\xi)\right]^4 d\xi=2.756\cdot 10^{-8}$$

$$Q=\frac{\beta^3\cdot 195}{12}\left(\int_0^1 p(\xi)\varphi(\xi)\,d\xi\right)=3.849\cdot 10^{-4}$$

$\Delta K_1=\Delta Q/f_1=2.1667$

$\Delta K_2=(Q-f_1\cdot\Delta K_1+f_2\cdot\Delta K_1^3)/(f_1¿-3f_2\Delta K_1^2)=0.202¿$

$K_2=\Delta K_1+\Delta K_2=2.369$

$\Delta K_3=(Q-f_1\cdot K_2+f_2\cdot K_2^3)/(f_1¿-3f_2K_2^2)=5.735\cdot 10^{-3}¿$

$K_3=\Delta K_3+K_2=2.374$

$\Delta K_4=(Q-f_1\cdot K_3+f_2\cdot K_3^3)/(f_1¿-3f_2K_3^2)=4.918\cdot 10^{-6}¿$

$$K_4=\Delta K_4+K_3=2.374$$

$$K_{НК(куб.\,параб.)}=2.374$$

$$u(\xi)=K\varphi(\xi)=2.374\cdot(6\xi^5+50\xi^4-87\xi^3+31\xi)$$

Максимальные значения прогиба и изгибающего момента:

$$u_{max}(0.4)=2.3$$

$$M_{max}(1)=52.234$$

5. Результаты расчета, полученные методом **Бубного-Галеркина** представим в виде эпюр прогибов и изгибающих моментов.

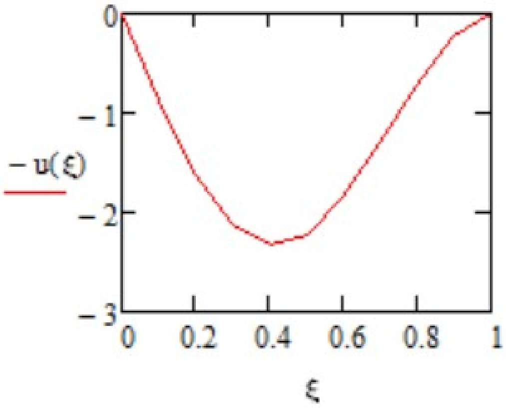
Прогиб в 1 приближении будет иметь вид:

$u(\xi)=K\varphi(\xi)=2.375\cdot(6\xi^5+50\xi^4-87\xi^3+31\xi)$

Построим эпюры прогиба и изгибающего момента.

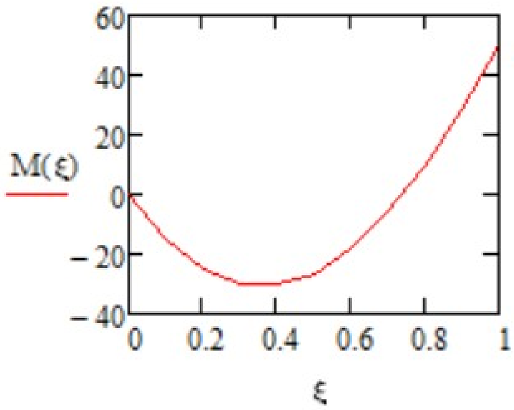
$u(\xi) =$

0
0.887
1.627
2.12
2.318
2.215
1.852
1.312
0.714
0.214
$1.332 \cdot 10^{-15}$



$M(\xi) =$

$-9.461 \cdot 10^{-14}$
-15.134
-25.055
-30.039
-30.359
-26.29
-18.106
-6.081
9.51
28.393
50.293



6. Сравним результаты расчетов (максимальные прогибы и изгибающие моменты) при заданной нагрузке), полученные всеми методами.

Метод расчета	$u(\xi)$	Отклонение в %	$M_{\xi}(\xi)$	Отклонение в %
Б-Г (в полных функциях)	2.215	-	50.293	-
Р-Т (в полных функциях)	2.3	3.83%	52.234	3.85%

Метод расчета	$u(\xi)$	Отклонение в %	$M_{\xi}(\xi)$	Отклонение в %
Б-Г (инкремент.)	2.264	-	49.818	-
Р-Т (инкремент.)	2.215	2.164%	50.293	0.95%

Метод расчета	$u(\xi)$	Отклонение в %	$M_{\xi}(\xi)$	Отклонение в %
МППУ И.А.Биргера	2.298	-	52.205	-
УР А.А.Ильюшина	2.297	0.044 %	52.161	0.087 %
Н-К	2.3	0.087 %	52.234	0.056 %

7. В сечении балки с наибольшим по модулю изгибающим моментом $\left|M_{x\max}\right|$ построим эпюру нормальных напряжений σ_x по высоте сечения.

$$\sigma(\varepsilon) = E\varepsilon - m\varepsilon^3 \Rightarrow \left[\varepsilon_x = -zW'' \Rightarrow \varepsilon_{\xi} = -\zeta\beta^2 \frac{d^2u}{d\xi^2}\right] \Rightarrow \sigma_{\xi}(\zeta) = \gamma\zeta^3 \left(\beta^2 \frac{d^2u}{d\xi^2}\right)^3 - \zeta\beta^2 \frac{d^2u}{d\xi^2}$$

$$u(\xi) = \frac{W(x)}{h}; \quad \xi = \frac{x}{l}; \quad \zeta = \frac{z}{h}\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right); \quad \beta = \frac{h}{l}; \quad u(\xi) = K\varphi(\xi); \quad \gamma = \frac{m}{E}; \quad \sigma_{\xi} = \frac{\sigma}{E};$$

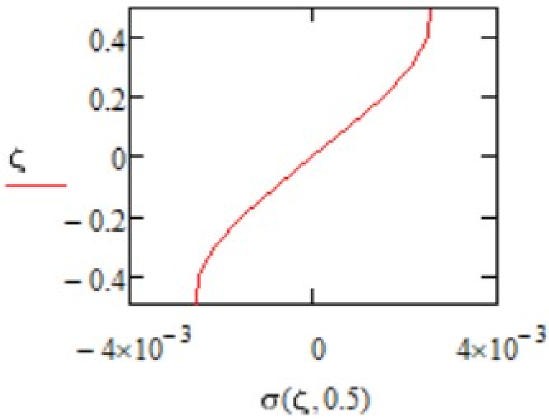
Результирующее выражение для построения эпюры $\sigma_{\xi}(\zeta)$ по высоте сечения:

$$\sigma_{\xi}(\zeta) = \gamma\zeta^3 \left(\beta^2 K\varphi''(\xi_{\max})\right)^3 - \zeta\beta^2 K\varphi''(\xi_{\max})$$

$\xi_{\max}$ координата в сечении балки с наибольшим по модулю изгибающим моментом $\left|M_{\xi\max}\right|$.

$\sigma(\zeta, 0.5) =$

$-2.55\cdot10^{-3}$
$-2.473\cdot10^{-3}$
$-2.107\cdot10^{-3}$
$-1.525\cdot10^{-3}$
$-7.986\cdot10^{-4}$
0
$7.986\cdot10^{-4}$
$1.525\cdot10^{-3}$
$2.107\cdot10^{-3}$
$2.473\cdot10^{-3}$
$2.55\cdot10^{-3}$



Вывод

В данной задаче рассматривался расчет нелинейно деформируемой балки различными методами, однако более точными методами являются: метод переменных параметров упругости И.А.Биргера, метод упругих решений И.А.Ильюшина и метод Ньютона-Канторовича, так как во всех этих методах, путем увеличения количества приближений можно достигнуть наиболее точного результата по сравнению с остальными методами;

Эпюры $u(\xi)$ во всех использованных методах совпадают характером распределения прогиба по всей длине балки.