ФИЗИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА

Оглавление

Пространственная решетка и ее свойства

7. *Элементарные ячейки и структура кристаллов*

Задача 1. Плотность кристалла NaC1 равна 2180 кг/м^3. Атомный вес натрия 23, хлора 35,46. Определить постоянную решетки.

Решение. Масса элементарной ячейки кристалла NaCl равна

$$M = a^3\rho$$

где a – постоянная решетки, ρ – плотность кристалла. Но, с другой стороны,

$$M = m_{\mathrm{H}}\,(N_{\mathrm{Na}}A_{\mathrm{Na}} + N_{\mathrm{Cl}}A_{\mathrm{Cl}})$$

где m_{H} – масса атома водорода ($1{,}66 \cdot 10^{-27}$ кг); N_{Na} – число атомов натрия в элементарной ячейке; N_{Cl} – число атомов хлора в элементарной ячейке; A_{Na} – атомный вес натрия; A_{Cl} –атомный вес хлора.

Приравнивая правые части двух выражений и учитывая, что на одну элементарную ячейку NaC1 приходится половина атома натрия и половина атома хлора, получаем

\

$$a = \sqrt[3]{\frac{m_{\mathrm{H}}}{2\rho}\left(A_{\mathrm{Na}} + A_{\mathrm{Cl}}\right)}$$

$$a = \sqrt[3]{\frac{1{,}66 \cdot 10^{-27}}{2 \cdot 2{,}18 \cdot 10^{3}}\left(23 + 35{,}46\right)} = 2{,}81 \cdot 10^{-10}\,м = 2{,}81\,\mathring{A}$$

Задача 2. Найти число атомов алюминия в единице объема. Плотность алюминия ρ =2700 кг/м^3.

Решение. В килограмм-молекуле алюминия содержится $6{,}02 \cdot 10^{26}$ атомов.

Одна килограмм-молекула занимает объем:

$$V_1 = A/\rho$$

где А – атомный вес, ρ – плотность . Тогда число атомов в единице объема:

$$n = N/V_1 = N\rho/A$$

$$n = 6{,}02\cdot10^{26}\cdot2{,}7\cdot10^3/27 = 6{,}02\cdot10^{28}\ \text{м}^{-3}$$

Задача 4 (6). Определить объемы элементарной ячейки через радиусы равновеликих шаров, образующих плотные упаковки для 1) объемно-центрированной, 2) гранецентрированной и 3) гексагональной решеток.
Решение. 1) Параметр элементарной ячейки через радиус шара выражается следующим образом (рис. 2):

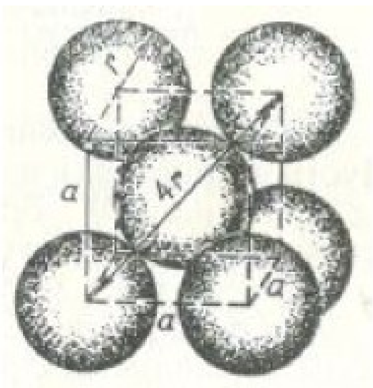


Рис. 2. Ячейка ОЦК

$$3a^2 = (4r)^2 \text{ или } a = \frac{4r}{\sqrt{3}}.$$

Тогда

$$V = a^3 = \frac{64r^3}{3\sqrt{3}}.$$

2) Параметр элементарной ячейки можно выразить через радиусы шаров, образующих плотнейшую упаковку (рис. 3*а*):

$$2a^2 = (4r)^2 \text{ или } a = 2\sqrt{2}r.$$

Тогда

$$V = a^3 = 8\sqrt{8}r^3 = 16\sqrt{2}r^3.$$

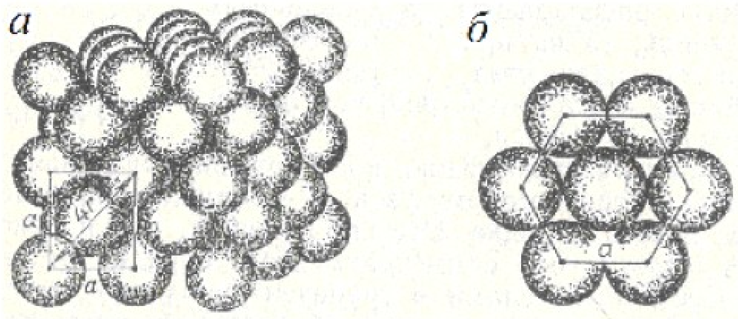


Рис. 3. Кристаллическая решетка: *а* – ГЦК, *б* – гексагональная.

3) Величина параметра решетки $a = 2r$. Тогда площадь основания элементарной ячейки (рис. 3*б*)

$$S = 6 \cdot \frac{a^2}{4} \cdot \sqrt{3} = 6r^2\sqrt{3}.$$

Так как $\frac{c}{a} = 2\sqrt{\frac{2}{3}}$, то $c = 4r\sqrt{\frac{2}{3}}$. Объем элементарной ячейки

$$V = 6r^2\sqrt{3} \cdot 4r\sqrt{\frac{2}{3}} = 24\sqrt{2}r^3.$$

Задача 5 (7). Чему равно число атомов в элементарной ячейке в случае 1) простой, 2) объемноцентрированной и 3) гранецентрированной кубических решеток?

Решение. 1) В простой кубической решетке атомы находятся только в вершинах углов ячейки. Одна вершина принадлежит восьми параллелепипедам кристаллической решетки. Поэтому на каждую вершину одной ячейки приходится одна восьмая часть атома, находящегося в вершине (рис. 4*а*).

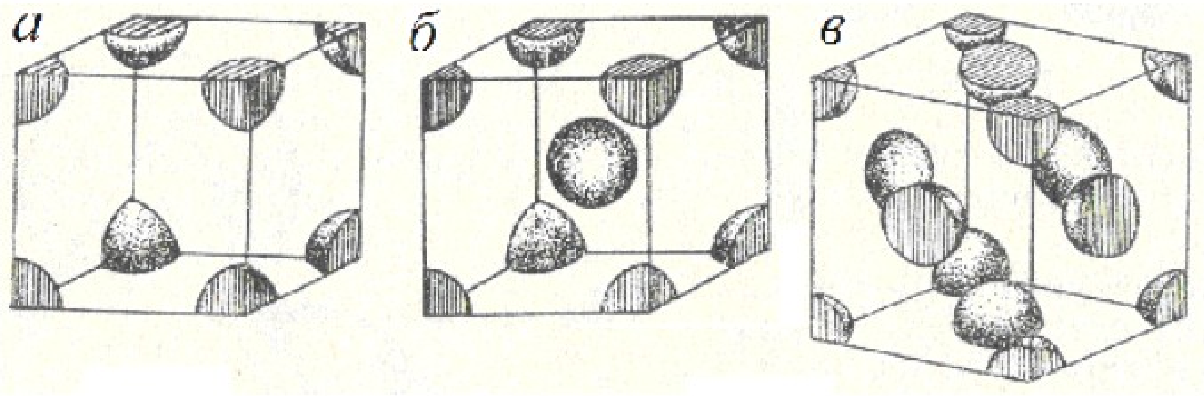


Рис. 4. Атомы в кубических элементарных ячейках:

а – примитивной, *б* – ОЦК, *в* – ГЦК.

Ячейка имеет восемь углов, следовательно, на нее приходится один атом.
2) В объемноцентрированной кубической решетке, кроме атомов, расположенных в углах, элементарной ячейке принадлежит полностью внутренний центральный атом (рис. 4*б*). Таким образом, в объемноцентрированной решетке на каждую ячейку приходится два атома.
3) В гранецентрированной кубической решетке атомы, расположенные в центре граней, принадлежат двум ячейкам (рис. 4*в*). Поэтому число атомов в элементарной ячейке равно четырем.
Задача 6 (8). Чему равно число атомов в элементарной ячейке гексагональной плотноупакованной решетки?

Решение. На элементарную ячейку в гексагональной плотноупакованной решетке приходится шесть атомов. Три внутренних атома, которые расположены в центрах трех (из шести) тригональных призм (рис. 5), полностью принадлежат одной элементарной ячейке.

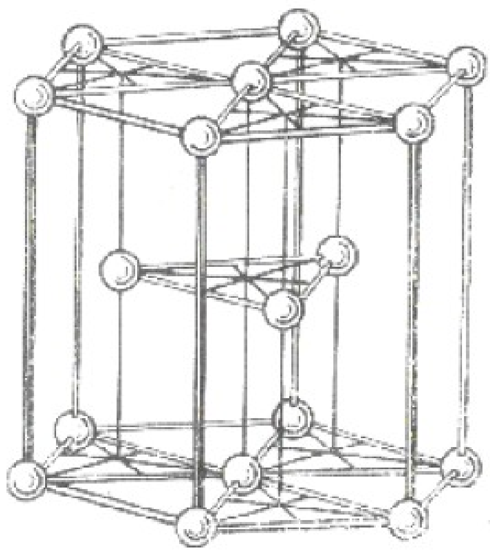


Рис. 5. Гексагональная ячейка

Два атома, расположенные в центрах базисных граней, принадлежат элементарной ячейке наполовину и в сумме дают один атом. Каждый атом, который находится в вершине гексагональной призмы, принадлежит шести элементарным ячейкам.
В целом все эти двенадцать атомов вносят вклад в одну элементарную ячейку на два атома. Итак, на элементарную ячейку гексагональной решетки приходится шесть атомов.

Задача 7 (9). Показать, что c/a для идеальной гексагональной структуры с плотной упаковкой равно $(8/3)^{0,5} = 1,633$.

Решение. Решетка с гексагональной плотной упаковкой возникает при расположении атомов в слоях по схеме ABA. В этой решетке три атома первого слоя и один атом второго слоя образуют четырехгранную пирамиду, высота которой равна $\frac{c}{2}$ (рис. 6)

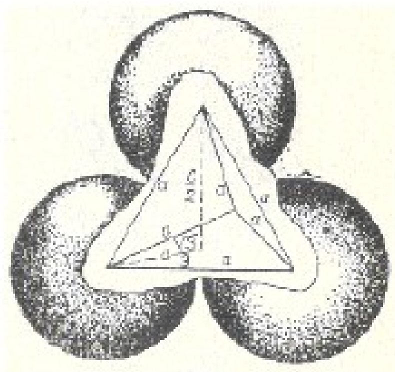


Рис. 6. Фрагмент гексагональной ячейки

Так как

$$\frac{c}{2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2} = a\sqrt{\frac{2}{3}},$$

а период решетки $a = 2r$, то

$$c = 4r\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Тогда

$$\frac{c}{a} = \frac{4r\sqrt{\frac{2}{3}}}{2r} = 2\sqrt{\frac{2}{3}} = 1,633.$$

Задача 8 (12). Пусть гранецентрированная кубическая и гексагональная решетки построены из одинаковых атомов, представляющих собой жесткие сферы с радиусом *r*. Показать, что часть объема, занятая атомами при таком расположении, равна $\frac{\pi\sqrt{2}}{6} = 0,74.$

Решение. Для гранецентрированной кубической решетки *N*=4, объем элементарной ячейки равен $16\sqrt{2}r^3$.

Тогда

$$k = \frac{4\cdot\frac{4}{3}\pi r^3}{16\sqrt{2}r^3} = \frac{\pi}{3\sqrt{2}} = 0,74.$$

Поскольку в элементарной ячейке гексагональной решетки содержится шесть атомов, то коэффициент заполнения пространства определяется выражением

$$k = \frac{6 \cdot \frac{4}{3}\pi r^3}{24\sqrt{2}r^3} = \frac{\pi}{3\sqrt{2}} = 0{,}74.$$

Таким образом, в гексагональной решетке, равно как и в гранецентрированной кубической, атомами заполнено всего лишь 74% пространства от общего объема решетки.

Из приведенных вычислений следует, что даже в решетках с самой плотной упаковкой атомов остаются незаполненными 26% пространства от общего объема решетки.

Задача 9 (22). Вычислить объем элементарной ячейки триаминхлорида четырехвалентной платины, если параметры ячейки и углы триклинности имеют следующие значения: a=11,13 Å, b=9,83 Å, c=8,17 Å, $\alpha = 94°9{,}5'$, $\beta = 95°40'$, $\gamma = 96°58'$.

Решение. Объем элементарной ячейки численно равен смешанному произведению векторов $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$:

$$V = \vec{a}\left[\vec{b}\vec{c}\right]$$

или

$$V = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix},$$

где a_x, a_y, a_z и т.д. – проекции трех векторов $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$ на три взаимно перпендикулярные координатные оси. Возведем правую и левую части (*) в квадрат:

$$V^2 = \begin{vmatrix} a_x^2 + & a_y^2 + & a_z^2 \\ b_x a_x + & b_y a_y + & b_z a_z \\ c_x a_x + & c_y a_y + & c_z a_z \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_x b_x + & a_y b_y + & a_z b_z \\ b_x^2 + & b_y^2 + & b_z^2 \\ c_x b_x + & c_y b_y + & c_z b_z \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_x c_x + & a_y c_y + & a_z c_z \\ b_x c_x + & b_y c_y + & b_z c_z \\ c_x^2 + & c_y^2 + & c_z^2 \end{vmatrix}.$$

Заменяя суммы в определителе скалярным произведением, можно записать:

$$V^2 = \begin{vmatrix} a^2 & (\vec{a}\vec{b}) & (\vec{a}\vec{c}) \\ (\vec{b}\vec{a}) & b^2 & (\vec{b}\vec{c}) \\ (\vec{c}\vec{a}) & (\vec{c}\vec{b}) & c^2 \end{vmatrix} = a^2 b^2 c^2 \begin{vmatrix} 1 & \cos\gamma & \cos\beta \\ \cos\gamma & 1 & \cos\alpha \\ \cos\beta & \cos\alpha & 1 \end{vmatrix}.$$

Раскрывая определитель, получим

$$V = abc\sqrt{1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta - \cos^2\gamma + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma};$$

$$V = 11{,}13 \cdot 9{,}83 \cdot 8{,}17\left(1 - \cos^2 94°9{,}5' - \cos^2 95°40' - \cos^2 96°58' + 2\cos 94°9{,}5' \cos 95°40' \cos 96°58'\right)^{\frac{1}{2}} = 881\ \text{Å}^3.$$

Задача 10 (23). Воспользовавшись формулой объема элементарной ячейки триклинной системы, получить формулы для объема ячеек 1) моноклинной, 2) гексагональной и 3) ромбоэдрической систем.

Решение. 1) В моноклинной системе $\alpha = \gamma = 90^\circ$. Тогда

$$V = abc\sqrt{1-\cos^2\beta} = abc\sin\beta.$$

2) В гексагональной системе $\alpha = \beta = 90^\circ, \gamma = 120^\circ$. В этом случае

$$V = abc\sqrt{1-\cos^2\gamma} = abc\sin\gamma,$$

$$V = a^2c\sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}a^2c.$$

3) В ромбоэдрической системе $a = b = c, \alpha = \beta = \gamma \neq 90^\circ$.

Тогда

$$V = a^3\sqrt{1-3\cos^2\alpha + 2\cos^3\alpha}.$$

1.2. Плоскости в кристалической решетке. Индексы Миллера.

Задача 20 (17). Определить отрезки, которые отсекает на осях решетки плоскость (125).

Решение. Записываем величины, обратные индексам плоскости: $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{5}$. Общий знаменатель 10. Так как

$$A:B:C=\frac{1}{1}:\frac{1}{2}:\frac{1}{5},$$

то А=10, В=5, С=2.

Задача 21 (18). Найти индексы плоскостей, проходящих через узловые точки кристаллической решетки с координатами 9 10 30, если параметры решетки $a=3$, b=5 и $c=6$.

Решение. Из теории кристаллической решетки следует, что

$$h:k:l=\frac{a}{A}:\frac{b}{B}:\frac{c}{C},$$

где h, k, l – индексы Миллера. Тогда

$$h:k:l=\frac{3}{9}:\frac{5}{10}:\frac{6}{30}=\frac{1}{3}:\frac{1}{2}:\frac{1}{5}=10:15:6.$$

Таким образом, искомые индексы нашей плоскости (10 15 6).

Задача 22 (19). Даны грани (320) и (110). Найти символ ребра их пересечения.

Решение. Как известно, если символы граней равны ($h_1k_1l_1$) и ($h_2k_2l_2$), то символы общего ребра выражаются следующим образом:

$$h:k:l=(k_1l_2-l_1k_2):(l_1h_2-l_2h_1):(h_1k_2-h_2k_1).$$

Решение получается также из схемы

$$\begin{array}{c|cccc|c} h_1 & k_1 & l_1 & h_1 & k_1 & l_1 \\ h_2 & k_2 & l_2 & h_2 & k_2 & l_2 \end{array}$$

Для нашего случая

$$\begin{array}{c|cccc|c} 3 & 2 & 0 & 3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

Отсюда h=0-0=0, k=0-0=0, l=3-2=1. Искомый символ ребра [001].

Задача 23 (31). В триклинной решетке кианита ($Al_2O_3 \cdot SiO_2$) параметры a, b, c и углы α, β, γ элементарной ячейки соответственно равны 7,09; 7,72; 5,56 Å; $90°55'$; $101°2'$; $105°44'$. Определить расстояние между плоскостями (102).

Решение. Межплоскостное расстояние между плоскостями с индексами (hkl) находят путем определения длины вектора $\vec{r}^{\,*}_{hkl}$ в обратном пространстве, соединяющего начало координат с точкой (hkl). При этом

$$d_{hkl}=\frac{1}{r^*_{hkl}}$$

Так как

$$\vec{r}^{\,*}_{hkl}=h\vec{a}^{\,*}+k\vec{b}^{\,*}+l\vec{c}^{\,*},$$

где $\vec{a}^{\,*}$, $\vec{b}^{\,*}$, $\vec{c}^{\,*}$ - единичные векторы обратной решетки, то (см. задачу 30) можно записать:

$$\left(\frac{1}{d_{hkl}}\right)^2=h^2a^{*2}+k^2b^{*2}+l^2c^{*2}+2hk(\vec{a}^{\,*}\vec{b}^{\,*})+2kl(\vec{b}^{\,*}\vec{c}^{\,*})+2lh(\vec{a}^{\,*}\vec{c}^{\,*}).$$

Векторы обратной решетки выражаются через векторы основной решетки следующим образом:

$$\vec{a}^{\,*}=\frac{[\vec{b}\vec{c}]}{V},\quad \vec{b}^{\,*}=\frac{[\vec{c}\vec{a}]}{V},\quad \vec{c}^{\,*}=\frac{[\vec{a}\vec{b}]}{V},$$

где V – объем элементарной ячейки, построенной на векторах $\vec{a},\vec{b}$ и $\vec{c}$. Тогда

$$\left(\frac{1}{d_{hkl}}\right)^2=\frac{h^2[\vec{b}\vec{c}]^2+k^2[\vec{c}\vec{a}]^2+l^2[\vec{a}\vec{b}]^2+2hk([\vec{b}\vec{c}][\vec{c}\vec{a}])+2kl([\vec{c}\vec{a}][\vec{a}\vec{b}])+2lh([\vec{a}\vec{b}][\vec{b}\vec{c}])}{V^2}.$$

$S_{13}=ab^2c(\cos\gamma\cos\alpha-\cos\beta)=7{,}09^2\cdot 7{,}72^2\cdot 5{,}56(\sin 15^\circ 44'\times\sin 0^\circ 55'+\sin 11^{\circ 2} 2')\approx 459{,}77\,\mathring{A}^4$.

Объем элементарной ячейки

$$V=abc\sqrt{1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta-\cos^2\gamma+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma};$$

$$V=7{,}09\cdot 7{,}72\cdot 5{,}56(1-\sin^2 0^\circ 55'-\sin^2 11^\circ 2'-\sin^2 15^\circ 44'-2\sin 0^\circ 55'\sin 11^\circ 2'\sin 15^\circ 44')^{\frac{1}{2}}\approx 270{,}24\,\mathring{A}^3$$

Тогда

$$d_{hkl}=\frac{270{,}24}{\sqrt{1841{,}63+2737{,}87\cdot 4+2\cdot 459{,}77\cdot 2}}\approx 2{,}23\,\mathring{A}$$

Задача 24 (32). Получить формулы для вычисления межплоскостных расстояний кристаллов 1) ромбической, 2) гексагональной, 3) тетрагональной и 4) кубической систем из формулы для межплоскостных расстояний кристаллов триклинной системы.

Решение. Для вычисления межплоскостных расстояний кристаллов различных систем воспользуемся формулой для триклиновой системы, полученной в предыдущей задаче.

1) В ромбической системе $a\neq b\neq c$, $\alpha=\beta=\gamma=90^\circ$. Тогда $S_{11}=b^2c^2$, $S_{22}=a^2c^2$, $S_{33}=a^2b^2$, $S_{12}=S_{23}=S_{13}=0$. Объем элементарной ячейки ромбической системы равен abc. Следовательно,

$$\left(\frac{1}{d_{hkl}}\right)^2=\frac{b^2c^2h^2+a^2c\ k^2+a^2b^2l^2}{a^2b^2c^2}$$

или

$$\left(\frac{1}{d_{hkl}}\right)^2=\left(\frac{h}{a}\right)^2+\left(\frac{k}{b}\right)^2+\left(\frac{l}{c}\right)^2.$$

2) В гексагональной системе $a=b\neq c$, $\alpha=\beta=90^\circ$, $\gamma=120^\circ$. Тогда $S_{11}=a^2c^2$, $S_{22}=a^2c^2$, $S_{33}=\frac{3}{4}a^4$, $S_{12}=\frac{a^2c^2}{2}$, $S_{23}=S_{13}=0$. Так как объем примитивной ячейки гексагональной решетки равен $\frac{\sqrt{3}}{2}a^2c$, то

$$\left(\frac{1}{d_{hkl}}\right)^2 = \frac{1}{\frac{3}{4}a^4c^2}\left(a^2c^2h^2 + a^2c^2k^2 + \frac{3}{4}a^4l^2 + 2\cdot\frac{1}{2}a^2c^2hk\right)$$

или

$$\left(\frac{1}{d_{hkl}}\right)^2 = \frac{4}{3}\left(\frac{h^2 + hk + k^2}{a^2}\right) + \frac{l^2}{c^2}.$$

3) Для тетрагональной системы межплоскостное расстояние можно найти из формулы для ромбической системы при условии $a=b$. Тогда

$$\left(\frac{1}{d_{hkl}}\right)^2 = \frac{h^2 + k^2}{a^2} + \frac{l^2}{c^2}.$$

4) В кубической системе $a=b=c$. Поэтому

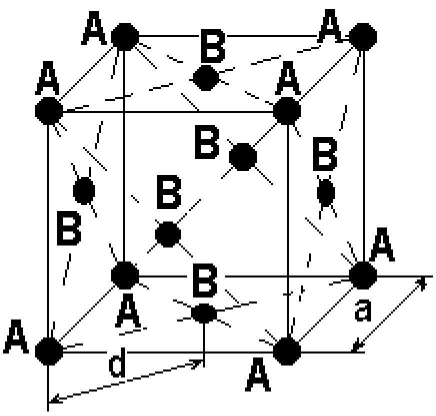
$$\left(\frac{1}{d_{hkl}}\right)^2 = \frac{h^2 + k^2 + l^2}{a^2}.$$

Из общей формулы можно получить также выражения для межплоскостных расстояний моноклинной и ромбоэдрической систем.

Механические свойства твёрдых тел

Задача 1

Оценить постоянную решетки a и расстояние ***d*** между ближайшими атомами для меди. Атомы меди образуют гранецентрированную кубическую решетку, плотность $\rho = 8.93 \cdot 10^3$ кг/м^3, молярная масса $\mu = 63.5 \cdot 10^{-3}$ кг/моль.



Анализ и решение

В гранецентрированной кубической (ГЦК) решетке, кроме узлов **A** (их вклад в ячейку $\frac{1}{8}\cdot 8 = 1$ атому, (см. задачу 16), имеются узлы в середине каждой грани (узлы **B**). Таких

узлов **B** в ячейке 6 (по числу граней). Каждый из них принадлежит двум смежным ячейкам, следовательно, его вклад в одну ячейку равен $\frac{1}{2}$, а вклад всех 6 узлов составляет $\frac{1}{2}\cdot 6 = 3$. Таким образом, в ГЦК- структуре на долю одной ячейки приходится $1 + 3 = 4$ атома.

Объём одной ячейки равен a^3, где a - ребро куба(и постоянная решетки). Тогда на долю одной частицы приходится $a^3/4$ объёма ячейки.

Масса одного атома меди $m_A = \dfrac{\mu}{N_A}$, где N_A - число Авогадро.

Плотность меди: $$\rho = \frac{m_A}{a^3/4} = \frac{\mu}{N_A \cdot a^3/4},$$

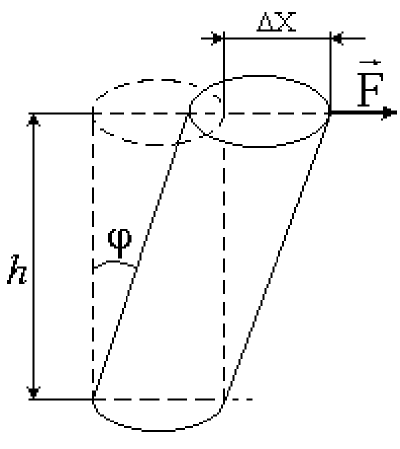
Отсюда: $$a = \sqrt[3]{\frac{4\mu}{\rho N_A}}, \quad \text{или} \quad a = \sqrt[3]{\frac{4 \cdot 63.5 \cdot 10^{-3}}{8.93 \cdot 10^3 \cdot 6.02 \cdot 10^{23}}} \approx 3.6 \cdot 10^{-10}\text{ м} = 3.6\text{ Å}$$

Наименьшим расстоянием ***d*** между атомами в ГЦК - структуре будет расстояние между атомами, один из которых находится в вершине, а другой в центре грани, поэтому

$$d = \frac{a\sqrt{2}}{2}, \quad \text{отсюда} \quad d = \frac{3.6 \cdot 10^{-10}\sqrt{2}}{2} \approx 2.5 \cdot 10^{-10}\text{ м} = 2.5\text{ Å}.$$

Задача 2

Сравните величину относительной деформации φ (угол сдвига) и смещения верхнего основания двух цилиндров одинаковых размеров, сделанных один из чугуна, а другой из свинца, если на верхнее основание каждого (вдоль него) действует одна и та же сила, а нижние основания закреплены. Какой из этих материалов вы бы предпочли для изготовления болтов?



Анализ и решение

При деформации сдвигом, все плоские слои твердого тела, параллельные некоторой плоскости, называемой плоскостью сдвига, не искривляясь и не изменяясь в размерах, смещаются параллельно друг другу. Сдвиг происходит под действием силы F, приложенной касательно к верхнему основанию цилиндра, параллельно плоскости сдвига. Мерой деформации является угол сдвига φ (относительный сдвиг), выраженный в радианах.

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\Delta x}{h}$$

Для малых углов $\operatorname{tg}\varphi \approx \varphi$, поэтому (1) $\Delta x = h \cdot \varphi$ определит смещение верхнего основания цилиндра (абсолютный сдвиг). При деформации произошло смещение частиц, находящихся в узлах кристаллической решетки твердого тела, из первоначальных положений равновесия в новые. Такому смещению будут препятствовать силы взаимодействия между частицами, поэтому в деформированном теле возникают внутренние упругие силы, уравновешивающие внешние силы, приложенные к телу. Упругие силы вызывают внутренние напряжения, определяемые отношением упругой силы $F_{упр}$ к площади сечений тела:

$$\sigma = \frac{dF_{упр}}{dS}$$

По величине упругая сила $F_{упр}$ равна внешней силе F, приложенной вдоль верхнего основания цилиндра, площадь которого S. Поэтому напряжение сдвига (касательное напряжение):

$$\sigma_\tau = \frac{F}{S} \qquad (2)$$

По закону Гука (справедливому при малых напряжениях) относительный сдвиг φ пропорционален касательному напряжению:

$$\sigma_\tau = G \cdot \varphi, \qquad (3)$$

где модуль сдвига для чугуна равен $G_{чн} = 4.6 \cdot 10^{10}$ н/м^2, а для свинца $G_{св} = 0.6 \cdot 10^{10}$ н/м^2.

Поскольку размеры чугунного и свинцового цилиндров, и силы, приложенные к ним, одинаковы то из (2) следует равенство касательных напряжений для этих цилиндров, поэтому, используя (3):

$$G_{чн} \cdot \varphi_{чн} = G_{св} \cdot \varphi_{св} \qquad \text{или}$$

$$\frac{\varphi_{св}}{\varphi_{чн}} = \frac{G_{чн}}{G_{св}},$$

$$\frac{\varphi_{св}}{\varphi_{чн}} = \frac{4.6 \cdot 10^{10}}{0.6 \cdot 10^{10}} \approx 8.$$

Для абсолютного сдвига из (1) получаем соотношение:

$$\frac{\Delta x_{св}}{\Delta x_{чн}} \approx \frac{\varphi_{св}}{\varphi_{чн}} \approx 8.$$

Таким образом, как относительный сдвиг φ так и абсолютный сдвиг Δx для свинцового цилиндра в 8 раз больше, чем для чугунного. Болты применяются для скрепления (стягивания) металлических конструкций, при этом, конечно же, возникает сдвиг, деформирующий болт. И чем меньше эта деформация, тем надежнее и крепче такая конструкция. Поэтому для изготовления болтов из этих двух металлов надо выбрать тот, у кого мала деформация при сдвиге, т.е. чугун.

Задача 3*

Плоская продольная упругая волна распространяется в положительном направлении оси *x* в среде с плотностью $\rho = 4$ г/см^3 и модулем Юнга E = 100Гпа. Найти проекцию скорости u_x частиц среды в точках, где относительная деформация среды $\varepsilon = 0.010$.

Анализ и решение

Колебание смещений частиц в плоской произвольной упругой волне, распространяющейся в положительном направлении оси *x*, можно записать:

$$S(x,t) = A \cdot \cos(\omega \cdot t - k \cdot x),$$

где ω – частота звука, k – волновое число, а $v = \frac{\omega}{k}$ - фазовая скорость звуковой волны или скорость звука.

Скорость смещения частиц в среде вдоль оси *x* найдется дифференцированием функции S(x,t) по времени:

$$u_x = \frac{\partial S}{\partial t} = -A\omega \cdot \sin(\omega \cdot t - k \cdot x).$$

Относительная деформация среды будет:

$$\varepsilon = \frac{\partial S}{\partial x} = Ak \sin(\omega \cdot t - k \cdot x).$$

Связь между u_x и ε такова:

$$u_x = -\varepsilon \frac{\omega}{k} = -\varepsilon \cdot v.$$

Т.к. фазовая скорость произвольных волн в упругой среде равна:

$$v = \sqrt{\frac{E}{\rho}},$$

то для u_x получаем:

$$u_x = -\varepsilon\sqrt{\frac{E}{\rho}}\ .$$

Подставляя данные из условия задачи:

$$E = 100\,ГПа = 100\cdot 10^9\,Па = 10^{11}\,Па$$

$$\rho = 4\,г/см^3 = 4\cdot 10^3\,кг/м^3$$

получаем:

$$u_x = -0.010\sqrt{\frac{10^{11}}{4\cdot 10^3}} = -50\,м/с\ .$$

1. Какое нормальное напряжение σ_n необходимо приложить к концам алюминиевого стержня, чтобы при его нагревании на ΔT=1К длина стержня не изменилась? Коэффициент линейного растяжения алюминия $\alpha_T = 2{,}6\cdot 10^{-5}\,K^{-1}$, (модуль Юнга для алюминия E=6,9 $\cdot 10^{10}$Па.

Решение

Согласно закону линейного теплового расширения кристаллов относительное изменение длины l стержня при его нагревании на ΔT определяется формулой

$$\frac{\Delta l}{l} = \alpha_T\cdot \Delta T\ . \qquad (3.1)$$

В соответствии с законом Гука для однородного стержня такая деформация наблюдается при приложении к концам стержня растягивающего усилия с нормальным напряжением

$$\sigma_n = E\frac{\Delta l}{l}\ , \qquad (3.2)$$

где E – модуль Юнга материала стержня.

Из формул (3.1) и (3.2) следует, что для предотвращения теплового расширения стержня к его концам необходимо приложить сжимающее усилие с нормальным напряжением

$$\sigma_n = E \cdot \alpha_T \cdot \Delta T = 1{,}8 \cdot 10^6 \text{ Па} . \qquad (3.3)$$

Ответ: $\sigma_n = 1{,}8 \cdot 10^6$ $Па$.

Таблица 1 – Варианты заданий для решения Пример№1

Вариант	$\alpha_T = 2{,}6 \cdot 10^{-5}$ К$^{-1}$,	ΔT=1К	E=6,9 ·10^{10}Па.
1	2,8	**2**	=
2	2,9	**4**	=
3	3	**6**	=
4	2,5	**8**	=
5	2,4	**10**	=
6	2,8	**1**	=
7	2,8	**12**	=
8	2,9	**2**	=
9	3	**4**	=
10	2,5	**6**	=
11	2,4	**8**	=
12	2,8	**10**	=
13	2,8	**1**	=
14	2,9	**12**	=

Вопросы к практическому занятию:

Напишите конспективно ответы на вопросы:

Вопрос 1. Какие бывают деформации?
Вопрос 2. В каких случаях закон Гука справедлив для упругих стержней?
Вопрос 3. Как направлена сила упругости?
Вопрос 4. Какую природу имеет сила упругости?
Вопрос 5. От чего зависит коэффициент жесткости k? Модуль Юнга E?