

Простейшие способы интерполяции и экстраполяции данных

Рассмотрим функцию $y=f(x)$ непрерывную на некотором интервале $[a,b]$ и заданную некоторыми своими значениями $y_i=f(x_i)$, $i=1,2,\dots,n$ для соответствующих значений аргумента $a \leq x_0 < x_1 < \dots < x_n \leq b$. Необходимо найти значение этой функции в точке x^* принадлежащей интервалу $[a,b]$, при этом $x^* \neq x_i$ и оценить погрешность полученного приближенного значения.

Один из возможных путей решения поставленной задачи состоит в следующем. Для функции $y=f(x)$ по значениям y_i в узлах x_i , $i=1,2,\dots,n$ строится многочлен степени не выше n

$$P_n(x) = a_0 \cdot x^n + a_1 \cdot x^{n-1} + \dots + a_{n-1} \cdot x + a_n \quad (1)$$

принимаящий в точках x_i значения y_i , т.е. значения коэффициентов многочлена $- a_i$ – находятся из условия:

$$P_n(x) = y_i, i = 1, 2, \dots, n \quad (2)$$

Этот многочлен называется интерполяционным, он всегда существует и единственен.

В простейшем случае можно воспользоваться многочленом 1-ой степени, т.е. интерполирование будет линейным:

$$P_1(x) = a \cdot x + b \quad (3)$$

В этом случае для интерполяции необходимо построить прямую, соединяющую две точки (x_j, y_j) и (x_{j+1}, y_{j+1}) , $1 \leq j+1 \leq n$. Коэффициенты a и b вычисляются следующим образом:

$$a = (f(x_j) - f(x_{j+1})) / (x_j - x_{j+1}),$$
$$b = f(x_{j+1}) - a \cdot x_{j+1} \quad (4)$$

Пример алгоритма линейной интерполяции на естественном языке:

1. Задаем начальные данные для интерполяции: границы интерполируемого отрезка a и b , количество узлов координатной сетки n , шаг сетки h , массив

- значений координат сетки $z(n)$ и массив значений интерполируемой функции $f(n)$.
2. Задаем шаг графического изображения sh интерполируемой функции $f(x)$ и интерполяционной функции $g(x)$.
 3. Задаем цикл по x от a до $b-sh$ с шагом $sh*2$.
 4. Задаем $x_1=x$ и $x_2=x+sh$.
 5. Вычисляем значения интерполируемой функции в точках x_1 и x_2 : $f(x_1)$ и $f(x_2)$.
 6. Выводим на экран изображение интерполируемой функции в точках x_1 и x_2 : $f(x_1)$ и $f(x_2)$.
 7. Вычисляем значения интерполяционной функции в точках x_1 и x_2 : $g(x_1)$ и $g(x_2)$:
 - 7.1. Задаем цикл по k от 1 до $n-1$.
 - 7.2. Находим номера узлов интерполяционной сетки, между которыми находится значение x_1 . Задаем ветвление: если $x \geq z(k)$ и $x \leq z(k+1)$, то $k_1=k$ и $k_2=k+1$; если $x > z(n)$, то $k_1=n-1$ и $k_2=n$.
 - 7.3. По формулам метода линейной интерполяции находим коэффициенты интерполяционной прямой: $a=(f(k_1)-f(k_2))/(z(k_1)-z(k_2))$ и $b=f(k_2)-a*z(k_2)$.
 - 7.4. Вычисляем значение интерполяционной функции в точке x_1 : $g(x_1)$.
 - 7.5. Пункты 7.1 – 7.4 повторяем для нахождения значения интерполяционной функции в точке x_2 : $g(x_2)$.
 8. Выводим на экран интерполяционной функции в точках x_1 и x_2 : $g(x_1)$ и $g(x_2)$.
 9. Конец цикла по x .
 10. Конец программы.

Реализация алгоритма линейной интерполяции функции $f(x)=\sin(5*x)$ на отрезке от 0,05 до 5 с шагом 0,005 на языке VFP:

```

SET DECIMALS TO 10
n=10
DIMENSION f(n), z(n)

```

```

h=0.1
FOR i=1 TO n
z(i)=(i-1)*h
x=z(i)
f(i)= SIN(5*x)
ENDFOR

a=0.05
b=2
sh = 0.005

x1=0.05
_screen.Cls
FOR x=a TO b-sh STEP sh*2

x1=x
x2=x+sh

f1 = SIN(5*x1)
f2 = SIN(5*x2)
_screen.Line(xe(x1),ye(f1),xe(x2),ye(f2))

g1=интерполяция(x1,@f,@z,n)
g2=интерполяция(x2,@f,@z,n)
_screen.line(xe(x1),ye(g1),xe(x2),ye(g2))

WAIT WINDOW 1

ENDFOR

PROCEDURE интерполяция
PARAMETERS x,f,z,n
DIMENSION f(n),z(n)
LOCAL k,a,b
FOR k=1 TO n-1
DO CASE
CASE x>=z(k) and x<=z(k+1)
k1=k
k2=k+1
EXIT
CASE x>z(n)
k1=n-1
k2=n
EXIT
ENDCASE
ENDFOR
a=(f(k1)-f(k2))/(z(k1)-z(k2))
b=f(k2)-a*z(k2)
RETURN a*x+b

FUNCTION xe
PARAMETERS x
RETURN 50 + x*400

```

```
ENDFUNC
```

```
FUNCTION ye  
PARAMETERS y  
RETURN 200 - y*150  
ENDFUNC
```

Данная реализация алгоритма для графического изображения интерполируемой функции $f(x)$ и интерполяционной функции $g(x)$ использует метод `line(x1, y1, x2, y2)` объекта `_screen`.

Реализация алгоритма линейной интерполяции функции $f(x)=\sin(5*x)$ на отрезке от 0,05 до 5 с шагом 0,005 на языке VBA:

```
Sub Interpolation_Test()  
Dim xlSheet As Excel.Worksheet  
  
Set xlSheet = Application.ActiveSheet  
  
n = 10  
Dim f(10), z(10)  
h = 0.1  
  
For i = 1 To n  
z(i) = (i - 1) * h  
x = z(i)  
f(i) = Sin(5 * x)  
Next i  
  
sh = 0.005  
x1 = 0.05  
f1 = Sin(5 * x1)  
g1 = Interpolation(x1, f, z, n)  
  
xlSheet.Cells(1, 1).Value = x1  
xlSheet.Cells(1, 2).Value = f1  
xlSheet.Cells(1, 3).Value = g1  
i = 1  
For x = 0.05 To 0.6 Step sh  
i = i + 1  
x2 = x + sh  
f2 = Sin(5 * x2)  
g2 = Interpolation(x2, f, z, n)  
xlSheet.Cells(i, 1).Value = x2  
xlSheet.Cells(i, 2).Value = f2  
xlSheet.Cells(i, 3).Value = g2  
  
x1 = x2
```

```
f1 = f2
g1 = g2
Next x
```

```
Call AddChart("C1", "C2", "C3")
```

```
End Sub
```

```
Function Interpolation(t, f, z, n)
Dim k, a, b
```

```
For k = 1 To n - 1
    If t >= z(k) And t <= z(k + 1) Then
        k1 = k
        k2 = k + 1
    Exit For
    ElseIf t > z(n) Then
        k1 = n - 1
        k2 = n
    Exit For
End If
Next k
```

```
a = (f(k1) - f(k2)) / (z(k1) - z(k2))
b = f(k2) - a * z(k2)
```

```
Interpolation = a * t + b
```

```
End Function
```

```
Sub AddChart(Col1, Col2, Col3)
```

```
ASheetName = Application.ActiveSheet.Name
```

```
Charts.Add
```

```
ActiveChart.ChartType = xlXYScatterSmoothNoMarkers
```

```
ActiveChart.SetSourceData
```

```
Source:=Sheets(ASheetName).Range("A1")
```

```
ActiveChart.SeriesCollection.NewSeries
```

```
ActiveChart.SeriesCollection.NewSeries
```

```
ActiveChart.SeriesCollection(1).XValues = "=" &  
ASheetName & "!" & Col1
```

```
ActiveChart.SeriesCollection(1).Values = "=" &  
ASheetName & "!" & Col2
```

```
ActiveChart.SeriesCollection(1).Name = """"f(x)"""
```

```
ActiveChart.SeriesCollection(2).XValues = "=" &  
ASheetName & "!" & Col1
```

```
ActiveChart.SeriesCollection(2).Values = "=" &  
ASheetName & "!" & Col3
```

```
ActiveChart.SeriesCollection(2).Name = ""g(x)""
ActiveChart.Location Where:=xlLocationAsObject,
Name:=ASheetName
ActiveChart.SeriesCollection(1).Select
ActiveChart.ChartArea.Select

End Sub
```

В данной реализации для графического изображения интерполируемой функции $f(x)$ и интерполяционной функции $g(x)$ используются средства построения графиков MS EXCEL. Значения x , $f(x)$ и $g(x)$ заносятся в ячейки первых трех колонок рабочего листа:

```
xlSheet.Cells(i, 1).Value = x1
xlSheet.Cells(i, 2).Value = f1
xlSheet.Cells(i, 3).Value = g1
```

и в конце программы для построения графика вызывается метод `AddChart(Col1, Col2, Col3)`.