Практические задания

Примечания:

1. Необходимо решить ВСЕ задачи.
2. Работа должна быть оформлена в ОДНОМ файле.
3. При загрузке работы НЕ ИСПОЛЬЗУЙТЕ архиваторы.

$\$\, y=-¿\{1\}\{2\}¿^{2}¿$

Задачи:

1. Методом изоклин построить интегральные кривые уравнения

   1.1 $\frac{dy}{dx} = 2x(1 - y)$

Решить уравнение, допускающее понижения

порядка: $x^2y'' = y'^2$

2. Решить систему уравнений

   3.1./ $\frac{dx}{dt} = \frac{t}{y}$

   $\frac{dy}{dt} = -\frac{t}{x}$

3. Вероятность появления события в каждом испытании равна 0,7. Сколько нужно провести испытаний, чтобы наивероятнейшее число появлений события равнялось 10?

Задача №1

$$\frac{dy}{dx}=2x(1-y)$$

Решим уравнение методом разделения переменных:
dy/(1-y) = 2x dx
Проинтегрируем обе части:
-ln|1-y| = x^2 + C
где C - произвольная постоянная.
Выразим y:
1-y = e^(-x^2 - C)
y = 1 - e^(-x^2 - C)
Для построения интегральных кривых заданного уравнения можно использовать метод изоклин:
1) Найдем изоклины, т.е. кривые, на которых значение произведения 2x(1-y) постоянно:

2x(1-y) = C
y = 1 - x^2/C
2) Построим графики изоклин и найдем, как изменяется знак произведения 2x(1-y) на каждой из них. На тех участках изоклин, где произведение положительно, интегральные кривые должны идти вправо, на тех, где отрицательно, - влево.
3) Нарисуем на графике несколько интегральных кривых, используя полученное выражение для y.
Пример построения интегральных кривых уравнения dy/dx=2x(1-y):

Задача №2

Пусть $u=y'$, тогда $u'=\frac{d(u)}{dx}=\frac{d(y')}{dx}=y''$, а уравнение примет вид:
$x^2 u' = u^2$
Переносим u^2 в левую часть:
$x^2 u' - u^2 = 0$
Это уравнение Эйлера-Лагранжа, поэтому делаем замену $u=x^m$:
$x^2 \cdot m x^{m-1} - x^{2m} = 0$
$x^{m+1} \cdot (m - x^m) = 0$
Получаем два уравнения:
$x^{m+1}=0$ и $m-x^m=0$
Решение первого уравнения: $m=-1$, тогда $u = \frac{y'}{x}=-\frac{1}{x}$.
Решение второго уравнения: $m=1$, тогда $u=x$.
Перейдем обратно к y'':
$u = y' = -\frac{1}{x},\ y'=-\ln(|x|)+C_1$
$u = y' = x,\ y=\frac{1}{2}x^2+C_2$.
Ответ: $y=-\frac{1}{2}\ln^2(|x|)+C_1x+C_2$.
$y=-12ln_{2}(|x|)+C_{1}x+C_{2}$

Задача №3

Дана следующая система дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt}=\frac{t}{y} \\ \frac{dy}{dt}=\frac{-t}{x} \end{cases}$$

Решение:
Мы можем выразить x и y через t и константы, используя методы решения дифференциальных уравнений.
Дифференцируя первое уравнение по t и подставляя второе уравнение, получаем:
d^2x/dt^2 = -(y/x) * dx/dt - t/y * dy/dt
Заменяя dx/dt и dy/dt на их соответствующие значения, получаем:
d^2x/dt^2 = -t/x * (-t/x) - t/y * (t/y) = t^2 * (1/x^2 + 1/y^2)
Теперь дифференцируем второе уравнение по t и подставляем первое уравнение:
d^2y/dt^2 = (-x/y) * dy/dt + t/x * dx/dt
Заменяя dx/dt и dy/dt на их соответствующие значения, получаем:

d^2y/dt^2 = -t/x * (-t/y) - t/y * (t/x) = 0
Таким образом, мы получили два дифференциальных уравнения. Второе уравнение говорит о том, что вторая производная y равна нулю, что означает, что y является линейной функцией от t. Поэтому мы можем записать:
y = c1 + c2 * t
где c1 и c2 - произвольные постоянные.
Теперь мы можем перейти к первому уравнению. Подставляя y = c1 + c2 * t, получаем:
dx/dt = t / (c1 + c2 * t)
Сделаем замену переменных:
x = u * (c1 + c2 * t)
dx/dt = du/dt * (c1 + c2 * t) + u * c2
Подставляем эти выражения в первое уравнение и упрощаем:
du/dt = 1 / (c1 + c2 * t)^2
Мы можем интегрировать это уравнение по t, чтобы получить u:
u = -1 / (c2 * (c1 + c2 * t)) + c3
где c3 - произвольная постоянная.
Теперь мы можем выразить x, используя y и u:
x = u * (c1 + c2 * t) = (-1 / (c2 * (c1 + c2 * t)) + c3) * (c1 + c2 * t)
Таким образом, решение этой системы дифференциальных уравнений будет выглядеть как:
x = (-t + c1 / t) * (c2 + c3 * t)
y = c1 + c2 * t
где c1, c2 и c3 - произвольные постоянные.

Задача №4

Для решения задачи необходимо использовать биномиальное распределение, которое задается формулой:
P(X=k) = C(n,k) * p^k * (1-p)^(n-k)
где X - число появлений события в n испытаниях, k - количество появлений события, p - вероятность появления события в каждом испытании, C(n,k) - количество сочетаний из n по k.
Для наивероятнейшего числа появлений события необходимо найти такое n, при котором значение P(X=k) будет максимальным. Для этого можно воспользоваться формулой для нахождения моды биномиального распределения:
mode = (n+1) * p
С учетом того, что необходимо получить 10 появлений события, получим:
10 = (n+1) * 0.7
n = (10/0.7) - 1
n ≈ 13.1
Ответ: необходимо провести 14 испытаний, чтобы наивероятнейшее число появлений события равнялось 10.