

Санкт-Петербург
2023 год

Цель работы: измерить моменты инерции различных тел. Проверить теорему Штейнера.

Теоретические сведения:

В работе изучается явление вращательного движения – вид механического движения, при котором все точки абсолютно твёрдого тела описывают окружности, лежащие на параллельных плоскостях, а их центрами является ось вращения.

Свойства твёрдого тела при его вращении описываются моментом инерции твёрдого тела. По аналогии с массой, как величиной, характеризующей инертные свойства тела при поступательном движении, момент инерции является мерой инертности тела при вращательном движении. Он зависит от размеров, формы тел и распределения массы в них относительно оси вращения.

В общем виде момент инерции определяется формулой:

$$J = \int r^2 dm = \int \rho r^2 dV$$

где r – расстояние от оси вращения до элементарного объёма dV с массой dm , ρ – плотность вещества.

Момент инерции тел различной формы можно найти как результат интегрирования по соответствующему объёму тела.

Существуют некоторые частные случаи:

Характеристики тела	Формулы расчёта
Материальная точка массой m на расстоянии R от оси вращения	$J = m R^2$
Сплошной цилиндр радиусом R и массой m с осью, проходящей через центр масс перпендикулярно основанию	$J = \frac{m R^2}{2}$
Диск радиусом R и массой m с осью, проходящей через центр масс	$J = \frac{m R^2}{2}$
Полый цилиндр с внутренним радиусом R_1 и внешним радиусом R_2 , массой m с осью вращения, проходящей через ось цилиндра	$J = \frac{1}{2} m (R_1^2 + R_2^2)$

Момент инерции шара радиусом R и массой m относительно оси, проходящей через центр масс	$J = \frac{2}{5} m R^2$
Тонкий стержень массой m и длиной l относительно оси, проходящей через его середину перпендикулярно стержню	$J = \frac{m l^2}{12}$

Теоретическая формула для момента инерции стержня с грузами

$$J = J_{cm} + 2 m r^2, \text{ где } J_{cm} = \frac{m l^2}{12};$$

Теорема Штейнера: момент инерции относительно произвольной оси O_1O_1 равен сумме момента инерции J_0 относительно оси OO , параллельной данной и проходящей через центр массы тела и произведения массы тела на квадрат расстояния d между осями.

$$J = J_0 + m d^2$$

В работе для определения моментов инерции различных тел используется метод крутильных колебаний. Исследуемые тела насаживают на ось спиральной пружины. В результате деформации пружины при её закручивании на угол φ возникает упругая сила, создающая момент силы \vec{M} .

Модуль момента пропорционален углу закручивания пружины:

$$M = D\varphi \quad (1)$$

D – модуль кручения пружины.

В то же время модуль момента силы определяется произведением:

$$M = Fl \quad (2)$$

Крутящий момент стремится вернуть пружину в исходное положение, в результате чего возникают крутильные колебания. Их период определяется по формуле:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{D}} \quad (3)$$

Отсюда момент инерции тела:

$$J = \frac{T^2 D}{4\pi^2} \quad (4)$$

Таким образом, измеряя период колебаний и зная модуль кручения D , можно вычислить момент инерции тела, насаженного на ось пружины.

Экспериментальная установка



1 – световой барьер для подсчёта периода колебаний системы; 2 – тела вращения; 3 – треножник с зажимом и спиральной пружиной; 4 – динамометр.

Исходные данные: длина стержня = 60 см = 0,6 м, масса стержня $m = 0,1315$ кг.

Выполнение работы

1) Определение модуля кручения пружины

Для определения модуля кручения пружины D используется стержень с грузами. Его необходимо насадить на ось пружины, грузы сдвинуть максимально близко к оси вращения. Затем, поворачивая и удерживая стержень динамометром вблизи груза, сохраняя его перпендикулярное положение относительно стержня и оси вращения, измеряем показания силы.

Результат эксперимента представлен в таблице:

Таблица 1. Определение модуля кручения пружины

Физическая величина	φ	F	l	M
Ед. изм. № опыта	рад	Н	м	Н·м
1	$\pi/2$	0,70	0,04	0,028
2	π	1,05	0,04	0,046
3	$3\pi/2$	1,60	0,04	0,070
4	2π	2,30	0,04	0,101

Пример расчётов:

$$M_1 = F_1 \cdot l = 0,70 * 0,04 \text{ м} = 0,028 \text{ Н} \cdot \text{м}$$

Построим графическую зависимость момента силы от угла поворота.

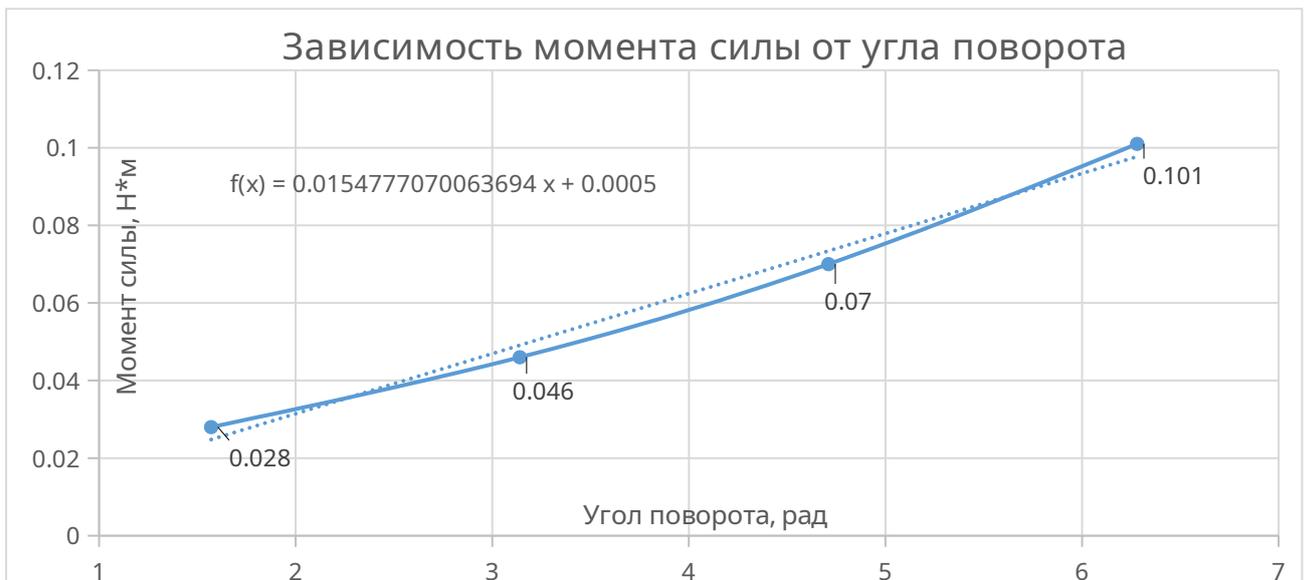


Рисунок 1. Зависимость момента силы от угла поворота стержня.

Так как представленная зависимость является линейной, то по формуле (1) модуль кручения можно определить, как тангенс угла наклона аппроксимирующей прямой. Из графика видно:

$$D_{cp.} = 0,0155 \frac{H \cdot m}{рад}$$

2) Определение моментов инерции различных тел

Выберем три различных тела и измерим период колебаний систем с ними выше описанным способом.

1. Шар радиусом $R = 0,065$ м, массой $m = 0,764$ кг
2. Полый цилиндр радиусом $R_1 = 0,05$, $R_2 = 0,047$, массой $m = 0,352$ кг
3. Диск радиусом $R = 0,11$ м , массой $m = 0,260$ кг

Ниже представлены результаты измерения периодов колебания различных тел:

Таблица 2. Период колебаний систем с исследуемыми телами

Тело	Шар	Полый цилиндр	Диск
Ед. изм.	Т, с	Т, с	Т, с
№ опыта			
1	1,701	1,266	1,719
2	1,634	1,269	1,701
3	1,709	1,291	1,736
4	1,701	1,343	1,809
5	1,703	1,242	1,712
Среднее значение:	1,689	1,282	1,735

Определим значения моментов инерции тел:

$$J_{ш.} = \frac{T_{ш.}^2 \cdot D}{4\pi^2} = \frac{1,689 \cdot 1,689 \cdot 0,0155}{4 \cdot 3,14^2} = 11,21 \cdot 10^{-4} \text{ кг} \cdot \text{м}^2$$

$$J_{ц.} = \frac{T_{ц.}^2 \cdot D}{4\pi^2} = \frac{1,282 \cdot 1,282 \cdot 0,0155}{4 \cdot 3,14^2} = 7,46 \cdot 10^{-4} \text{ кг} \cdot \text{м}^2$$

$$J_{д.} = \frac{T_{д.}^2 \cdot D}{4\pi^2} = \frac{1,735 \cdot 1,735 \cdot 0,0155}{4 \cdot 3,14^2} = 14,38 \cdot 10^{-4} \text{ кг} \cdot \text{м}^2$$

Проверим эти значения, найдя момент инерции тел из формул через массу и радиус:

$$J_{ш.} = \frac{2}{5} m R^2 = \frac{2}{5} \cdot 0,065 \text{ м} \cdot 0,065 \text{ м} \cdot 0,764 = 12,18 \cdot 10^{-4} \text{ кг} \cdot \text{м}^2$$

$$J_{ц.} = m \frac{(R^2 + R^2)}{2} = \frac{0,351 \text{ кг} \cdot (0,0025 \text{ м}^2 + 0,0022 \text{ м}^2)}{2} = 8,24 \cdot 10^{-4} \text{ кг} \cdot \text{м}^2$$

$$J_{д.} = \frac{m R^2}{2} = \frac{0,260 \text{ кг} \cdot 0,0121 \text{ м}^2}{2} = 15,73 \cdot 10^{-4} \text{ кг} \cdot \text{м}^2$$

Полученные результаты теоретических значений приблизительно соответствуют полученным на практике, расхождение может быть вызвано погрешностями прямых измерений величин.

3) Изучение зависимости момента инерции от расстояния между центром масс и осью вращения

Расположим грузы на стержне симметрично относительно оси вращения как можно ближе к ней. Измерим расстояние от центров масс грузов до оси вращения (r). Измерим период колебания описанным выше способом, а затем последовательно сдвинем грузы на 2 см и измерим период снова. Результаты измерений:

Таблица 3

Физическая величина	r	r^2	T	J
Ед.				
изм.	м	м ²	с	кг·м ²
№ опыта				
1	0,02	0,0004	3,141	0,0041
2	0,04	0,0016	3,404	0,0046
3	0,06	0,0036	3,644	0,0054
4	0,08	0,0064	3,886	0,0067
5	0,10	0,0100	4,195	0,0081

Пример вычислений:

$$J = J_{cm} + 2mr^2 = \frac{0,6^2 \cdot 0,1315}{12} \cdot 2 \cdot 0,212 \cdot 0,0004 = 0,0041 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$$

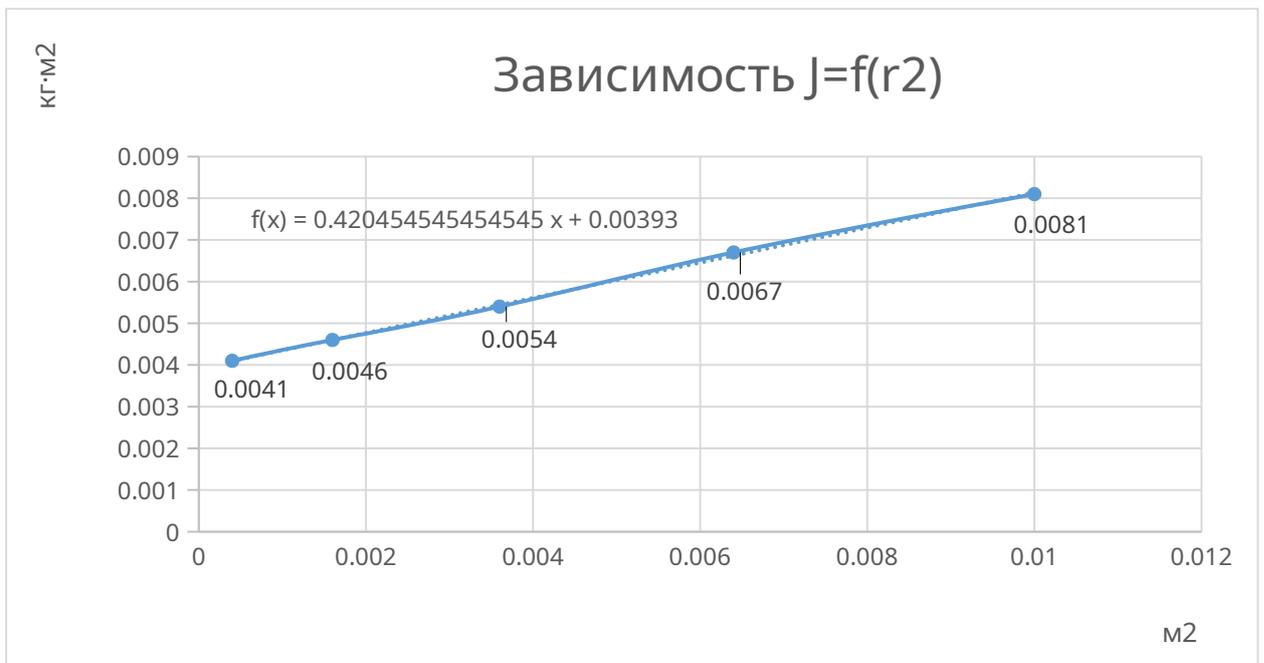


Рисунок 2. Графическая зависимость момента инерции от квадрата расстояния от оси вращения до центра масс стержня

Как видно из графика, аппроксимирующая прямая пересекает ось Oy в точке, соответствующей моменту импульса $J = 0,4205 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$ — это соответствует моменту импульса стержня. Вычислим его теоретическое значение:

$$J_{\text{ст.}} = \frac{m l^2}{12} = \frac{0,1315 \text{ кг} \cdot 0,6^2}{12} = 0,00415 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$$

Полученное числовое значение примерно соответствует экспериментальному.

5) Проверка теоремы Штейнера

Насадим на ось пружины стержень без грузов, при этом ось вращения совпадает с центром стержня. Измерим период колебаний системы в этом положении:

$$T_0 = 2,623 \text{ с}$$

Далее сместим стержень относительно оси вращения на некоторое расстояние $d = 15 \text{ см}$. Повторим измерения:

$$T_1 = 3,741 \text{ с}$$

Вычислим моменты инерции по формуле (4):

$$J_0 = \frac{T_0^2 D}{4\pi^2} = \frac{2,623^2 \cdot 0,0155}{4 \cdot 3,14^2} = 2,7 \cdot 10^{-3} \text{ кг}\cdot\text{м}^2$$

$$J_1 = \frac{T_1^2 D}{4\pi^2} = \frac{3,741^2 \cdot 1,62 \cdot 10^{-2}}{4 \cdot 3,14^2} = 5,5 \cdot 10^{-3} \text{ кг} \cdot \text{м}^2$$

Далее сместим стержень относительно оси вращения на некоторое расстояние $d = 25$ см. Повторим измерения:

$$T_2 = 5,642 \text{ с}$$

$$J_2 = \frac{T_2^2 D}{4\pi^2} = \frac{5,642^2 \cdot 0,0155}{4 \cdot 3,14^2} = 12,51 \cdot 10^{-3} \text{ кг} \cdot \text{м}^2$$

Из теоремы Штейнера:

$$J_1 = J_0 + m d^2 = 3,94 \cdot 10^{-3} + 0,1315 \cdot 0,15^2 = 5,59 \cdot 10^{-3} \text{ кг} \cdot \text{м}^2$$

$$J_2 = J_0 + m d^2 = 3,94 \cdot 10^{-3} + 0,1315 \cdot 0,25^2 = 12,16 \cdot 10^{-3} \text{ кг} \cdot \text{м}^2$$

Имеющиеся результаты подтверждают справедливость теоремы Штейнера, а текущие расхождения не являются большими (погрешность $\approx 5\%$) и, скорее всего, являются результатом неточных измерений расстояния d от оси вращения до центра масс стержня или периодов T .

Погрешности прямых и косвенных измерений

Погрешности прямых измерений:

$$\Delta l = \Delta d = \pm 0,001 \text{ м};$$

$$\Delta F = \pm 0,025 \text{ Н};$$

$$\Delta T = \pm 0,001 \text{ с};$$

$$\Delta m = \pm 0,001 \text{ кг};$$

$$\Delta \varphi = \pm 5$$

Погрешности косвенных измерений:

$$\Delta M = M_1 \cdot \left(\frac{\Delta l}{l} + \frac{\Delta F}{F_1} \right) = 0,028 \cdot (0,025 + 0,36) = 0,01 \text{ Н} \cdot \text{м}$$

$$\Delta D = D \cdot \frac{\Delta M}{M} = 0,0155 \cdot 25,36 = 0,005 \frac{\text{Н} \cdot \text{м}}{\text{рад}}$$

$$\Delta J_{ш.} = J_{ш.} \cdot \left(\frac{2\Delta T}{T} + \frac{\Delta D}{D} \right) = 11,21 \cdot 10^{-4} \cdot (11,84 \cdot 10^{-4} + 0,32) = 3,6 \cdot 10^{-4} \text{ кг} \cdot \text{м}^2$$

$$\Delta J_{ц.} = J_{ц.} \cdot \left(\frac{2\Delta T}{T} + \frac{\Delta D}{D} \right) = 7,46 \cdot 10^{-4} \cdot (19,58 \cdot 10^{-4} + 0,32) = 2,4 \cdot 10^{-4} \text{ кг} \cdot \text{м}^2$$

$$\Delta J_{д.} = J_{д.} \cdot \left(\frac{2\Delta T}{T} + \frac{\Delta D}{D} \right) = 14,38 \cdot 10^{-4} \cdot (11,51 \cdot 10^{-4} + 0,32) = 4,59 \cdot 10^{-4} \text{ кг} \cdot \text{м}^2$$

Вывод: в результате работы были проделаны опыты по определению моментов инерции различных тел (шар, цилиндр, диск, стержень с грузами) методом крутильных колебаний. Полученные результаты согласуются с теоретически посчитанными и составляют $(11,21 \pm 3,6) \cdot 10^{-4} \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ для шара, $(7,46 \pm 2,4) \cdot 10^{-4} \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ для цилиндра и $(14,38 \pm 4,59) \cdot 10^{-4} \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ для диска. Также имеющиеся результаты подтверждают справедливость теоремы Штейнера с погрешностью 5%.