Министерство науки и высшего образования
Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего
профессионального образования "Уфимский
государственный нефтяной технический университет"

Кафедра "Математика"

Отчет по лабораторной работе №4

По дисциплине "Математические методы обработки
результатов экспериментов"

"Однофакторный дисперсионный анализ"

Вариант №??

Выполнил: студент гр. ???- ??-01 ?????????

Проверил: доцент Лазарев В.А.

Уфа 2023

Дано: Для четырех уровней фактора F экспериментально получены значения исследуемой величины X.

	F1	F2	F3	F4
1	45	47	56	30
2	68	52	29	45
3	47	45	37	40
4	56	54	36	69
5	58	61	38	15

Проверить гипотезу о влиянии фактора F на значения X.

Задача:

1. Вычислить групповые средние и общую среднюю.
2. Вычислить общую, факторную и остаточную суммы квадратов отклонений от общей средней.
3. Вычислить общую, факторную и остаточную дисперсии.
4. Проверить гипотезу о равенстве групповых средних.

На количественный признак X воздействует фактор F, имеющий *p=4* дискретных уровней и на каждом уровне проведено одинаковое число опытов *q=5*.

Теоретическое обоснование:

1) Общую среднюю можно получить как среднее арифметическое групповых средних:

$$\overline{x} = \frac{\sum_{j=1}^{p} \overline{x}_j}{p}$$

На разброс групповых средних относительно общей средней влияют как изменения уровня рассматриваемого фактора, так и случайные факторы.

Для того чтобы учесть влияние данного фактора, общая выборочная дисперсия разбивается на две части, первая из которых называется факторной $S^2_{ф}$, а вторая – остаточной $S^2_{ост}$.

2)С целью учета этих составляющих вначале рассчитывается общая сумма квадратов отклонений вариант от общей средней:

$$S_{общ}=\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q}(x_{ij}-\overline{x})^2$$

и факторная сумма квадратов отклонений групповых средних от общей средней, которая и характеризует влияние данного фактора:

$$S_{ф}=\sum_{j=1}^{p}(\overline{x}_j-\overline{x})^2$$

Последнее выражение получено путем замены каждой варианты в выражении $S_{общ}$ групповой средней для данного фактора.

Остаточная сумма квадратов отклонений получается, как разность:

$$S_{ост}=S_{общ}-S_{ф}$$

3)Для определения общей выборочной дисперсии необходимо $S_{общ}$ разделить на число измерений pq:

$$D_{общ}=\frac{S_{общ}}{pq-1}$$

а для получения несмещенной общей выборочной дисперсии это выражение нужно умножить на $\frac{pq}{pq-1}$:

$$S^2_{общ}=\frac{R_{общ}}{pq-1}$$

Соответственно, для несмещенной факторной выборочной дисперсии:

$$S^2_{ф}=\frac{S_{ф}}{p-1}$$

,где $p-1$ - число степеней свободы несмещенной факторной выборочной дисперсии.

С целью оценки влияния фактора на изменения рассматриваемого параметра рассчитывается величина:

$$f_{набл}=\frac{S^2_{ф}}{S^2_{ост}}$$

Так как отношение двух выборочных дисперсий $S^2_{ф}$ и $S^2_{ост}$ распределено по закону Фишера-Снедекора, то полученное значение $f_{набл}$ сравнивают со значением функции распределения

$$F=\frac{S^2_{ф}}{S^2_{ост}}$$

в критической точке $f_{кр}$, соответствующей выбранному уровню значимости α.

Если $f_{набл}>f_{кр}$, то фактор оказывает существенное воздействие и его следует учитывать, в противном случае он оказывает незначительное влияние, которым можно пренебречь.

Для расчета $S_{набл}$ и $S_{ф}$ могут быть использованы также формулы:

$$S_{общ}=\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q}x^2_{ij}-\overline{x}^2$$

$$S_{ф}=q\sum_{j=1}^{p}(\overline{x}_j{}^2¿-\overline{x}^2)¿$$

Решение:

Находим групповые средние:

$$\overline{x}_i = \frac{\sum_{j=1}^{q} \overline{x}_{ij}}{q}$$

N	П1	П2	П3	П4
1	45	47	56	30
2	68	52	29	45
3	47	45	37	40
4	56	54	36	69
5	58	61	38	15
∑	274	259	196	199
$x_{ср}$	54.8	51.8	39.2	39.8

Обозначим p - количество уровней фактора (p=4). Число измерений на каждом уровне одинаково и равно q=5.

В последней строке помещены групповые средние для каждого уровня фактора.

Общая средняя вычисляется по формуле:

$$\overline{x} = \frac{185,6}{4} = 46,4$$

Для расчета $S_{общ}$ по формуле составляем таблицу квадратов вариант:

N	$П^2_1$	$П^2_2$	$П^2_3$	$П^2_4$
1	2025	2209	3136	900
2	4624	2704	841	2025
3	2209	2025	1369	1600
4	3136	2916	1296	4761
5	3364	3721	1444	225
∑	15358	13575	8086	9511

$S_{общ} = 15358 + 13575 + 8086 + 9511 - 5 \bullet 4 \bullet 46.4^2 = 3470.8$

Находим $S_ф$ по формуле:

$S_ф = 5(54.8^2 + 51.8^2 + 39.2^2 + 39.8^2 - 4 \bullet 46.4^2) = 975.6$

Получаем $S_{ост}$:

$$S_{ост} = S_{общ} - S_ф = 3470.8 - 975.6 = 2495.2$$

Определяем факторную дисперсию:

$$S^2_ф = \frac{S_ф}{p-1} = \frac{975,6}{4-1} = 325,2$$

и остаточную дисперсию:

$$S^2_{ост} = \frac{S_{ост}}{p(q-1)} = \frac{2495,2}{4(5-1)} = 155,95$$

Если средние значения случайной величины, вычисленные по отдельным выборкам одинаковы, то оценки факторной и остаточной дисперсий являются несмещенными оценками генеральной дисперсии и различаются несущественно. Тогда сопоставление оценок этих дисперсий по критерию Фишера должно показать, что нулевую гипотезу о равенстве факторной и остаточной дисперсий отвергнуть нет оснований.

Оценка факторной дисперсии меньше оценки остаточной дисперсии, поэтому можно сразу утверждать справедливость нулевой гипотезы о равенстве математических ожиданий по слоям выборки.

Иначе говоря, в данном примере фактор F не оказывает существенного влияния на случайную величину.

Проверим нулевую гипотезу:

H0: «средние значения X равны для всех значений фактора».

Находим $f_{набл}$.

$$f_{набл}=\frac{325,2}{155,95}=2,09$$

Для уровня значимости α=0.05, чисел степеней свободы 3 и 16 находим $f_{кр}$ из таблицы распределения Фишера-Снедекора.

$$f_{кр}(0,05;3;16)=3,24.$$

В связи с тем, что $f_{набл}<f_{кр}$, нулевую гипотезу о равенстве групповых средних принимаем. Другими словами, групповые средние в целом различаются не значимо, гипотезу о существенном влиянии фактора F на результаты экспериментов отклоняем.