Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования "Уфимский государственный нефтяной технический университет"

Кафедра "Математика"

Отчет по лабораторной работе №1

По дисциплине "Математические методы обработки результатов экспериментов"

"Интерполяция и аппроксимация экспериментальных данных"

Вариант №2

Выполнил: студент гр. БГБ-21-02 Абдуллин А.
Проверил: доцент Лазарев В. А.

Уфа, 2023

Дано:
Таблица 1 – Сеточная функция.

X	8	12	16	20	24	28	32	36	40	44	48	52	56
F	-456	-601	-668	-693	-720	-746	-815	-810	-834	-812	-927	-910	-864

Задача 1:
Найти интерполирующую функцию, используя метод Лагранжа и метод Ньютона.
Решение:

1. **Метод Лагранжа**

Найдем интерполирующую функцию, используя полином четвертой степени. Для этого выберем 5 равноотстоящих точек:

Таблица 2 – Равноотстоящие точки, выбранные из начальной сеточной функции.

	1	*2*	*3*	*4*	*5*
X	8	20	32	44	56
F	-456	-693	-815	-812	-864

$f(x) = P_1(x) + P_2(x) + P_3(x) + P_4(x) + P_5(x);$

$$P_1(x) = f(x_1)\frac{(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)(x-x_5)}{(x¿¿1-x_2)(x¿¿1-x_3)(x¿¿1-x_4)(x¿¿1-x_5)¿¿¿¿};$$

$$P_2(x) = f(x_2)\frac{(x-x_1)(x-x_3)(x-x_4)(x-x_5)}{(x¿¿2-x_1)(x¿¿2-x_3)(x¿¿2-x_4)(x¿¿2-x_5)¿¿¿¿};$$

$$P_3(x) = f(x_3)\frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_4)(x-x_5)}{(x¿¿3-x_1)(x¿¿3-x_2)(x¿¿3-x_4)(x¿¿3-x_5)¿¿¿¿};$$

$$P_4(x) = f(x_4)\frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_5)}{(x¿¿4-x_1)(x¿¿4-x_2)(x¿¿4-x_3)(x¿¿4-x_5)¿¿¿¿};$$

$$P_5(x) = f(x_5)\frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)}{(x¿¿5-x_1)(x¿¿5-x_2)(x¿¿5-x_3)(x¿¿5-x_4)¿¿¿¿};$$

Подставим значение:

$$P_1(x) = \frac{-456*(x-20)\cdot(x-32)\cdot(x-44)\cdot(x-56)}{(8-20)\cdot(8-32)\cdot(8-44)\cdot(8-56)} = \frac{-19x^4}{20736} + \frac{361x^3}{2592} - \frac{3287x^2}{432} + \frac{+28519x}{162} - \frac{117040}{81};$$

$$P_2(x) = \frac{-693*(x-8)\cdot(x-32)\cdot(x-44)\cdot(x-56)}{(20-8)\cdot(20-32)\cdot(20-44)\cdot(20-56)} = \frac{77x^4}{13824} - \frac{2695x^3}{3456} + \frac{2695x^2}{72} - \frac{-37345x}{54} + \frac{94864}{27};$$

$$P_3(x) = \frac{-815*(x-8)\cdot(x-20)\cdot(x-44)\cdot(x-56)}{(32-8)\cdot(32-20)\cdot(32-44)\cdot(32-56)} = \frac{-815x^4}{82944} + \frac{815x^3}{648} - \frac{92095x^2}{1728} + \frac{67645x}{81} - \frac{313775}{81};$$

$$P_4(x) = \frac{-812*(x-8)\cdot(x-20)\cdot(x-32)\cdot(x-56)}{(44-8)\cdot(44-20)\cdot(44-32)\cdot(44-56)} = \frac{203x^4}{31104} - \frac{5887x^3}{7776} + \frac{4669x^2}{162} - \frac{101906x}{243} + \frac{454720}{243};$$

$$P_5(x)=\frac{-864*(x-8)\cdot(x-20)\cdot(x-32)\cdot(x-44)}{(56-8)\cdot(56-20)\cdot(56-32)\cdot(56-44)}=\frac{-x^4}{576}+\frac{13x^3}{72}-\frac{77x^2}{12}+\frac{806x}{9}-\frac{3520}{9};$$

$$f(x)=P_1(x)+P_2(x)+P_3(x)+P_4(x)+P_5(x)=\frac{-19x^4}{20736}+\frac{361x^3}{2592}-\frac{3287x^2}{432}+\frac{28519x}{162}-\frac{117040}{81}+\frac{77x^4}{13824}-\frac{2695x^3}{3456}+$$

;

Итоговый интерполяционный полином:

$$f(x)=\frac{-95x^4}{248832}+\frac{1265x^3}{31104}-\frac{5545x^2}{5184}-\frac{2483x}{243}-\frac{78989}{243}$$

Проверка:

$$f(8)=\frac{-95¿8^4}{248832}+\frac{1265*8^3}{31104}-\frac{5545¿8^2}{5184}-\frac{2483*8}{243}-\frac{78989}{243}=-456;$$

$$f(20)=\frac{-95¿20^4}{248832}+\frac{1265*20^3}{31104}-\frac{5545¿20^2}{5184}-\frac{2483*20}{243}-\frac{78989}{243}=-693;$$

$$f(32)=\frac{-95¿32^4}{248832}+\frac{1265*32^3}{31104}-\frac{5545¿32^2}{5184}-\frac{2483*32}{243}-\frac{78989}{243}=-815;$$

$$f(44)=\frac{-95¿44^4}{248832}+\frac{1265*44^3}{31104}-\frac{5545*44^2}{5184}-\frac{2483*44}{243}-\frac{78989}{243}=-812;$$

$$f(56)=\frac{-95¿56^4}{248832}+\frac{1265*56^3}{31104}-\frac{5545¿56^2}{5184}-\frac{2483*56}{243}-\frac{78989}{243}=-864;$$

Как видно из проверки все значение вычисленные по интерполирующей функции совпали со значениями узлов заданной сеточной функции

Для наглядности построим графики по исходным данным и интерполирующей функции с помощью программного обеспечения Excel:

График 1 – График, построенный по исходной сеточной функции.

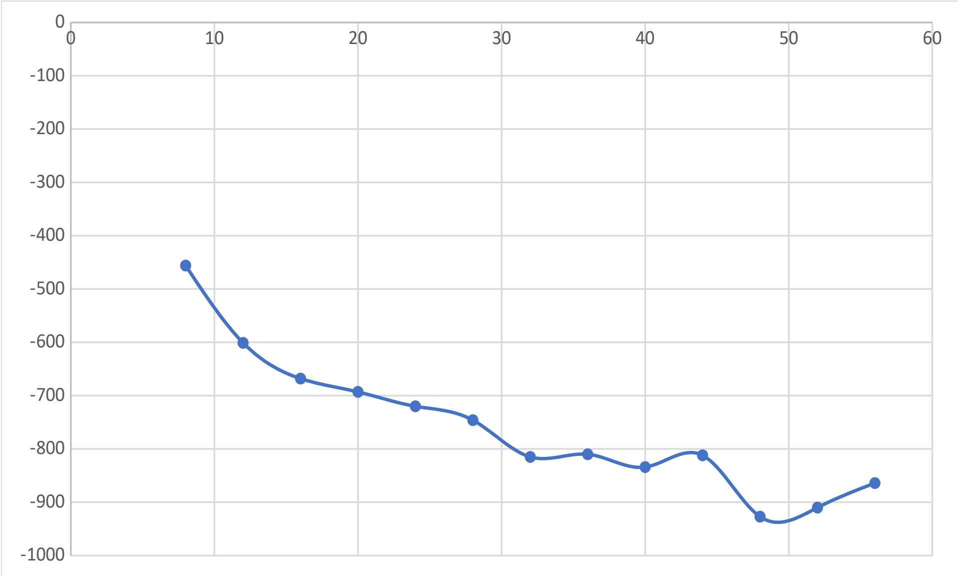
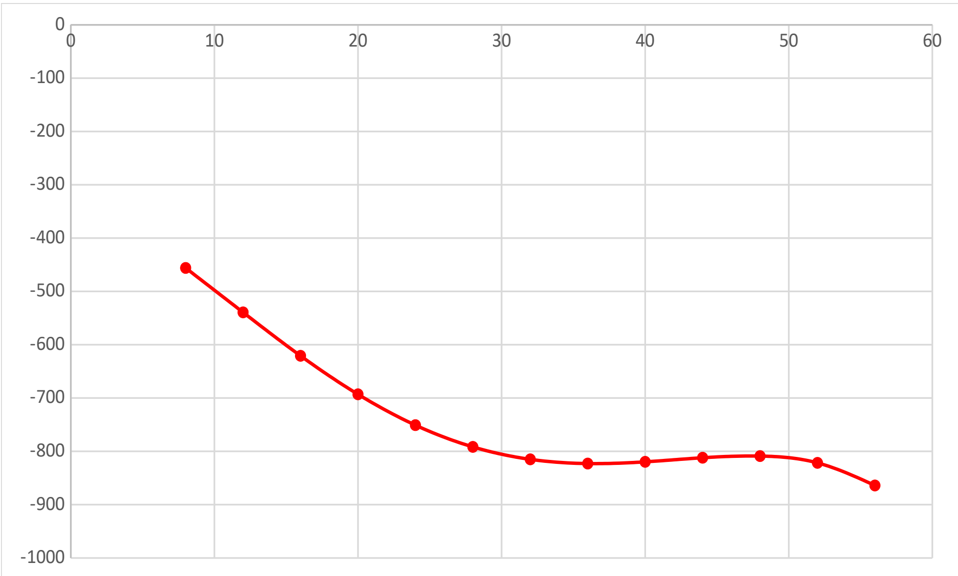


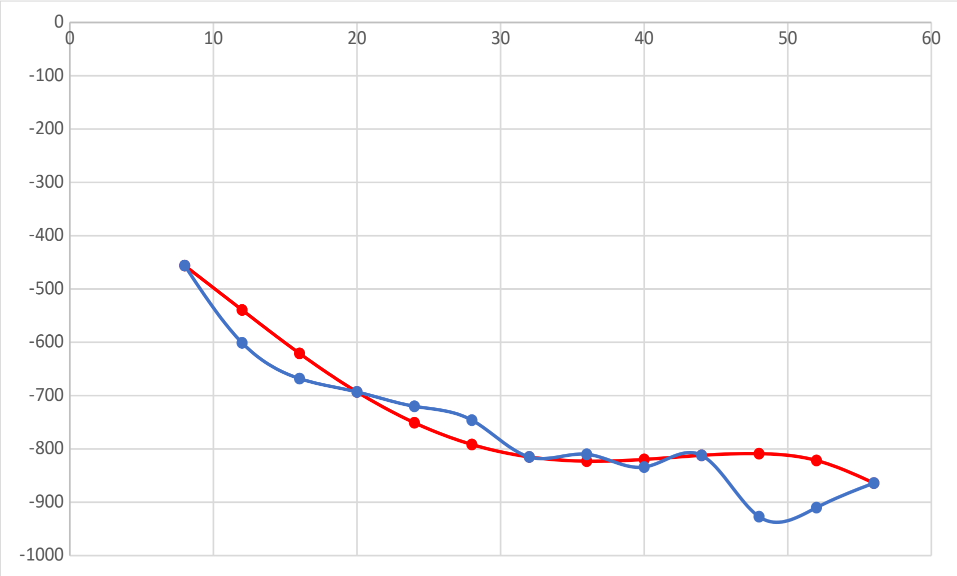
График 2 – График, построенный по расчетам интерполирующей функции.

X	8	12	16	20	24	28	32	36	40	44	48	52	56
f	-456	-539,342	-620,811	-693	-750,848	-791,638	-815	-822,909	-819,687	-812	-808,86	-821,626	-864



Совместим оба графика для визуального сравнения.

График 3 – Совмещенные графики.



2. Метод Ньютона

Найдем интерполирующую функцию, используя всё также полином четвертой степени. Для этого выберем те же самые 5 равноотстоящих точек, что и при расчете методом Лагранжа:

Таблица 2 – Равноотстоящие точки, выбранные из начальной сеточной функции.

	1	*2*	*3*	*4*	*5*
X	8	20	32	44	56
F	-456	-693	-815	-812	-864

Запишем полином в виде:

$$P_n(x)=f(x_1)+(x-x_1)*f(x_1,x_2)+(x-x_1)(x-x_2)*f(x_1,x_2,x_3)+(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)*f(x_1,x_2,x_3,x_4)+(x-$$

;

$$f(x_1,x_2)=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1};$$

$$f(x_2,x_3)=\frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2};$$

$$f(x_3,x_4)=\frac{f(x_4)-f(x_3)}{x_4-x_3};$$

$$f(x_4,x_5)=\frac{f(x_5)-f(x_4)}{x_5-x_4};$$

$$f(x_1,x_2,x_3)=\frac{f(x_2,x_3)-f(x_1,x_2)}{x_3-x_1};$$

$$f(x_2,x_3,x_4)=\frac{f(x_3,x_4)-f(x_2,x_3)}{x_4-x_2};$$

$$f(x_3,x_4,x_5)=\frac{f(x_4,x_5)-f(x_3,x_4)}{x_5-x_3};$$

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4)=\frac{f(x_2,x_3,x_4)-f(x_1,x_2,x_3)}{x_4-x_1};$$

$$f(x_2,x_3,x_4,x_5)=\frac{f(x_3,x_4,x_5)-f(x_2,x_3,x_4)}{x_5-x_2};$$

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)=\frac{f(x_2,x_3,x_4,x_5)-f(x_1,x_2,x_3,x_4)}{x_5-x_1};$$

Подставим значение:

$$f(x_1,x_2)=\frac{-693+456}{20-8}=\frac{-74}{9};$$

$$f(x_2,x_3)=\frac{-815+693}{32-20}=\frac{-61}{6};$$

$$f(x_3,x_4)=\frac{-812+815}{44-32}=\frac{1}{4};$$

$$f(x_4,x_5)=\frac{-864+812}{56-44}=\frac{-13}{3};$$

$$f(x_1,x_2,x_3)=\frac{\frac{-61}{6}+\frac{74}{9}}{32-8}=\frac{-35}{432};$$

$$f(x_2,x_3,x_4)=\frac{\frac{1}{4}+\frac{61}{6}}{44-20}=\frac{125}{288};$$

$$f(x_3,x_4,x_5)=\frac{\frac{-13}{3}-\frac{1}{4}}{56-32}=\frac{-55}{288};$$

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4)=\frac{\frac{125}{288}+\frac{35}{432}}{44-8}=\frac{445}{31104};$$

$$f(x_2,x_3,x_4,x_5)=\frac{\frac{-55}{288}-\frac{125}{288}}{56-20}=\frac{-5}{288};$$

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)=\frac{\frac{-5}{288}-\frac{445}{31104}}{56-8}=\frac{-985}{1492992};$$

$$P_n(x)=f(x_1)+(x-x_1)*f(x_1,x_2)+(x-x_1)(x-x_2)*f(x_1,x_2,x_3)+(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)*f(x_1,x_2,x_3,x_4)+(x-$$

;

Итоговый интерполяционный полином:

$$P_n(x)=\frac{-95}{248832}x^4+\frac{1265}{31104}x^3-\frac{5545}{5184}x^2-\frac{2483}{243}x-\frac{78989}{243};$$

Проверка:

$$f(8)=\frac{-95}{248832}8+\frac{1265}{31104}8^3-\frac{5545}{5184}8^2-\frac{2483}{243}8-\frac{78989}{243}=-456;$$

$$f(20)=\frac{-95}{248832}20^4+\frac{1265}{31104}20^3-\frac{5545}{5184}20^2-\frac{2483}{243}20-\frac{78989}{243}=-693;$$

$$f(32)=\frac{-95}{248832}32^4+\frac{1265}{31104}32^3-\frac{5545}{5184}32^2-\frac{2483}{243}32-\frac{78989}{243}=-815;$$

$$f(44)=\frac{-95}{248832}44^4+\frac{1265}{31104}44^3-\frac{5545}{5184}44^2-\frac{2483}{243}44-\frac{78989}{243}=-812;$$

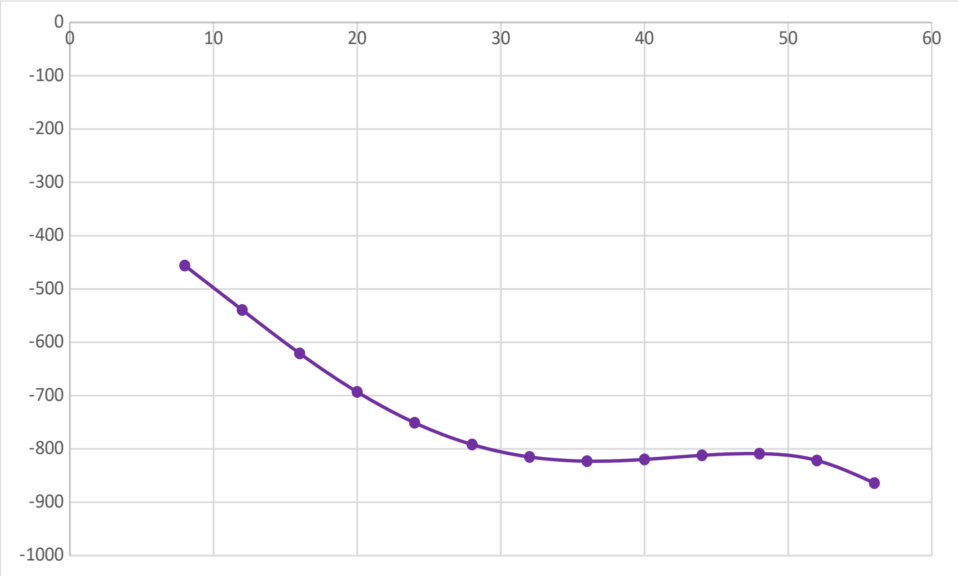
$$f(56)=\frac{-95}{248832}56^4+\frac{1265}{31104}56^3-\frac{5545}{5184}56^2-\frac{2483}{243}56-\frac{78989}{243}=-864;$$

Как видно из проверки все значение вычисленные по интерполирующей функции совпали со значениями узлов заданной сеточной функции

Для наглядности построим графики по исходным данным и интерполирующей функции с помощью программного обеспечения Excel:

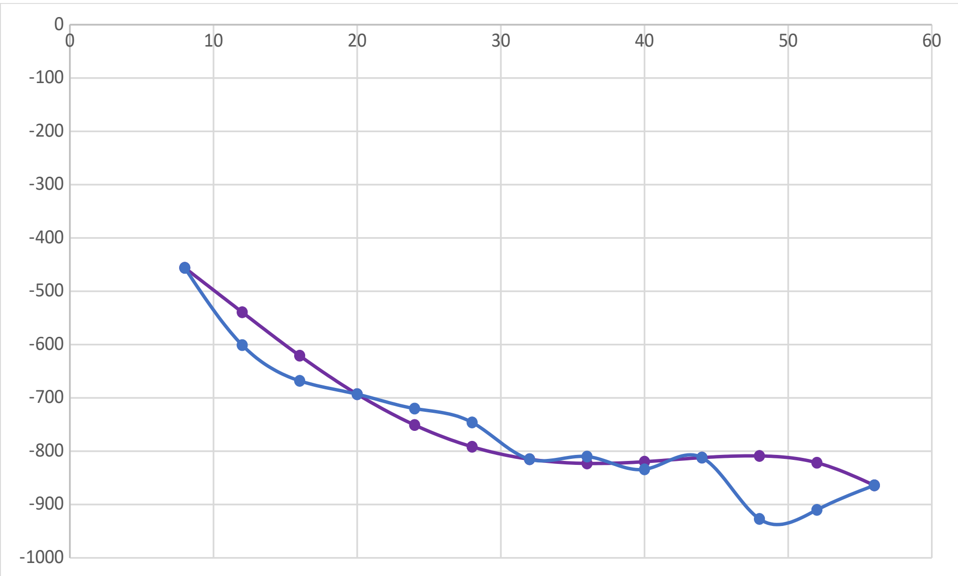
График 4 – График, построенный по расчетам интерполирующей функции.

X	8	12	16	20	24	28	32	36	40	44	48	52	56
f	-456	-539,342	-620,811	-693	-750,848	-791,638	-815	-822,909	-819,687	-812	-808,86	-821,626	-864



Совместим оба графика для визуального сравнения.

График 5 – Совмещенные графики.



Сумма квадратов отклонений (абсолютных погрешностей) Φ = 31201,59.

Задача 2:
Необходимо по исходным данным подобрать вид аппроксимирующей функции.

X	8	12	16	20	24	28	32	36	40	44	48	52	56
F	-456	-601	-668	-693	-720	-746	-815	-810	-834	-812	-927	-910	-864

Решение:
Изобразим табличные данные графически:

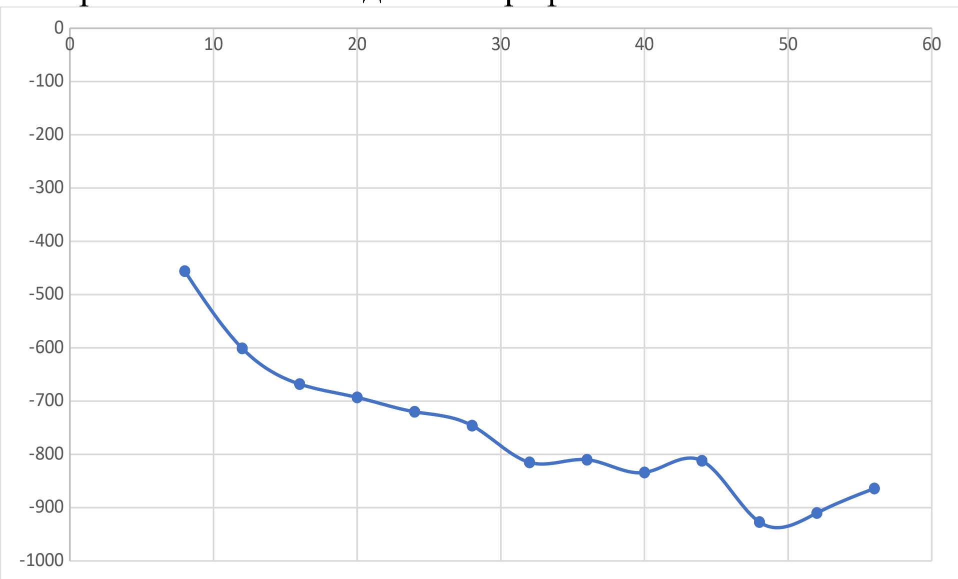


График 6 – График, построенный по исходной сеточной функции.

Из рисунка видно, что сразу нельзя определить вид аппроксимирующей функции(имеется облако точек, не имеющих определенную последовательность). В качестве эмпирической формулы для аппроксимирующей функции можно принять квадратичную или линейную функции :

1)

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

Имеем m=2, n = 13 (m – степень полинома и n – количество узлов). Запишем критерий минимизации

$$\Phi = \sum_{i=1}^{n} \left(a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 - f_i \right)^2 \rightarrow min$$

Запишем частные производные по коэффициентам

$$\frac{\partial \Phi}{\partial a_0} = 2 \sum_{i=1}^{n} \left(a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 - f_i \right) = 0$$
$$\frac{\partial \Phi}{\partial a_1} = 2 \sum_{i=1}^{n} \left(a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 - f_i \right) x_i = 0$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial a_2}=2\sum_{i=1}^{n}\left(a_0+a_1 x_i+a_2 x_i^2-f_i\right)x_i^2=0$$

Раскроем скобки и получим систему

$$n a_0+a_1\sum_{i=1}^{n} x_i+a_2\sum_{i=1}^{n} x_i^2=\sum_{i=1}^{n} f_i$$
$$a_0\sum_{i=1}^{n} x_i+a_1\sum_{i=1}^{n} x_i^2+a_2\sum_{i=1}^{n} x_i^3=\sum_{i=1}^{n} f_i\cdot x_i$$
$$a_0\sum_{i=1}^{n} x_i^2+a_1\sum_{i=1}^{n} x_i^3+a_2\sum_{i=1}^{n} x_i^4=\sum_{i=1}^{n} f_i\cdot x_i^2$$

n=13.

$$\sum_{i=1}^{n} x_i=8+20+32+44+56+\ldots=416$$
$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2=8^2+20^2+32^2+44^2+56^2+\ldots=16224$$
$$\sum_{i=1}^{n} x_i^3=8^3+20^3+32^3+44^3+56^3+\ldots=705536$$
$$\sum_{i=1}^{n} x_i^4=8^4+20^4+32^4+44^4+56^4+\ldots=32687616$$

$$\sum_{i=1}^{n} f_i=-456-693-815-812-864\ldots=\text{¿}-9856\text{¿}$$
$$\sum_{i=1}^{n} f_i\cdot x_i=-456\cdot 8+(-693)\cdot 20+(-815)\cdot 32+(-812)\cdot 44+(-864)\cdot 56+\ldots=-338104$$
$$\sum_{i=1}^{n} f_i\cdot x_i^2=-456\cdot 8^2+(-693)\cdot 20^2+(-815)\cdot 32^2+(-812)\cdot 44^2+(-864)\cdot 56^2+\ldots=\text{¿}\text{-13660224}$$

Получаем систему уравнений

$$13 a_0+416 a_1+16224 a_2=-9856$$
$$416 a_0+16224 a_1+705536 a_2=-338104$$
$$16224 a_0+705536 a_1+32687616 a_2=-13660224$$

¿
¿

Решаем её с помощью метода Крамера

$a_0=-362,42$

$a_1=-19,49$

$a_2=0,18$

Т.о. получим аппроксимирующую функцию для исходной сеточной функции

$$y = -362,42 - 19,49x + 0,18x^2$$

Построим график аппроксимирующей функции по исходным значениям X

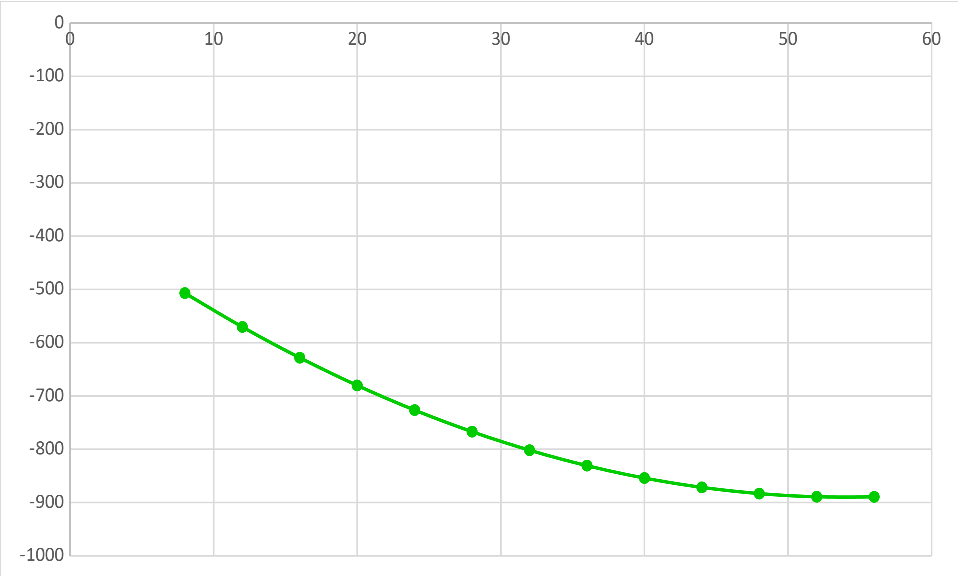
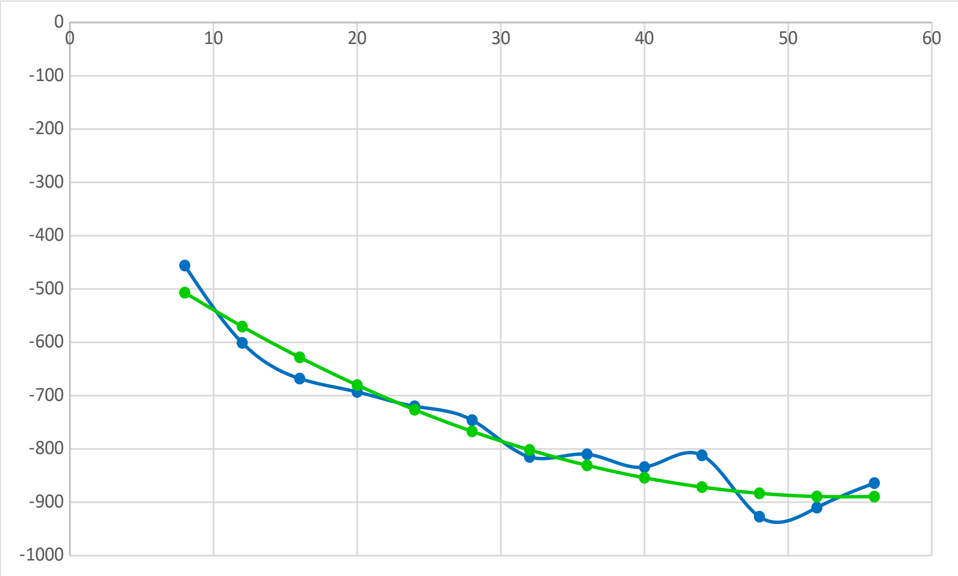


График 7 – График, построенный по аппроксимирующей функции

X	8	12	16	20	24	28	32	36	40	44	48	52	56
F	-456	-601	-668	-693	-720	-746	-815	-810	-834	-812	-927	-910	-864
f	-506,82	-570,38	-628,18	-680,22	-726,5	-767,02	-801,78	-830,78	-854,02	-871,5	-883,22	-889,18	-889,38

График 8 – Совмещенные графики.



X	8	12	16	20	24	28	32	36	40	44	48	52	56
F	-456	-601	-668	-693	-720	-746	-815	-810	-834	-812	-927	-910	-864
f	-506,82	-570,38	-628,18	-680,22	-726,5	-767,02	-801,78	-830,78	-854,02	-871,5	-883,22	-889,18	-889,38
Абс погр-ть, |F-y|	50,82	30,62	39,82	12,78	6,5	21,02	13,22	20,78	20,02	59,5	43,78	20,82	25,38
Относ.погр-ть,|F-y|/F *100%	-0,111	-0,051	-0,060	-0,018	-0,009	-0,028	-0,016	-0,026	-0,024	-0,073	-0,047	-0,023	-0,029

Сумма квадратов отклонений (абсолютных погрешностей) Φ = 13295,24.

2) Линейная аппроксимация

Имеем m=1, n = 13 (m – степень полинома и n – количество узлов). Запишем критерий минимизации

$$\Phi=\sum_{i=1}^{n}\left(a_0+a_1 x_i-f_i\right)^2\rightarrow min$$

Запишем частные производные по коэффициентам

$$\frac{\partial \Phi}{\partial a_0}=2\sum_{i=1}^{n}\left(a_0+a_1 x_i-f_i\right)=0$$
$$\frac{\partial \Phi}{\partial a_1}=2\sum_{i=1}^{n}\left(a_0+a_1 x_i-f_i\right)x_i=0$$

Раскроем скобки и получим систему

$$n a_0+a_1\sum_{i=1}^{n} x_i=\sum_{i=1}^{n} f_i$$
$$a_0\sum_{i=1}^{n} x_i+a_1\sum_{i=1}^{n} x_i^2=\sum_{i=1}^{n} f_i\cdot x_i$$

n=13.

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 8+20+32+44+56+\ldots = 416$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 8^2+20^2+32^2+44^2+56^2+\ldots = 16224$$

$$\sum_{i=1}^{n} f_i = -456-693-815-812-864\ldots = ¿-9856¿$$

$$\sum_{i=1}^{n} f_i \cdot x_i = -456\cdot 8+(-693)\cdot 20+(-815)\cdot 32+(-812)\cdot 44+(-864)\cdot 56+\ldots = -338104$$

Получаем систему уравнений

$$13a_0+416a_1=-9856$$
$$416a_0+16224a_1=-338104$$
$$¿$$

Решаем её с помощью метода Крамера

$a_0=-508,57$

$a_1=-7,80$

Т.о. получим аппроксимирующую функцию для исходной сеточной функции

$$y=-508,57-7,80x$$

Построим график аппроксимирующей функции по исходным значениям X

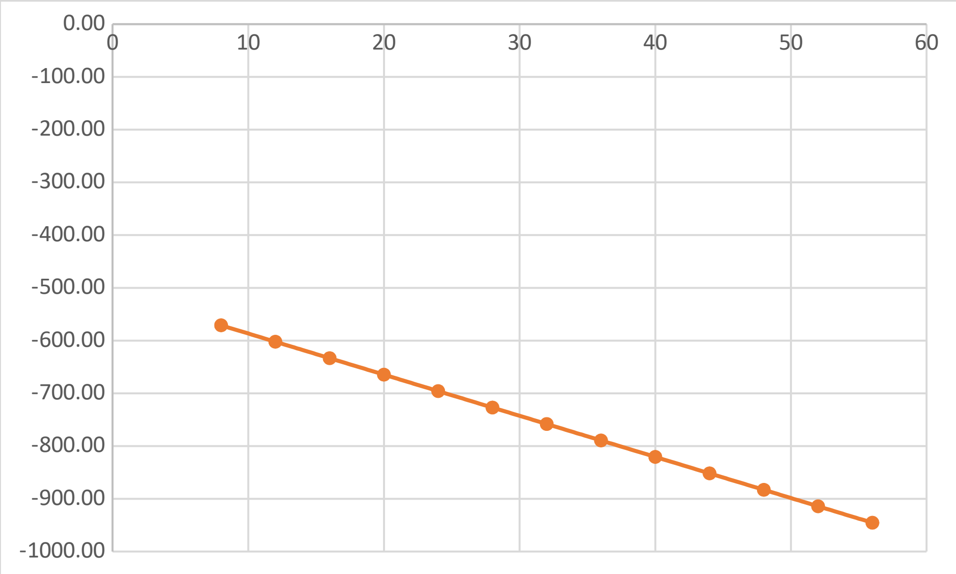
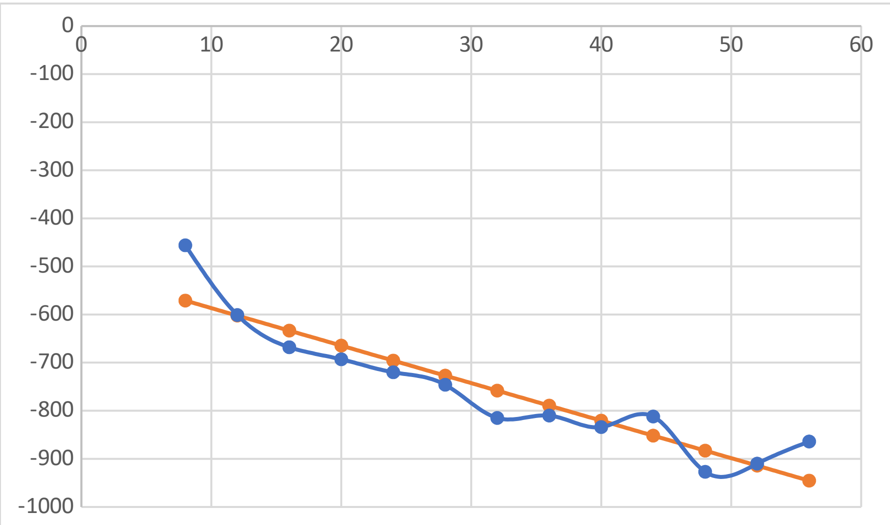


График 8 – График, построенный по аппроксимирующей функции

X	8	12	16	20	24	28	32	36	40	44	48	52	56
F	-456	-601	-668	-693	-720	-746	-815	-810	-834	-812	-927	-910	-864
f	-570,97	-602,16	-633,36	-664,56	-695,76	-726,96	-758,15	-789,35	-820,55	-851,75	-882,95	-914,14	-945,34

График 9 – Совмещенные графики.



Сумма квадратов отклонений (абсолютных погрешностей) *Ф* = 30170,57.

Выводы: Интерполяционный многочлен четвертой степени показывает большую погрешность, что говорит о недостаточной точности экспериментальных данных, точно отражающих зависимость y от x. Аппроксимация квадратичным многочленом дает очень малые погрешности, что также свидетельствует о точности экспериментальных данных и отчетливой выраженности тенденции. Линейная аппроксимация дает также большие погрешности. На основе проведенного анализа можно утверждать, что наиболее адекватным приближением будет интерполяция квадратичным многочленом.