Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования

«Новосибирский государственный технический университет»

Кафедра вычислительной техники

Отчет

По расчётно-графической работе

По дисциплине: «Основы теории управления»

Выполнил: Преподаватель: Воевода А.А.

Группа:

Новосибирск, 2022

Цель работы

Исследовать систему, состоящую из трёх пружин и трёх грузов. Провести теоретические расчёты и реализовать систему в пакете Matlab Simulink. Добиться устойчивости системы путём расчёта и добавления к ней регулятора. Перевести получившуюся систему в дискретный вид.

Задание

Дана трёхмассовая система без демпфирования (d1=d2=d3=0):

$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1 + j_1x_1 + j_2(x_1 - x_2) = u_1, \\ m_2\ddot{x}_2 + j_2(x_2 - x_1) + j_3(x_2 - x_3) = u_2, \\ m_3\ddot{x}_3 + j_3(x_3 - x_2) = u_3. \end{cases}$$

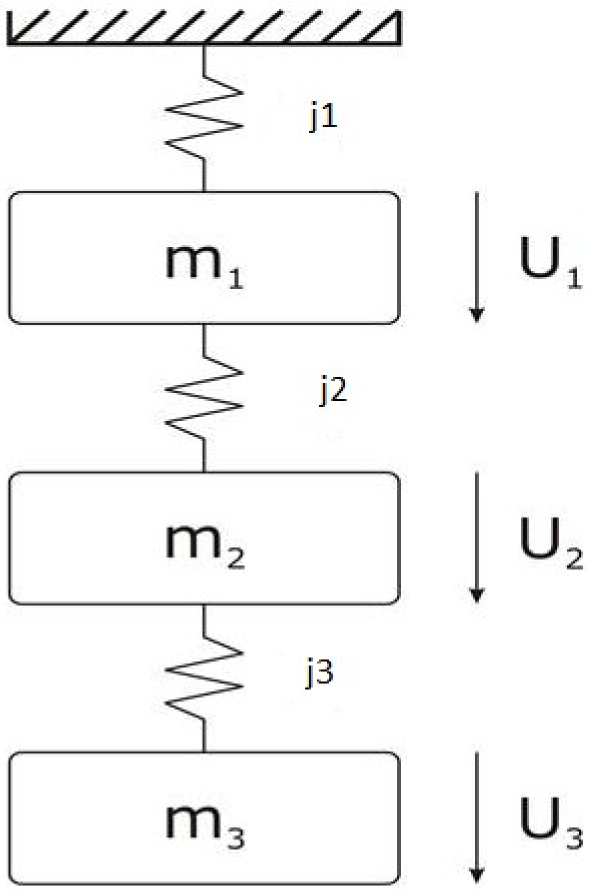

Рис.1. Схема задания

Сила прикладывается только ко второй массе u1=u3=0. Стоит задача управлять положением первой массы x1. В качестве входных параметров были взяты: m1 = 3, m2 = 2, m3 = 1, j1 = 4, j2 = 5, j3 = 6. В качестве входного сигнала – u2.

Ход работы

Силы, действующие на данную систему систему:

$$\vec{F}_1 = -j_1 x_1$$

$$\vec{F}_2 = -j_2 (x_2 - x_1)$$

$$\vec{F}_3 = -j_3 (x_3 - x_2)$$

Составим систему на основе второго закона Ньютона:

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 = F_1 - F_2 \\ m_2 \ddot{x}_2 = F_2 - F_3 + u_2 \\ m_3 \ddot{x}_3 = F_3 \end{cases}$$

Тогда

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 = -j_1 x_1 + j_2 (x_2 - x_1) \\ m_2 \ddot{x}_2 = -j_2 (x_2 - x_1) + j_3 (x_3 - x_2) + u_2 \\ m_3 \ddot{x}_3 = -j_3 (x_3 - x_2) \end{cases}$$

Преобразование Лапаласа:

$$\begin{cases} m_1 s^2 x_1 = -j_1 x_1 + j_2 (x_2 - x_1) \\ m_2 s^2 x_2 = -j_2 (x_2 - x_1) + j_3 (x_3 - x_2) + u_2 \\ m_3 s^2 x_3 = -j_3 (x_3 - x_2) \end{cases}$$

Выразим:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{j_2}{m_1 s^2 + j_1 + j_2} * x_2 \\ x_2 = \dfrac{j_2 x_1}{m_1 s^2 + j_2 + j_3} * x_1 + \dfrac{j_3}{m_2 s^2 + j_2 + j_3} * x_3 + ¿\, x_3 = \dfrac{j_3}{m_3 s^2 + j_3} * x_2 \quad \dfrac{1}{m_2 s^2 + j_2 + j_3} * u_2 \end{cases}$$

Найдём решение системы в Matchad:

$$X := \mathrm{Find}(x1, x2, x3)$$

$$X \rightarrow \begin{pmatrix} \dfrac{j2 \cdot m3 \cdot u2 \cdot s^2 + j2 \cdot j3 \cdot u2}{j1 \cdot j2 \cdot j3 + j1 \cdot j2 \cdot m3 \cdot s^2 + j1 \cdot j3 \cdot m2 \cdot s^2 + j2 \cdot j3 \cdot m1 \cdot s^2 + j1 \cdot j3 \cdot m3 \cdot s^2 + j2 \cdot j3 \cdot m2 \cdot s^2 + j2 \cdot j3 \cdot m3 \cdot s^2 + j1 \cdot m2 \cdot m3 \cdot s^4 + j2 \cdot m1 \cdot m3 \cdot s^4 + j3 \cdot m1 \cdot m2 \cdot s^4 + j2 \cdot m2 \cdot m3 \cdot s^4 + j3 \cdot m1 \cdot m3 \cdot s^4 + m1 \cdot m2 \cdot m3 \cdot s^6} \\ \dfrac{j1 \cdot j3 \cdot u2 + j2 \cdot j3 \cdot u2 + j1 \cdot m3 \cdot s^2 \cdot u2 + j3 \cdot m1 \cdot s^2 \cdot u2 + j2 \cdot m3 \cdot s^2 \cdot u2 + m1 \cdot m3 \cdot s^4 \cdot u2}{j1 \cdot j2 \cdot j3 + j1 \cdot j2 \cdot m3 \cdot s^2 + j1 \cdot j3 \cdot m2 \cdot s^2 + j2 \cdot j3 \cdot m1 \cdot s^2 + j1 \cdot j3 \cdot m3 \cdot s^2 + j2 \cdot j3 \cdot m2 \cdot s^2 + j2 \cdot j3 \cdot m3 \cdot s^2 + j1 \cdot m2 \cdot m3 \cdot s^4 + j2 \cdot m1 \cdot m3 \cdot s^4 + j3 \cdot m1 \cdot m2 \cdot s^4 + j2 \cdot m2 \cdot m3 \cdot s^4 + j3 \cdot m1 \cdot m3 \cdot s^4 + m1 \cdot m2 \cdot m3 \cdot s^6} \\ \dfrac{j3 \cdot m1 \cdot u2 \cdot s^2 + j1 \cdot j3 \cdot u2 + j2 \cdot j3 \cdot u2}{j1 \cdot j2 \cdot j3 + j1 \cdot j2 \cdot m3 \cdot s^2 + j1 \cdot j3 \cdot m2 \cdot s^2 + j2 \cdot j3 \cdot m1 \cdot s^2 + j1 \cdot j3 \cdot m3 \cdot s^2 + j2 \cdot j3 \cdot m2 \cdot s^2 + j2 \cdot j3 \cdot m3 \cdot s^2 + j1 \cdot m2 \cdot m3 \cdot s^4 + j2 \cdot m1 \cdot m3 \cdot s^4 + j3 \cdot m1 \cdot m2 \cdot s^4 + j2 \cdot m2 \cdot m3 \cdot s^4 + j3 \cdot m1 \cdot m3 \cdot s^4 + m1 \cdot m2 \cdot m3 \cdot s^6} \end{pmatrix}$$

Нас интересует x_1

$$x1 := X_{0,0}$$

$$x1 \rightarrow \frac{j2 \cdot m3 \cdot u2 \cdot s^2 + j2 \cdot j3 \cdot u2}{j1 \cdot j2 \cdot j3 + j1 \cdot j2 \cdot m3 \cdot s^2 + j1 \cdot j3 \cdot m2 \cdot s^2 + j2 \cdot j3 \cdot m1 \cdot s^2 + j1 \cdot j3 \cdot m3 \cdot s^2 + j2 \cdot j3 \cdot m2 \cdot s^2 + j2 \cdot j3 \cdot m3 \cdot s^2 + j1 \cdot m2 \cdot m3 \cdot s^4 + j2 \cdot m1 \cdot m3 \cdot s^4 + j3 \cdot m1 \cdot m2 \cdot s^4 + j2 \cdot m2 \cdot m3 \cdot s^4 + j3 \cdot m1 \cdot m3 \cdot s^4 + m1 \cdot m2 \cdot m3 \cdot s^6}$$

Теперь необходимо подставить исходные значения в полученный полином.

$$X := \mathrm{Find}(x1, x2, x3)$$

$$X \rightarrow \begin{pmatrix} \dfrac{5 \cdot u2 \cdot s^2 + 30 \cdot u2}{6 \cdot s^6 + 87 \cdot s^4 + 272 \cdot s^2 + 120} \\ \dfrac{3 \cdot u2 \cdot s^4 + 27 \cdot u2 \cdot s^2 + 54 \cdot u2}{6 \cdot s^6 + 87 \cdot s^4 + 272 \cdot s^2 + 120} \\ \dfrac{18 \cdot u2 \cdot s^2 + 54 \cdot u2}{6 \cdot s^6 + 87 \cdot s^4 + 272 \cdot s^2 + 120} \end{pmatrix}$$

Тогда передаточная функция системы будет иметь вид:

$$W = \frac{x_1}{u_2} = \frac{5 s^2 + 30}{6 s^6 + 87 s^4 + 272 s^2 + 120}$$

Схема в Simulik:

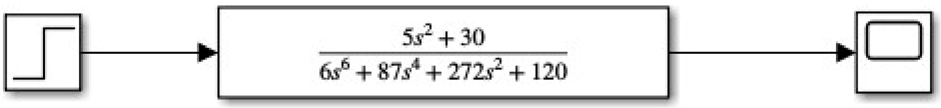

Рис.2. Построенная схема в Simulink

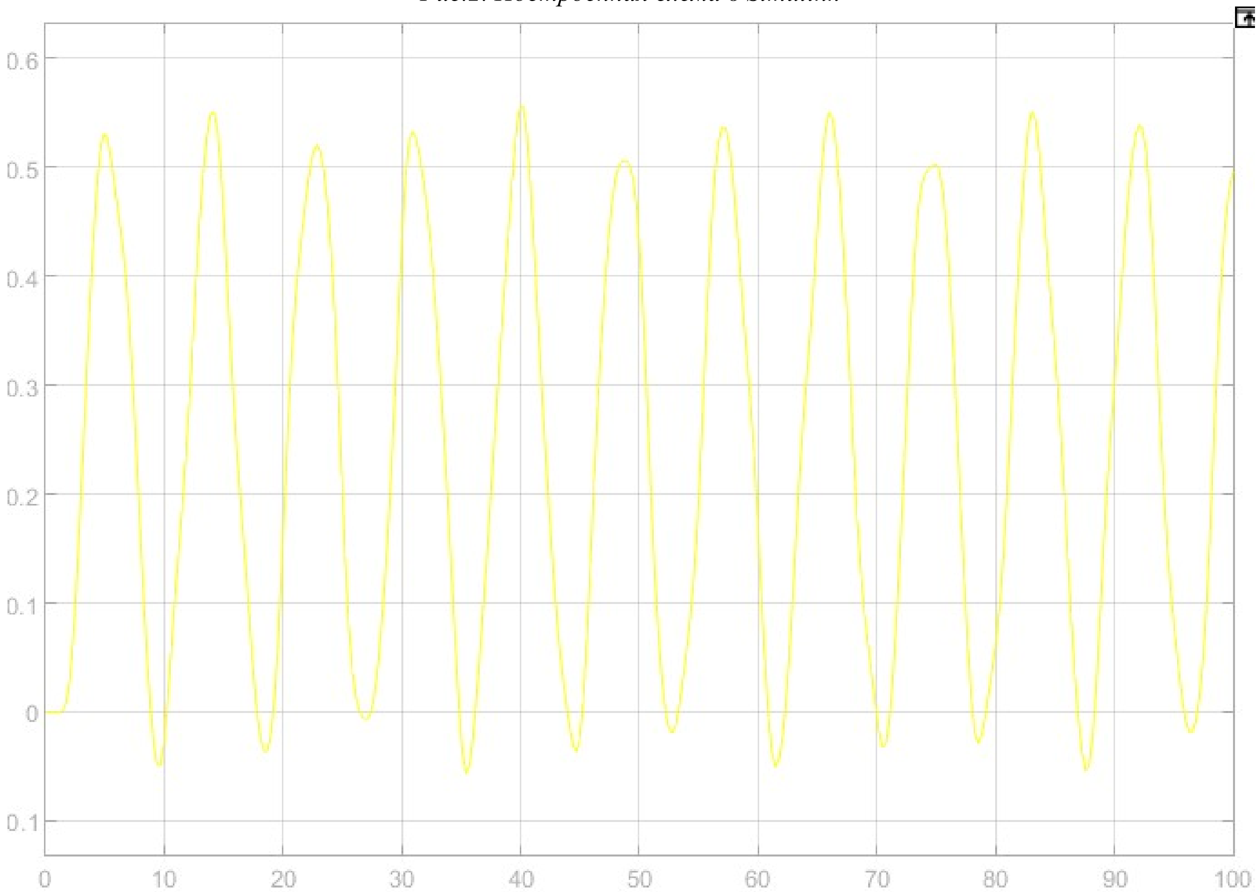

Рис.3.График переходной функции системы

С помощью Simulink построим диаграмму Боде и годограф Найквиста:

```
>> W = tf([5 0 30],[6 0 87 0 272 0 120])

W =

            5 s^2 + 30
  ------------------------------
  6 s^6 + 87 s^4 + 272 s^2 + 120

Continuous-time transfer function.

>> bode(W)
>> nyquist(W)
```

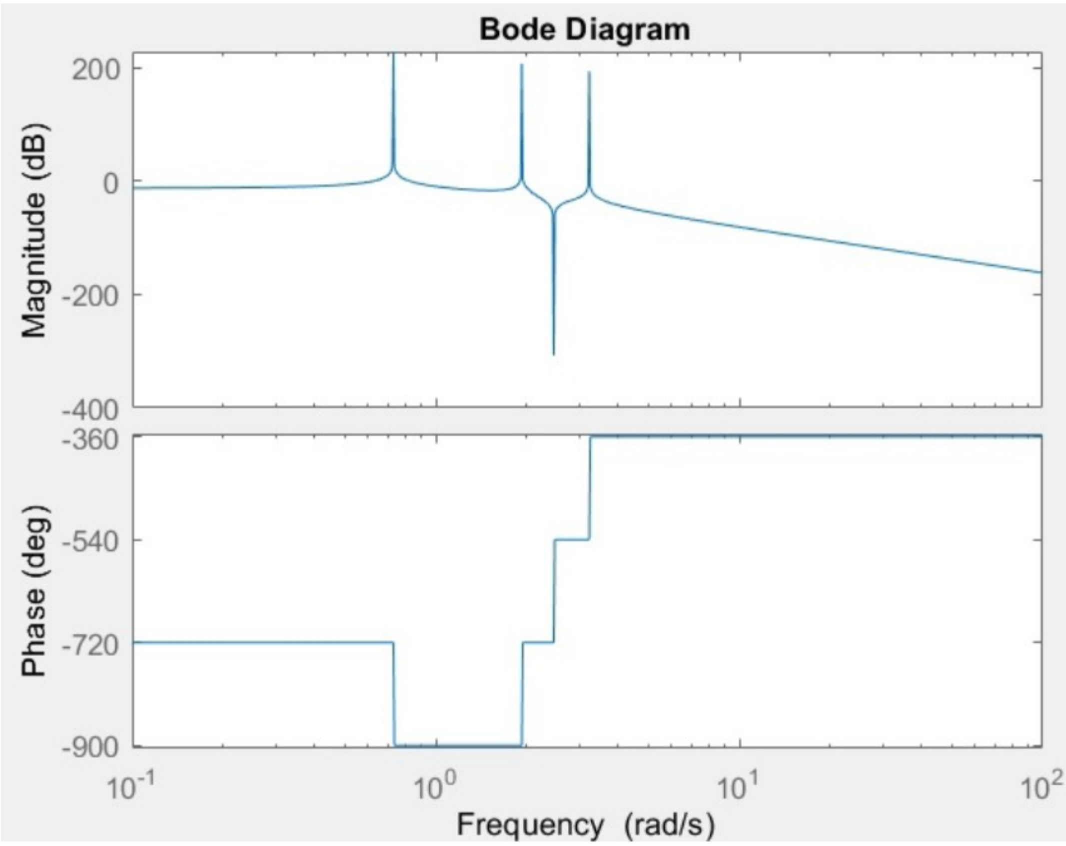

Рис.4. ЛАЧХ и ЛФЧХ

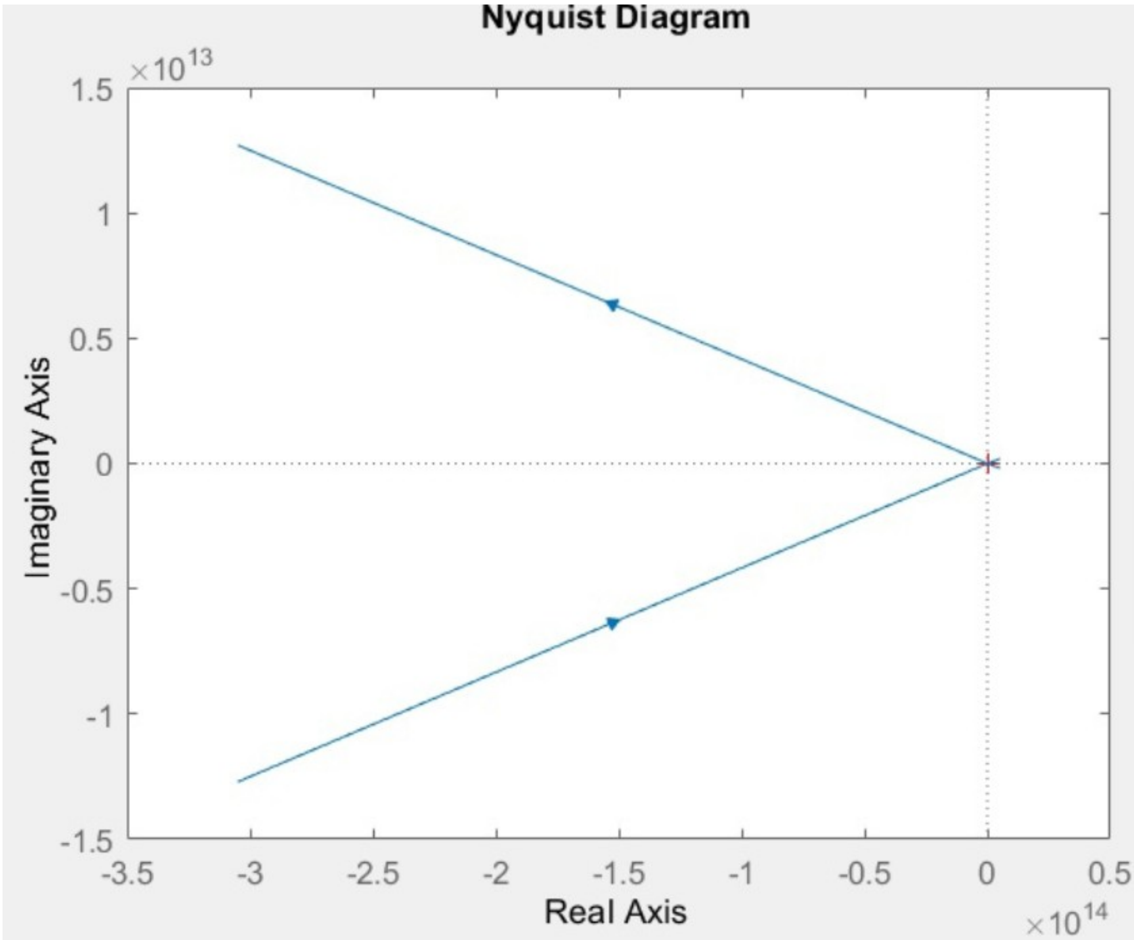

Рис.5. Годограф Найквиста

Найдём корни ХПЗС в Matlab:

```
>> W = tf([5 0 30],[6 0 87 0 272 0 120])

W =

            5 s^2 + 30
  ------------------------------
  6 s^6 + 87 s^4 + 272 s^2 + 120

Continuous-time transfer function.

>> Wcl = W/(1+W)

Wcl =

                 30 s^8 + 615 s^6 + 3970 s^4 + 8760 s^2 + 3600
  ---------------------------------------------------------------------------
  36 s^12 + 1044 s^10 + 10863 s^8 + 49383 s^6 + 98834 s^4 + 74040 s^2 + 18000
```

Рис.7. Поиск корней

```
>>  roots([36 0 1044 0 10863 0 49383 0 98834 0 74040 0 18000])

ans =

   0.0000 + 3.2061i
   0.0000 - 3.2061i
  -0.0000 + 3.1974i
  -0.0000 - 3.1974i
  -0.0000 + 1.9221i
  -0.0000 - 1.9221i
  -0.0000 + 1.8965i
  -0.0000 - 1.8965i
   0.0000 + 0.8246i
   0.0000 - 0.8246i
   0.0000 + 0.7257i
   0.0000 - 0.7257i
```

Рис.6. Корни ХПЗС

Как видно из рис.8 система находится на границе устойчивости

По методу размещения полюсов передаточной функции замкнутой системы выберем регулятор. Проведем необходимые вычисления в система MatchCAD. Приходим к тому, что ХПЗС сводится к биному Ньютона 11 степени. Тогда останется приравнять коэффициенты при одинаковых степенях s – решить матричное уравнение.

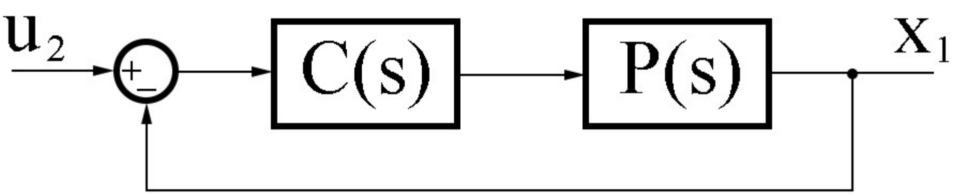

Рисунок 7. Структурная схема системы с регулятором в общем виде

Где $C(s)$ – регулятор, $P(s)$ – объект управления.

Выберем регулятор вида:

$$C(s)=\frac{n_c(s)}{d_c(s)}=\frac{a_5 s^5+a_4 s^4+a_3 s^3+a_2 s^2+a_1 s+a_0}{b_5 s^5+b_4 s^4+b_3 s^3+b_2 s^2+b_1 s+b_0}$$

$$P(s)=\frac{n(s)}{d(s)}=\frac{15 s^2+20}{6 s^6+101 s^4+330 s^2+120}$$

Необходимо определить коэффициенты $a_5, a_4, a_3, a_2, a_1, a_0, b_5, b_4, b_3, b_2,$ b_1, b_0.

ХПЗС:

$n\_c := a5 \cdot s^5 + a4 \cdot s^4 + a3 \cdot s^3 + a2 \cdot s^2 + a1 \cdot s + a0$

$d\_c := b5 \cdot s^5 + b4 \cdot s^4 + b3 \cdot s^3 + b2 \cdot s^2 + b1 \cdot s + b0$

$n := 5 \cdot s^2 + 30$

$d := 6 \cdot s^6 + 87 \cdot s^4 + 272 \cdot s^2 + 120$

$\Delta := n \cdot n\_c + d \cdot d\_c$

$\Delta \to (6 \cdot s^6 + 87 \cdot s^4 + 272 \cdot s^2 + 120) \cdot (b5 \cdot s^5 + b4 \cdot s^4 + b3 \cdot s^3 + b2 \cdot s^2 + b1 \cdot s + b0) + (5 \cdot s^2 + 30) \cdot (a5 \cdot s^5 + a4 \cdot s^4 + a3 \cdot s^3 + a2 \cdot s^2 + a1 \cdot s + a0)$

$\Delta \text{ expand } \to 30 \cdot a0 + 120 \cdot b0 + 5 \cdot a0 \cdot s^2 + 5 \cdot a1 \cdot s^3 + 30 \cdot a2 \cdot s^2 + 5 \cdot a2 \cdot s^4 + 30 \cdot a3 \cdot s^3 + 5 \cdot a3 \cdot s^5 + 30 \cdot a4 \cdot s^4 + 5 \cdot a4 \cdot s^6 + 30 \cdot a5 \cdot s^5 + 5 \cdot a5 \cdot s^7 + 272 \cdot b0 \cdot s^2 + 87 \cdot b0 \cdot s^4 + 272 \cdot b1 \cdot s^3 + 120 \cdot b2 \cdot s^2 + 6 \cdot b0 \cdot s^6 + 87 \cdot b1 \cdot s^5 + 272 \cdot b2 \cdot s^4 + 120$

Предположим, что мы хотим выбрать регулятор так, чтобы разместить корни полинома $\Delta(s)$ в заданных точках, то есть добиться выполнения равенства $\Delta(s)=(s+1)^{11}$.

По биному Ньютона:

$$(s+1)^{11}=s^{11}+11 s^{10}+55 s^9+165 s^8+330 s^7+462 s^6+462 s^5+330 s^4+165 s^3+55 s^2+11 s+1$$

Поиск неизвестных коэффициентов сводим к решению матричного уравнения вида:

$AX=B,$

$X=A^{-1} B,$

где X – искомые коэффициенты, A – коэффициенты при X, B – коэффициенты бинома Ньютона.

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 87 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 87 & 0 & 6 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 272 & 0 & 87 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 272 & 0 & 87 & 0 & 6 \\ 30 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 120 & 0 & 272 & 0 & 87 & 0 \\ 0 & 30 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 120 & 0 & 272 & 0 & 87 \\ 0 & 0 & 30 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 120 & 0 & 272 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 30 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 120 & 0 & 272 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 30 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 120 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 30 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 120 \end{pmatrix} \qquad B := \begin{pmatrix} 1 \\ 11 \\ 55 \\ 165 \\ 330 \\ 462 \\ 462 \\ 330 \\ 165 \\ 55 \\ 11 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$X := A^{-1} \cdot B =$$

	0
0	-131.091
1	-99.065
2	-515.58
3	-532.309
4	-234.88
5	-252.572
6	0.167
7	1.833
8	6.75
9	0.917
10	58.812
11	63.151

Рис.7. Найденные коэффициенты регулятора

Подставим полученные коэффициенты в регулятора и соберем структурную схему в Simulink:

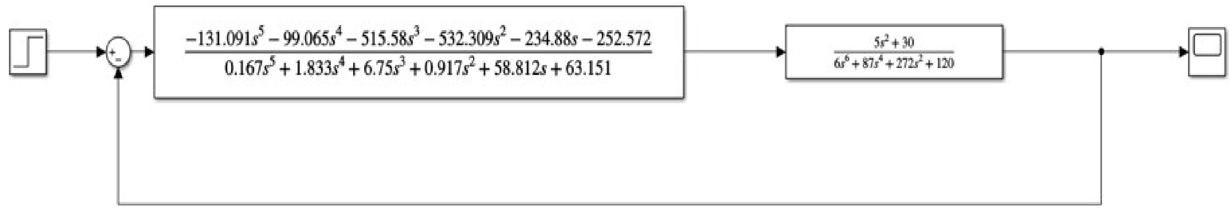

Рис.8. Структурная схема с регулятором

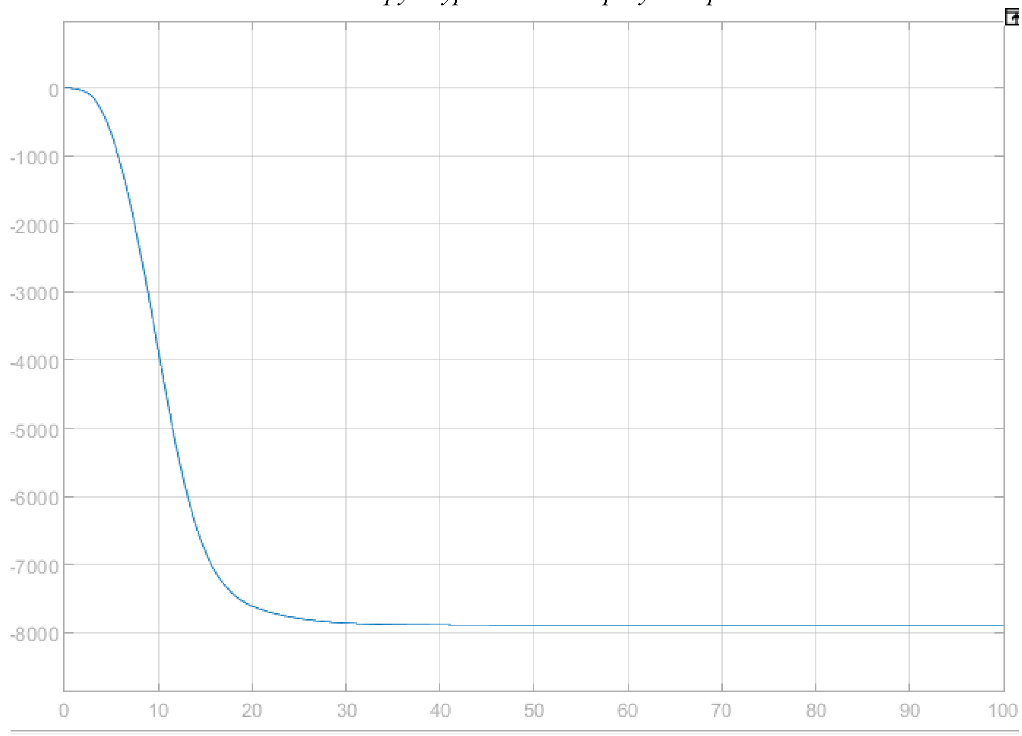

Рис.9. График переходной функции

Построим в Matlab диаграммы bode и годограф Найкфиста:

```
>> W = tf([5 0 30],[6 0 87 0 272 0 120])

W =

             5 s^2 + 30
  ------------------------------
  6 s^6 + 87 s^4 + 272 s^2 + 120

Continuous-time transfer function.
```

```
>> Wr = tf([-131.091 -99.065 -515.58 -532.309 -234.88 -252.572],[0.167 1.833 6.75 0.917 58.812 63.151])

Wr =

  -131.1 s^5 - 99.06 s^4 - 515.6 s^3 - 532.3 s^2 - 234.9 s - 252.6
  -----------------------------------------------------------------
   0.167 s^5 + 1.833 s^4 + 6.75 s^3 + 0.917 s^2 + 58.81 s + 63.15

Continuous-time transfer function.
>>
>> Wcl = (W*Wr)/(1+W*Wr)

Wcl =

    -656.8 s^18 - 7705 s^17 - 4.804e04 s^16 - 2.126e05 s^15 - 1.165e06 s^14 - 2.7e06 s^13 - 1.35e07 s^12 - 2.293e07 s^11 - 8.447e07 s^10

            - 1.323e08 s^9 - 2.969e08 s^8 - 4.493e08 s^7 - 5.859e08 s^6 - 7.613e08 s^5 - 6.216e08 s^4 - 4.969e08 s^3 - 3.113e08 s^2

                                                                                                          - 1.069e08 s - 5.742e07

  -----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

  1.004 s^22 + 22.04 s^21 + 231.2 s^20 + 1541 s^19 + 7975 s^18 + 3.405e04 s^17 + 1.227e05 s^16 + 3.832e05 s^15 + 1.055e06 s^14 + 2.548e06 s^13

          + 5.369e06 s^12 + 9.797e06 s^11 + 1.534e07 s^10 + 2.032e07 s^9 + 2.251e07 s^8 + 2.068e07 s^7 + 1.565e07 s^6 + 9.681e06 s^5

                                                             + 4.808e06 s^4 + 1.846e06 s^3 + 5.112e05 s^2 + 9.044e04 s + 7275

>> bode(Wcl)
>> nyquist(Wcl)
```

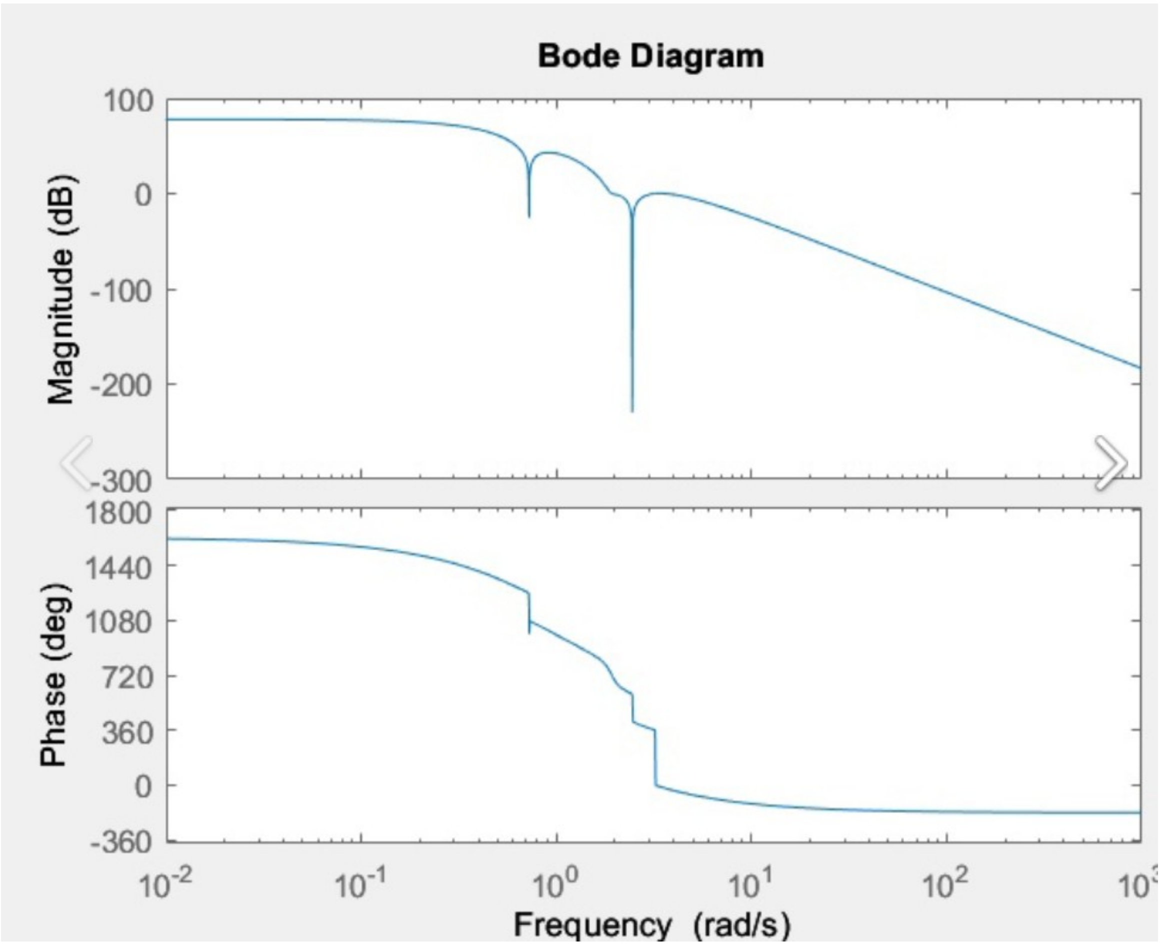

Рис.10 ЛАЧХ и ЛФЧХ

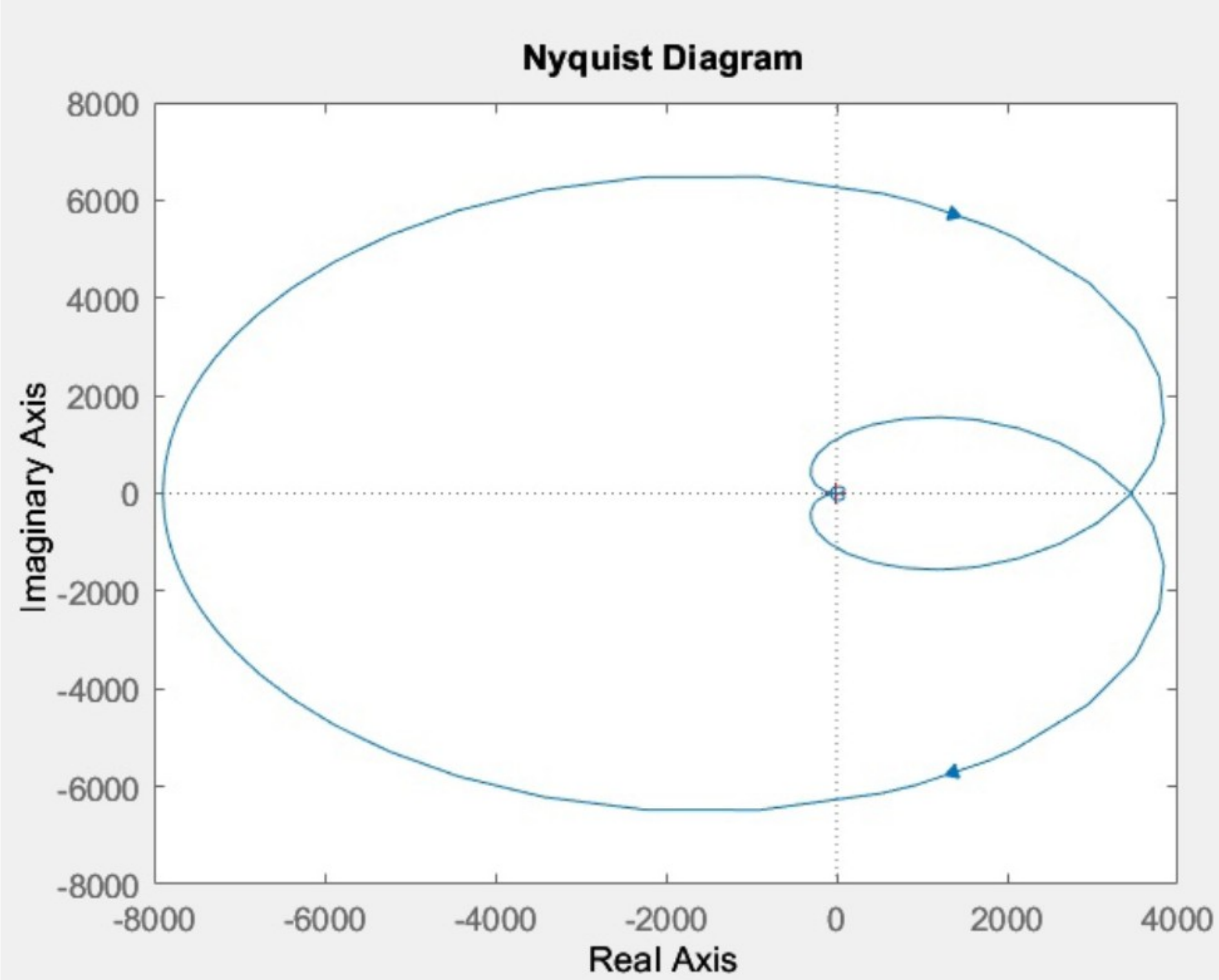

Рис.11 Годограф Найквиста

```
ans =

  -6.1175 + 3.6429i
  -6.1175 - 3.6429i
  -0.0001 + 3.2080i
  -0.0001 - 3.2080i
  -1.1363 + 2.4725i
  -1.1363 - 2.4725i
  -2.5580 + 1.0570i
  -2.5580 - 1.0570i
  -0.0045 + 1.9420i
  -0.0045 - 1.9420i
  -1.2841 + 1.1589i
  -1.2841 - 1.1589i
  -0.5338 + 0.9388i
  -0.5338 - 0.9388i
  -0.9941 + 0.0000i
  -0.0025 + 0.7212i
  -0.0025 - 0.7212i
  -0.6679 + 0.3702i
  -0.6679 - 0.3702i
  -0.3289 + 0.3904i
  -0.3289 - 0.3904i
  -0.2368 + 0.0000i
```

Рис.12. Корни ХПЗС

Так как все корни ХПЗС расположены в левой полуплоскоти, то система устойчива.

Переведем теперь систему в дискретный вид, используя функцию c2d(), transfer function регулятора и шаг дискретизации 0.1.

```
>> Wr = tf([-131.091 -99.065 -515.58 -532.309 -234.88 -252.572],[0.167 1.833 6.75 0.917 58.812 63.151])

Wr =

  -131.1 s^5 - 99.06 s^4 - 515.6 s^3 - 532.3 s^2 - 234.9 s - 252.6
  ----------------------------------------------------------------
   0.167 s^5 + 1.833 s^4 + 6.75 s^3 + 0.917 s^2 + 58.81 s + 63.15

Continuous-time transfer function.

>> c2d(Wr,0.1)

ans =

  -785 z^5 + 3766 z^4 - 7249 z^3 + 6986 z^2 - 3367 z + 648.2
  ----------------------------------------------------------
   z^5 - 4.09 z^4 + 6.63 z^3 - 5.301 z^2 + 2.096 z - 0.3337

Sample time: 0.1 seconds
Discrete-time transfer function.
```

Теперь соберём схему в Simulink, заменив блок Trunsfer func у регулятора на блок Discrete Trunsfer func:

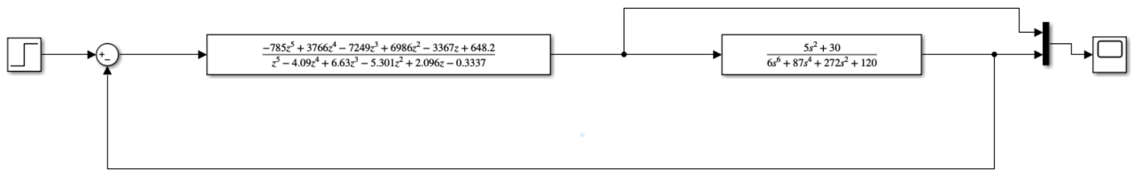

Рис.13. Структурная схема с дискретным регулятором

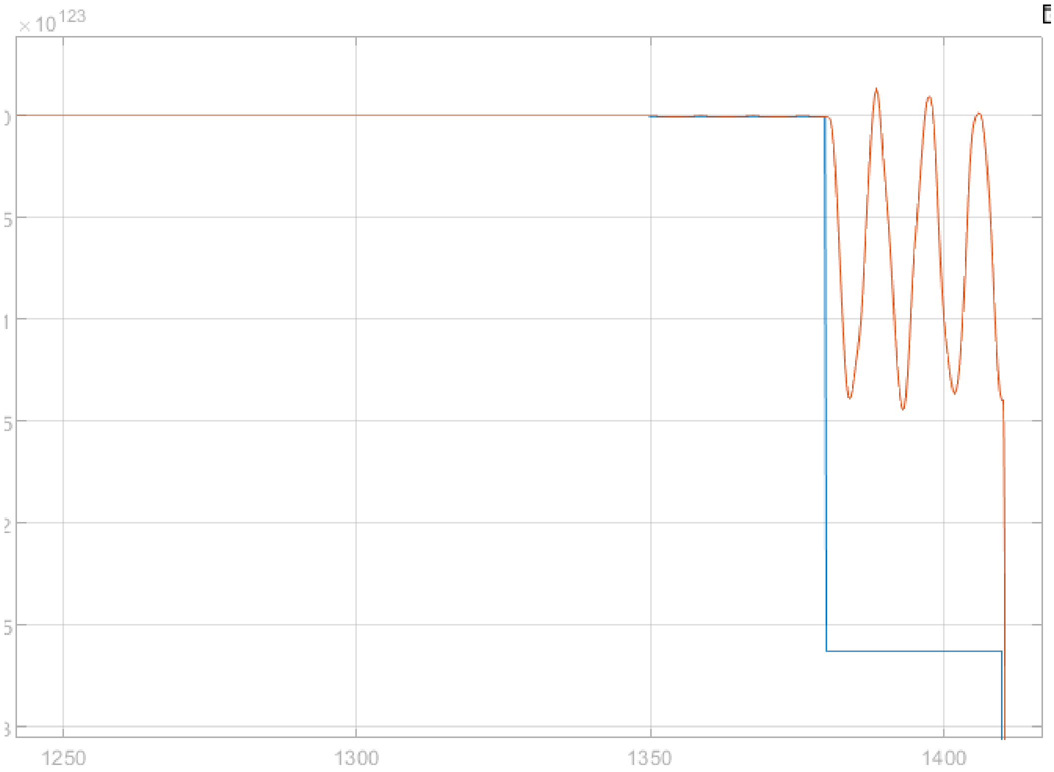

Рис.14. График

Вывод

В ходе выполнения работы была исследована система из трех пружин и трех грузов. Найдена transfer function зависимости входного и выходного сигналов. Найден регулятор для достижения устойчивости системы, он же переведен в дискретный вид.