Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования

ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ СИСТЕМ
УПРАВЛЕНИЯ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ (ТУСУР)

Кафедра автоматизированных систем управления (АСУ)

Отчет
По дисциплине «Математика»

Контрольная работа №1
Вариант 5

Выполнил:

Студент гр.

________________ /

«____»________________2023г.

Проверил:

________________ /

«____»________________2023г.

Томск 2023

Содержание

Введение

Контрольная работа №1 по дисциплине «Математика» выполняется после изучения глав «Неопределённый интеграл» и «Определённый интеграл». Контрольная работа содержит 17 задач.

Найти неопределённые интегралы.

Пример №1.

Решение:

$$\int \frac{x^2}{4+9x^6}dx=\frac{1}{3}\int d\frac{(x¿¿3)}{2^2+(3x^3)^2}=\frac{1}{9}\int d\frac{(3x¿¿3)}{2^2+(3x^3)^2}=\frac{\frac{1}{9}*1}{2}arctg\frac{3x^3}{2}+C=¿¿¿$$

$$¿\frac{1}{18}arctg\frac{3x^3}{2}+C=\frac{-1}{18}arctg\frac{3x^3}{2}+\tilde{C}.$$

Пример №2.

Решение:

$$\int ¿¿¿¿$$

Пример №3.

Решение:

$$\int ctg\,5x\,dx=¿\int\frac{\cos 5x}{\sin 5x}dx=\frac{1}{5}\int\frac{\cos 5x\,d(5x)}{\sin 5x}=\frac{1}{5}\int\frac{d(\sin 5x)}{\sin 5x}=\frac{1}{5}\ln|\sin 5x|+¿¿¿$$

$$+C.$$

Пример №4.

Решение:

$$\int\sqrt[5]{2-e^{3x}}*e^{3x}dx=\frac{1}{3}\int(2-e^{3x})^{\frac{1}{5}}*e^{3x}d(3x)=\frac{1}{3}\int(2-e^{3x})^{\frac{1}{5}}*d(e^{3x})=¿$$

$$¿\frac{1}{3}\int(2-e^{3x})^{\frac{1}{5}}*d(-2+e^{3x})=\frac{-1}{3}\int(2-e^{3x})^{\frac{1}{5}}*d(2-e^{3x})=\frac{-1}{3}*¿$$

$$-e^{3x}¿¿^{\frac{6}{5}}:\frac{6}{5}+C=\frac{-5}{18}*(2-e^{3x})^{\frac{6}{5}}+C.$$

Пример №5.

Решение:

$$\int x\,tg^2 9x\,dx\,;где\,U=x\,;dV=tg^2 9xdx\,;dU=dx\,;V=\int tg^2 9xdx.$$

Находим V:

$$\int tg^2 9xdx=\frac{1}{9}\int tg^2 9xd(9x)=\frac{1}{9}\int\frac{\sin^2 9x}{\cos^2 9x}d(9x)=\frac{1}{9}\int\frac{1-\cos^2 9x}{\cos^2 9x}d(9x)=¿¿$$

$$¿\frac{1}{9}\int\frac{1}{\cos^2 9x}d(9x)-\frac{1}{9}\int 1\,d(9x)=\frac{1}{9}tg\,9x-x+C.$$

$$UV-\int V(x)dU(x),$$

Следовательно:

$$\int x\,tg^2 9x\,dx=x*\left(\frac{1}{9}tg\,9x-x\right)-\int\left(\frac{1}{9}tg\,9x-x\right)dx=\frac{1}{9}tg\,9x-x^2-\frac{1}{9}*¿$$

$$¿\int tg\,9\,xdx\int xdx=\frac{1}{9}tg\,9x-x^2+\frac{x^2}{2}-\frac{1}{81}\int tg\,9\,xd(9x)=¿\frac{1}{9}tg\,9x-\frac{x^2}{2}+¿¿$$

$$\frac{+1}{81}\int d¿¿¿$$

Пример №6.

Решение:

$$\int\frac{x^{15}}{\sqrt{2+x^8}}dx\,;\,где\,U=x^8\,;dV=\frac{x^7}{\sqrt{2+x^8}}dx\,;\,dU=8x^7dx\,;\,V=\int\frac{x^7}{\sqrt{2+x^8}}dx.$$

Находим V:

$$\int\frac{x^7dx}{(2+x^8)^{\frac{1}{2}}}=¿\frac{1}{8}\int(2+x^8)^{\frac{-1}{2}}d(2+x^8)=\frac{1}{4}*(2+x^8)^{\frac{1}{2}}+C=\frac{1}{4}*\sqrt{2+x^8}+C.¿$$

$$UV-\int V(x)dU(x),$$

Следовательно:

$$\int\frac{x^{15}}{\sqrt{2+x^8}}dx=\frac{x^8*1}{4}*¿¿$$

$$+x^8¿¿^{\frac{1}{2}}-\frac{\frac{\frac{1}{4}*8}{1}*1}{8}\int(2+x^8)^{\frac{1}{2}}d(2+x^8)=\frac{x^8*1}{4}*\sqrt{2+x^8}-\frac{1}{6}*(2+x^8)^{\frac{3}{2}}+¿$$

$$+C\,\frac{¿x^8*1}{4}*\sqrt{2+x^8}-\frac{1}{6}¿(2+x^8)^{\frac{3}{2}}+C.$$

Пример №7.

Решение:

$$\int\frac{\sqrt{3x+1}-1}{\sqrt{3x+1}+1}dx\,;\,заменим\,3x+1=t^2,\,тогда\,dt=2\,tdt.$$

$$\int \frac{(t-1)2\,tdt}{t+1}=2\int \frac{tdt}{t+1}=2\int (1-\frac{1}{t+1}¿)\,dt=2\int 1\,dt-2\int \frac{d(t+1)}{t+1}=¿¿¿$$

$$¿2¿$$

Следовательно:

$$\int \frac{\sqrt{3x+1}-1}{\sqrt{3x+1}+1}\,dx=2¿¿$$

Пример №8.

Решение:

Преобразуем подынтегральную функцию:

$$\int \frac{dx}{\sin 6x+\cos 6x}=\int \frac{dx}{2\sin 3x\cos 3x+\cos^2 3x-\sin^2 3x}=¿¿$$

$$¿\int \frac{1}{\cos^2 3x\,(1+2\,tg\,3x-t\,g^2\,3x)}\,dx=¿¿\int \frac{1}{\cos^2 3x\,(2-(tg\,3x-1)^2)}\,dx=\frac{1}{3}\int \frac{d(tg\,3x-1)}{2-(tg\,3x-1)^2}=¿¿$$

$$¿\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}+tg\,3x-1}{\sqrt{2}-(tg\,3x-1)}\right|+C=\frac{1}{6\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}-1+tg\,3x}{\sqrt{2}+1-tg\,3x}\right|+C.$$

Пример №9.

Решение:

$$\int \frac{3x^3-3x^2+16}{(x^2-4x+8)(x+2)^2}\,dx$$

Разложим подынтегральную функцию на сумму простейших дробей:

$$\frac{3x^3-3x^2+16}{(x^2-4x+8)(x+2)^2}=\frac{Ax+B}{x^2-4x+8}+\frac{C}{x+2}+\frac{D}{(x+2)^2}=¿$$

$$¿\frac{(Ax+B)(x+2)^2+C(x+2)(x^2-4x+8)+D(x^2-4x+8)}{(x^2-4x+8)(x+2)^2}=¿$$

$$¿\frac{x^3(A+C)+x^2(4A+B-2C+D)+x(4A+4B-4D)+(4B+16C+8D)}{(x^2-4x+8)(x+2)^2}.$$

Коэффициенты A, B, C, D найдем из условия:

$$x^3(A+C)+x^2(4A+B-2C+D)+x(4A+4B-4D)+(4B+16C+8D)=\text{¿¿}3x^3-3x^2+16\cdot$$

Приравняем коэффициенты с одинаковыми степенями при x:

$$x^3: A+C=3x^2: 4A+B-2C+D=-3x^1: 4A+4B-4D=0x^0: 4B+16C+8D=16$$

Откуда

$$A=1B=-2C=2D=-1$$

Таким образом,

$$\frac{3x^3-3x^2+16}{(x^2-4x+8)(x+2)^2}=\frac{x-2}{x^2-4x+8}+\frac{2}{x+2}-\frac{1}{(x+2)^2}$$

$$\int\frac{3x^3-3x^2+16}{(x^2-4x+8)(x+2)^2}dx=\int\frac{x-2}{x^2-4x+8}dx+\int\frac{2dx}{x+2}-\text{¿}\int\frac{dx}{(x+2)^2}=\text{¿¿}$$

$$\text{¿}\frac{1}{2}\int\frac{d(x^2-4x+8)}{x^2-4x+8}+2\int\frac{dx}{x+2}-\text{¿}\int\frac{dx}{(x+2)^2}=\text{¿¿¿}\frac{1}{2}\ln|x^2-4x+8|+2\ln|x+2|+\frac{1}{x+2}+C.$$

Вычислить определённые интегралы.

Пример №10.

Решение:

$$\int_1^e x\ln^2 x dx$$

Применим формулу интегрирования по частям

$$\int udv=uv-\text{¿}\int vdu\text{¿}$$

$$\int_1^e x\ln^2 xdx=\left[\begin{array}{ll} u=\ln^2 x, & du=\dfrac{2\ln x\, dx}{x}, \\ dv=xdx, & v=\dfrac{x^2}{2}. \end{array}\right]=\left.\left(\frac{x^2\ln^2 x}{2}\right)\right|_1^e-\int_1^e x\ln x\, dx=\text{¿}$$

$$\text{¿}\begin{bmatrix} u=\ln x, & du=\dfrac{dx}{x}, \\ dv=xdx, & v=\dfrac{x^2}{2}. \end{bmatrix}=\left(\frac{x^2\ln^2 x}{2}-\frac{x^2\ln x}{2}\right)\Bigg|_1^e+\int_1^e\frac{xdx}{2}=\text{¿}$$

$$\text{¿}\left(\frac{x^2\ln^2 x}{2}-\frac{x^2\ln x}{2}+\frac{x^2}{4}\right)\Bigg|_1^e=\left(\frac{e^2\cdot\ln^2 e}{2}-\frac{e^2\cdot\ln e}{2}+\frac{e^2}{4}\right)-\text{¿}$$

$$-\left(\frac{1^2\cdot\ln^2 1}{2}-\frac{1^2\cdot\ln 1}{2}+\frac{1^2}{4}\right)=\frac{e^2}{4}-\frac{1}{4}=\frac{e^2-1}{4}.$$

Пример №11.

Решение:

$$\int_0^{\pi}\sin 3x\sin 2xdx$$

Применим тригонометрическую формулу произведения синусов:

$$\int_0^{\pi}\sin 3x\sin 2xdx=\int_0^{\pi}\left(\frac{\cos(3x-2x)-\cos(3x+2x)}{2}\right)dx=\text{¿¿}$$

$$\text{¿}\int_0^{\pi}\left(\frac{\cos x-\cos 5x}{2}\right)dx=\left(\frac{\sin x}{2}-\frac{\sin 5x}{10}\right)\Bigg|_0^{\pi}=\left(\frac{\sin\pi}{2}-\frac{\sin 5\pi}{10}\right)-\text{¿}$$

$$-\left(\frac{\sin 0}{2}-\frac{\sin 0}{10}\right)=0.$$

Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость.

Пример №12.

Решение:

$$\int_0^{\infty}\frac{x+2}{x^2+4x+5}dx$$

Это несобственный интеграл I рода (с бесконечным пределом интегрирования). Согласно определению несобственного интеграла I рода

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)\,dx$$

имеем

$$\int_0^{\infty} \frac{x+2}{x^2+4x+5}\,dx = \lim_{a\to+\infty} \int_0^a \frac{x+2}{x^2+4x+5}\,dx = \lim_{a\to+\infty} \int_0^{\infty} \frac{1}{2} \cdot \frac{d\left(x^2+4x+5\right)}{x^2+4x+5} = \text{¿¿}$$

$$\text{¿} \lim_{a\to+\infty} \left(\frac{\ln\left|x^2+4x+5\right|}{2} \right)\Bigg|_0^a = \frac{\lim\limits_{a\to\infty} \ln\left|a^2+4a+5\right|}{2} - \frac{\ln\left|0^2+4\cdot 0+5\right|}{2} = \text{¿}$$

$$\text{¿} + \infty - \frac{\ln 5}{2} = +\infty .$$

Ответ: интеграл расходится.

Пример №13.

Решение:

$$\int_{-1}^{0} \frac{e^{\frac{1}{x^2}}}{x^3}\,dx$$

Это несобственный интеграл II рода. Согласно определению несобственного интеграла II рода

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\delta\to 0} \int_a^{b-\delta} f(x)\,dx$$

имеем

$$\int_{-1}^{0} \frac{e^{\frac{1}{x^2}}}{x^3}\,dx = \lim_{\delta\to 0} \int_{-1}^{0-\delta} \frac{e^{\frac{1}{x^2}}}{x^3}\,dx = \frac{-1}{2} \lim_{\delta\to 0} \int_{-1}^{0-\delta} e^{\frac{1}{x^2}}\, d\left(\frac{1}{x^2}\right) = \lim_{\delta\to 0} \left(\frac{-e^{\frac{1}{x^2}}}{2} \right)\Bigg|_{-1}^{0-\delta} = \text{¿}$$

$$\text{¿} \lim_{\delta\to 0} \left(\frac{-e^{\frac{1}{(0-\delta)^2}}}{2} \right) + \frac{e^{\frac{1}{(-1)^2}}}{2} = \infty .$$ Ответ: интеграл расходится.

Выяснить сходимость несобственных интегралов.

Пример №14.

Решение:

$$\int_1^{\infty} \frac{x^2 arctgx}{2+x^2\sqrt{x^3+1}}\,dx$$

Так как на промежутке $(1;+\infty)$ имеет место неравенство:

$\frac{x^2 \operatorname{arctg} x}{2+x^2\sqrt{x^3+1}} \le \frac{x^2}{x^2 \cdot x\sqrt{x}} = \frac{1}{x\sqrt{x}}$, то имеем сопоставление интегралов в виде частного и общего признаков сравнения:

$$\int_1^{\infty} \frac{x^2 \operatorname{arctg} x}{2+x^2\sqrt{x^3+1}}\,dx \le \int_1^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x}}$$

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x}} = \lim_{a\to+\infty} \int_1^{a} \frac{dx}{x\sqrt{x}}\,dx = \lim_{a\to+\infty} \left(\frac{-2}{\sqrt{x}}\right)\Bigg|_1^a = \lim_{a\to\infty} \left(\frac{-2}{\sqrt{x}}\right) - \left(\frac{-2}{\sqrt{1}}\right) = 2.$$

Поскольку интеграл в правой части неравенства сходится, то исследуемый интеграл тоже сходится согласно общему признаку сравнения несобственных интегралов.

Ответ: интеграл сходится.

Пример №15.

Решение:

$$\int_0^{1} \frac{e^{\sin x}}{\sqrt[5]{x}\sin^2 x}\,dx$$

Так как при $x \to 0$:

$\frac{e^{\sin x}}{\sqrt[5]{x}\sin^2 x} \ge \frac{1}{\sqrt[5]{x} \cdot x^2} = \frac{1}{\sqrt[5]{x^{11}}}$то имеем сопоставление интегралов в виде частного и общего признаков сравнения:

$$\int_0^{1} \frac{e^{\sin x}}{\sqrt[5]{x}\sin^2 x}\,dx \ge \int_0^{1} \frac{1}{\sqrt[5]{x^{11}}}\,dx \int_0^{1} \frac{1}{\sqrt[5]{x^{11}}}\,dx = \lim_{\delta\to 0} \int_{0+\delta}^{1} \frac{1}{\sqrt[5]{x^{11}}}\,dx = \lim_{\delta\to 0} \left(\frac{-5}{6\sqrt[5]{x^6}}\right)\Bigg|_{0+\delta}^{1} = \frac{-5}{6\sqrt[5]{x^6}} + ¿$$

$$\frac{+\lim\limits_{\delta\to 0} 5}{6\sqrt[5]{(0+\delta)^6}} = +\infty.$$

Поскольку данный интеграл расходится, то исследуемый интеграл тоже расходится согласно общему признаку сравнения несобственных интегралов. Ответ: интеграл расходится.

Найти площадь области, ограниченной линиями.

$y=1+2x-x^2, x+y-1=0.$

Пример №16.

Решение:

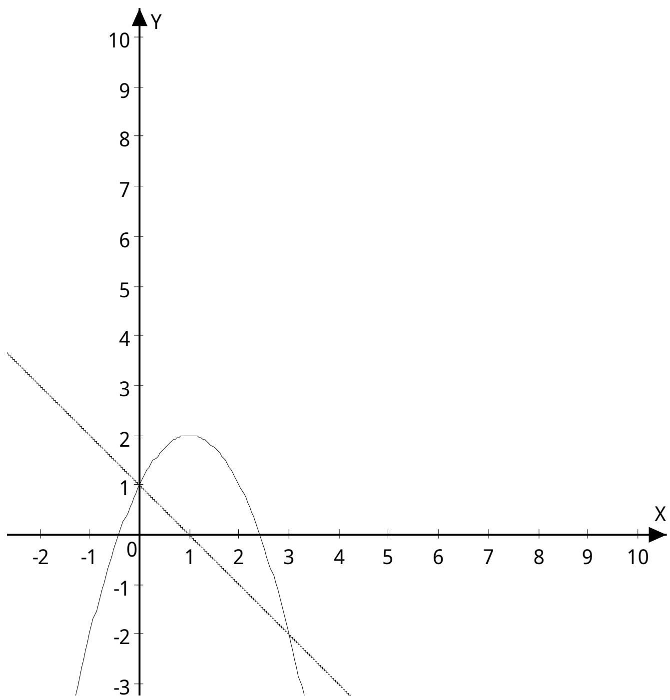
Координаты точек пересечения линий находим из системы:

$$\begin{cases} y=1+2x-x^2; \\ y=1-x. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=1-x \\ 3x-x^2=0 \end{cases}$$

Отсюда:

$x=3, y=-2$ и $x=0, y=1$.

Строим заданные линии на плоскости ХОУ.



Составляем определенный интеграл:

$$S=\int_{a}^{b}\left(y_1-y_2\right)dx,$$

где y_1 – линия, ограничивающая область сверху; y_2 – линия, ограничивающая область снизу; a – наименьшее значение переменной x в области; b – наибольшее значение переменной x в области.

Искомая площадь:

$$S=\int_{0}^{3}\left[1+2x-x^2-1+x\right]dx=\int_{0}^{3}\left(3x-x^2\right)dx=\left.\left(\frac{3x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)\right|_0^3=¿$$

$$¿\left(\frac{3\cdot 3^2}{2}-\frac{3^3}{3}\right)-\left(\frac{3\cdot 0^2}{2}-\frac{0^3}{3}\right)=\frac{9}{2}.$$

Найти длину дуги кривой. $\rho=e^{\varphi}$, $0\le\varphi\le\ln 3.$

Пример №17.

Решение:

Длина дуги кривой, заданной в полярных координатах, находится по формуле:

$$l=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{\rho^2+\left(\frac{d\rho}{d\varphi}\right)^2}\,d\varphi.$$

Находим:

$$\frac{d\rho}{d\varphi}=e^{\varphi}$$

Получаем:

$$l=\int_{0}^{\ln 3}\sqrt{\left(e^{\varphi}\right)^2+\left(e^{\varphi}\right)^2}\,d\varphi=\int_{0}^{\ln 3}\sqrt{2}\,e^{\varphi}\,d\varphi=\sqrt{2}\,e^{\varphi}\Big|_0^{\ln 3}=\sqrt{2}\,e^{\ln 3}-\sqrt{2}\,e^{0}=2\sqrt{2}.$$

Ответ: $2\sqrt{2}$.

Заключение

В ходе изучения дисциплины «Математика» были усвоены такие темы как «Неопределённый интеграл» и «Определённый интеграл». Благодаря Контрольной работе №1 полученные знания были отработаны на практике.

Список использованной литературы:

1. Ельцов А.А., Ельцова Т.А. Интегральное исчисление: методические указания по выполнению контрольных работ. — Томск: Факультет дистанционного обучения, ТУСУР, 2013. — 60 с.
2. Ельцов А.А., Ельцова Т.А. Интегральное исчисление: учебное пособие. — Томск: Эль Контент, 2013. — 138 с.
3. Ельцов А.А., Ельцова Т.А. Дифференциальные уравнения: учебное пособие. — Томск: Эль Контент, 2013. — 104 с.