Основы финансовых вычислений. Задачи

Различные способы вычисления процентов

Дисконтирование

Учёт инфляции

Потоки платежей

Ренты

;

Задача 1

- Какова простая ставка процентов, при которой первоначальный капитал в размере 130000 руб., достигнет через 100 дней 155000 руб.? Число дней году считается приближённо и равно 360. Ответ привести с точностью до 0,01%.
- **Решение**. Воспользуемся формулой
- . Подставив данные задачи
- $S_t = S_0 \cdot (1 + t \cdot i)$; , получим

$S_t = 155000;\quad S_0 = 130000 \qquad t = \frac{100}{360} = 0{,}2778$

Решение задачи 1. Задача 2.

- $155000 = 130000 \cdot (1 + 0{,}2778i)$; $(1 + 0{,}2778i) = \dfrac{155}{130}$; $0{,}2778i = \dfrac{155}{130} - 1 = 0{,}1923$;
- $0{,}2778i = \dfrac{155}{130} - 1 = 0{,}1923$; i = 69,23%.
- **Задача 2**. Ссуда 700000 руб. выдана на квартал по простой ставке процентов 15% годовых. Определить наращенную сумму.
- Решение. Используя формулу простых процентов для вычисления наращенной суммы, получим $S = S_0 \cdot (1 + t \cdot i) = 700000 \cdot \left(1 + \dfrac{1}{4} \cdot 0{,}15\right)$ = 726250.

Задача 3

- Найти сумму накопленного долга и проценты, если ссуда 180000 руб. выдана на три года под простые 18% годовых. Во сколько раз увеличится наращенная сумма при увеличении ставки на 2%?
- **Решение**. Вычислим сумму накопленного долга S как наращенную сумму по формуле простых процентов .
- S

$$= S_0 \cdot (1 + n \cdot i) = 180000 \cdot (1 + 3 \cdot 0{,}18) = 277200$$

Решение задачи 3. Задача 4

- Проценты равны $I = S - S_0 = 277200 - 180000 = 97200$. При ставке 18% + 2% = 20% наращенная сумма равна S' = 180000·(1 + 3·0,2) = 288000. Наращенная сумма увеличивается в
- $\frac{S'}{S} = \frac{288000}{277200}$ = 1,03896 раза.
- **Задача 4.** Определить простую ставку процентов, при которой первоначальный капитал в размере 122000 руб., достигнет через 120 дней величины 170000 руб. Временная база К=360.

Решение задачи 4. Задача 5

- . Воспользуемся формулой наращения по простой процентной ставке $S = S_0 \cdot (1 + t \cdot i)$. Найдём $t = \frac{120}{360} = \frac{1}{3}$. Подставив условия задачи, получим $170000 = 122000 \cdot \left(1 + \frac{1}{3} \cdot i\right)$; $1 + \frac{1}{3} \cdot i = \frac{170}{122}$;
- $i = 3 \cdot \left(\frac{170}{122} - 1\right) = 1{,}1803$ или 118,03%.
- **Задача 5.** Определить период, за который начальный капитал в размере 46000 руб. вырастет до 75000 руб., если ставка простых процентов равна 15% годовых.
- 5

Решение задачи 5. Задача 6

- Воспользуемся формулой наращения по простой процентной ставке $S = S_0 \cdot (1 + t \cdot i)$. Подставив условия задачи, получим

$$75000 = 46000 \cdot (1 + 0{,}15 \cdot t) \qquad 1 + 0{,}15 \cdot t = \frac{75}{46};\ t = \frac{{}^{75}/_{46} - 1}{0{,}15} = 4{,}2$$

- **Задача 6.** Ссуда 150000 руб. выдана на 4 года под 20% годовых (простые проценты). Во сколько раз больше наращенная сумма по сравнению со ссудой?

Решение задачи 6. Задача 7

- Найдём наращенную сумму по формуле простых процентов $S = S_0 \cdot (1 + t \cdot i) = 150000 \cdot (1 + 0{,}2 \cdot 4) = 270000$
- Эта сумма $\frac{S}{S_0} = \frac{270000}{150000} = 1{,}8$ раз больше ссуды, что как раз равно множителю наращения.
- **Задача 7.** В банк 7 февраля на депозит положили сумму 20000 у.е. под 11% годовых по схеме сложных процентов. Какую сумму вкладчик снимет 1 октября?

Решение задачи 7. Задача 8

- Найдём время t. 7 февраля день №38, 1октября день №274, число дней равно 274 – 38 = 236, время (в годах) равно $t = \frac{236}{365}$. Найдём искомую сумму как наращенную величину по формуле сложных процентов .

$$S = S_0 \cdot (1+i)^t = 20000 \cdot (1+0{,}11)^{236/365} = 21396{,}1$$

- **Задача 8**. Вклад на 80000 руб., открытый в банке на 10 месяцев, принес вкладчику 7000 руб. Под какой простой (сложный) процент годовых был открыт вклад?

Решение задачи 8.

- Для вычисления сложного процента применим формулу . Подставив данные задачи, получим уравнение 80000 + 7000 =
- = $80000\cdot(1+i)^{\frac{10}{12}}$ Откуда $(1+i)^{5/6}=\frac{87}{80}$; $1+i=\frac{87}{80}^{6/5}$;
- $i=\frac{87^{1,2}}{80}=0,1059$ или 10,59%. Для вычисления простого процента применим формулу $S=S_0\cdot(1+t\cdot i)$ Подставив данные задачи, получим уравнение 80000+7000 = 80000·(1+10/12·i). Откуда $1+\frac{5}{6}\cdot i=\frac{87}{80}$; $i=\frac{42}{400}=0,105$ или 10,5%.

Задачи 9, 10

- **Задача 9.** Чему равен процентный платеж, если кредит 170000 руб. взят на 7 месяцев под сложных 17% годовых?
- **Решение.** Процентный платеж равен разности между наращенной суммой и величиной кредита

$$I = 170000(1+0{,}17)^{7/12} - 170000 = 16304{,}78$$

- **Задача 10.** Ставка по годовому депозиту равна 8%. Какую ставку годовых процентов нужно назначить на полугодовой депозит,

Задачи 10, 11

- чтобы последовательное переоформление полугодового депозита привело бы к такому же результату, что и при использовании годового депозита? (К=360)
- **Решение**. $1{,}08 = \left(1 + \frac{i}{2}\right)^2$. Следовательно
- $i = 2 \cdot \left(\sqrt{1{,}08} - 1\right) = 0{,}0785$ или 7,85%.

Задача 11. Заемщик должен уплатить 80000 руб. через 65 дней. Кредит выдан под 19% годовых (простые проценты).

Задачи 11, 12

- Какова первоначальная сумма долга и дисконт (К=360)?
- **Решение.** $S \cdot \left(1 + \frac{65}{360} \cdot 0{,}19\right) = 80000$. Следовательно
- $S = \frac{80000}{1 + \frac{0{,}19 \cdot 65}{360}}$ =77346,58. Дисконт равен D = 80000 – 77346,58 = 2653,42.
- **Задача 12.** На счет в банке кладется сумма в размере 20000 руб. на 4 года под 11% годовых по схеме простых процентов с дальнейшей пролонгацией на последующие 2 года под 6% годовых по той

Задача 12

- же схеме. Найти размер вклада через 6 лет. Определить наращенную сумму, если вклад изымается через 4 года и кладется на новый счет на 2 года по той же схеме.
- **Решение.** а) $20000 \cdot (1 + 4 \cdot 0{,}11 + 2 \cdot 0{,}06) = 31200$
- б) $20000 \cdot (1 + 4 \cdot 0{,}11) \cdot (1 + 2 \cdot 0{,}06) = 32256$

Задача 13

- В банк положен депозит в размере 2400 руб. под 7% годовых по схеме сложных процентов. Найти величину депозита через три года при начислении процентов 1, 4, 6, 12 раз в году и в случае непрерывного начисления процентов.
- **Решение.** а) $S = 2400 \cdot (1 + 0{,}07)^3$ = 2940,1;
- б) $S = 2400 \cdot \left(1 + \frac{0{,}07}{4}\right)^{4 \cdot 3} = 2955{,}45$; в) $S = 2400 \cdot \left(1 + \frac{0{,}07}{6}\right)^{6 \cdot 3} = 2957{,}23$
- г) $S = 2400 \cdot \left(1 + \frac{0{,}07}{12}\right)^{12 \cdot 3} = 2959{,}02$; д) $S = 2400 \cdot (e)^{3 \cdot 0{,}07} = 2960{,}83$

Задача 14

- Клиент поместил в банк вклад в сумме 18000 руб. под 8,5% годовых с ежемесячной выплатой процентов. Какую сумму клиент будет получать каждый месяц, если начисление производится по формуле простых процентов?
- **Решение.** Искомая сумма равна величине $18000 \cdot 0,085 : 12 = 127,5$.

Задача 15

- На годовом депозите можно получить 12% годовых, а на полугодовом — 11,5% годовых. Что выгоднее — положить средства на годовой депозит, или на полугодовой депозит с пролонгацией на тех же условиях? Чему будут равны проценты в обоих случаях при сумме депозита 25000 руб.?
- **Решение.** Наращенная сумма на годовом депозите $S = 1.12S_0$. Наращенная сумма на полугодовом депозите $S' = \left(1 + \frac{0,115}{2}\right)^2 S_0 = 1,1183S_0 < S$.

Задача 16

- В банк положена сумма 40000 у.е. сроком на 2 года по ставке 10% годовых. Найти наращенную сумму, величину полученного процента и эффективную процентную ставку для следующих вариантов начисления процентов: а) ежеквартального; б) ежемесячного.
- **Решение.** а) наращенная сумма
- $S = 40000 \cdot \left(1 + \frac{0,1}{4}\right)^{4 \cdot 2} = 48736,12$; процентные деньги I = 8736,12

Решение задачи 16. Задача 17

- эффективная процентная ставка
- $i_{эфф} = \left(1 + \frac{0,1}{4}\right)^4 - 1 = 0,1038$ или 10,38 %;

б) $S = 40000 \cdot \left(1 + \frac{0,1}{12}\right)^{12 \cdot 2} = 48815,64$; I = 8815,64;

- $i_{эфф} = \left(1 + \frac{0,1}{12}\right)^{12} - 1 = 0,1047$ или 10,47%.
- **Задача 17.** За какой период первоначальный капитал в размере 40000 руб. вырастет до 75000 руб. при простой ставке 15% годовых?

Решение задачи 17. Задача 18

- Для простых процентов выполняется соотношение 75000 = 40000·(1 + 0,15n). Следовательно 0,15n = $\frac{75}{40} - 1$; n = $\frac{35}{6} = 5{,}83$
- Для сложных процентов выполняется соотношение 75000 $= 40000 \cdot (1 + 0{,}15)^n$
- Следовательно $1{,}15^n = \frac{15}{8} = 1{,}875$; $n = \frac{\ln 1{,}875}{\ln 1{,}15} = 4{,}5$
- **Задача 18 .** В банк положена сумма 150000 руб. сроком на 6 лет по ставке 14% годовых. Найти наращенную сумму, величину полученного процента и эффективную

Задача 18

- процентную ставку для следующих вариантов начисления процентов: а) полугодового; б) ежеквартального; в) ежемесячного; г) непрерывного при силе роста 14%.
- **Решение.** а) наращенная сумма равна
- $$S = 150000\left(1 + \frac{0{,}14}{2}\right)^{2\cdot 6} = 337828{,}74$$; величина полученного процента равна I = 187828,74; эффективная процентная ставка равна
- $$i_{\text{эфф}} = \left(1 + \frac{0{,}14}{2}\right)^{2} - 1 = 0{,}1449\ (14{,}49\%)$$.

Решение задачи 18

- б) наращенная сумма равна $S = 150000 \cdot \left(1 + \frac{0{,}14}{4}\right)^{4 \cdot 6} = 342499{,}27$; величина полученного процента равна I = 192499,27; эффективная процентная ставка равна $i_{эфф} = \left(1 + \frac{0{,}14}{4}\right)^{2} - 1 = 0{,}1475\ (14{,}75\%)$.
- в) наращенная сумма равна $S = 150000 \cdot \left(1 + \frac{0{,}14}{12}\right)^{12 \cdot 6} = 345769{,}74$
- ; величина полученного процента равна I = 195769,74; эффективная процентная ставка равна
- $i_{эфф} = \left(1 + \frac{0{,}14}{12}\right)^{12} - 1 =$.

$= 0{,}1493\ (14{,}93\%)$

Решение задачи 18. Задача 19

- г) наращенная сумма равна $S = 150000 \cdot e^{0,14 \cdot 6} =$
- $= 347455,05$; величина полученного процента равна $I = 197455,05$; эффективная процентная ставка равна $i_{эфф} = e^{0,14} - 1 = 0,1503\ (15,03\%)$
- **Задача 19.** На сумму долга в течение 8 лет начисляются проценты по ставке 11% годовых. Во сколько раз возрастет наращенная сумма, если проценты будут капитализироваться ежемесячно? Ежеквартально? Непрерывно?
- .

Решение задачи 19

- Наращенная сумма при ежегодной капитализации равна $S_0(1+0{,}11)^8 = 2{,}3045S_0$.
- Наращенная сумма при ежемесячной капитализации равна $S_0\left(1+\frac{0{,}11}{12}\right)^{12\cdot 8} = 2{,}4013S_0$, что в
- $\frac{2{,}4013S_0}{2{,}3045S_0} = 1{,}042$ раза больше, чем при годовой капитализации.
- Наращенная сумма при ежеквартальной капитализации равна $S_0\left(1+\frac{0{,}11}{4}\right)^{4\cdot 8} = 2{,}3824S_0$, что в $\frac{2{,}3824S_0}{2{,}3045S_0} = 1{,}0338$ раза больше, чем при годовой капитализации.

Решение задачи 19. Задача 20

- Наращенная сумма при непрерывной капитализации равна $S_0 e^{0,11\cdot 8} = 2,4109 S_0$, что в
- $\frac{2,4109 S_0}{2,3045 S_0} = 1,0462$ раза больше, чем при годовой капитализации.
- **Задача 20.** На какой срок необходимо положить в банк 12000 руб., чтобы накопить 15000 руб., если банк принимает вклады под простые (сложные) 8% годовых?
- **Решение.** Простые проценты. Воспользуемся формулой ;

$$S_n = S_0 \cdot (1 + n \cdot i)$$

Решение задачи 20.Задача 21

- 1200(1 + 0,08n) = 1500; $n = \frac{1,25 - 1}{0,08}$ = 3,125.
- Сложные проценты. Воспользуемся формулой $S_n = S_0 \cdot (1 + i)^n$; $1500 = 1200 \cdot (1 + 0,08)^n$; $1,08^n = 1,25$;
- $n = log_{1.08} 1,25 = \frac{ln 1,25}{ln 1,08} = 2,9$.
- **Задача 21.** Банк принимает депозиты на сумму 500000 руб. на следующих условиях: а) под 10% годовых с ежеквартальным начислением процентов;

Задача 21

- б) под 10% годовых с полугодовым начислением процентов; в) под 11,5% годовых (во всех трех случаях проценты капитализируются). Выберите оптимальную схему вложения денежных средств.
- **Решение.** Воспользуемся формулой $S_n = S_0 \cdot \left(1 + \frac{i}{m}\right)^{m \cdot n}$;
- а) $S_n = 500000 \cdot \left(1 + \frac{0,1}{4}\right)^{4 \cdot n} = 500000 \cdot (1,1038)^n$;
- б) $S_n = 500000 \cdot \left(1 + \frac{0,1}{2}\right)^{2 \cdot n} = 500000 \cdot (1,1025)^n$;
- в) $S_n = 500000 \cdot (1 + 0,115)^n = 500000 \cdot (1,115)^n$. Самым выгодным депозитом является депозит в).

Задача 22

- Компания получила кредит на три года в размере 234000 руб. с условием возврата 456000 руб. Определить процентную ставку для случаев простого и сложного процента.
- **Решение.** Для простого процента имеем соотношение 456000 = 234000·(1 + 3i). Откуда $1+3i=\frac{456}{234}$; $i=\frac{1}{3}\left(\frac{456}{234}-1\right)=0,3275$ или 32,75%.
- Для сложного процента $456000 = 234000\cdot(1+i)^3$; $i=\sqrt[3]{\frac{456}{234}}-1=0,2491$ или 24,91%.

Задача 23

- Вклад открыт под 14% простых годовых. На него начислен процентный платеж в сумме 1500 руб. Найдите величину вклада, если он был открыт на: а) 10 лет, б) 1 год, в) 6 месяцев, г) 10 дней. Временная база К - 365 дней.
- **Решение.** Воспользуемся формулой для вычисления процентного платежа .
- а) ; ; $I = S_0 \cdot i \cdot t$

$$1500 = S_0 \cdot 0{,}14 \cdot 10 \qquad S_0 = \frac{1500}{1{,}4} = 1071{,}43$$

Решение задачи 23. Задача 24

- б) 1500 = $S_0 \cdot 0{,}14 \cdot 1$; $S_0 = \dfrac{1500}{0{,}14} = 10714{,}29$;
- в) $1500 = S_0 \cdot 0{,}14 \cdot \dfrac{10}{365}$; $S_0 = \dfrac{365 \cdot 1500}{1{,}4} = 391071{,}43$.
- **Задача 24.** Вексель стоимостью 100000 руб. учитывается за 4 года до погашения по сложной учетной ставке 15% годовых. Найдите сумму, получаемую векселедержателем, и величину дисконта.
- **Решение.** Искомая сумма равна
- $S_0 = S_n \cdot (1-d)^n = 100000 \cdot (1-0{,}15)^4 = 52200{,}53$.

Задача 25.

- Клиент имеет вексель на 16000 у.е., который он хочет учесть 10.01.2009 г. в банке по сложной учетной ставке 8%. Какую сумму он получит, если срок до погашения 10.07.2009 г.?
- **Решение.** Найдём время t до погашения векселя. 10,01 – день №10; 10,07 – день №191; число дней равно 191 – 10 = 181; . Сумма, полученная векселедержателем равна

.
$$S_0 = S_t \cdot (1-d)^t = 16000 \cdot (1-0{,}08)^{181/365} = 15351{,}92$$

Задача 26

- Предприятие получило кредит на один год в размере 7 млн. руб. с условием возврата 7,77 млн. руб. Рассчитайте процентную и учетную ставку.
- **Решение.** Процентная ставка вычисляется по формуле $S_0 = \frac{S}{1+i}$. Откуда $7000000 = \frac{7770000}{1+i}$;
- $1+i = \frac{777}{700} = 1{,}11$; или 11%.
- Учетная ставка вычисляется по формуле
- $S_0 = S \cdot (1-d)$. Откуда 7000000 = 7770000 $\cdot (1-d)$;

Решение задачи 26. Задача 27

- $1 - d = \frac{700}{777} = \frac{100}{111}$; $d = 1 - \frac{100}{111} = \frac{11}{111} = 0{,}099$ или 9,9%.
- **Задача 27.** Банк учитывает вексель по номинальной учетной ставке 10% с ежемесячным начислением процентов. Найти сложную учетную ставку, при которой доход банка не изменился.
- **Решение.** Искомая учётная ставка является эффективной учётной ставкой и вычисляется по формуле $d_{эфф} = 1 - \left(1 - \frac{d}{m}\right)^m$.
- $d_{эфф} = 1 - \left(1 - \frac{0{,}1}{12}\right)^{12} = 0{,}09555$ или 9,55%.

Задача 28. Задача 29

- **Задача 28.** Вексель стоимостью 550 тыс. руб. учитывается за три года до погашения по сложной учетной ставке 12% годовых. Найти сумму, которую получит векселедержатель, и величину дисконта.
- **Решение.** Искомая сумма равна
- $$S_0 = S_n \cdot (1-d)^n = 550000 \cdot (1-0{,}12)^3 = 374809{,}6 \; .$$
- **Задача 29.** Клиент имеет вексель на 20000 руб., который он хочет учесть 24.04.2011 г. в банке по сложной учетной ставке 10%.

Задачи 29, 30

- Какую сумму он получит, если срок погашения 12.09.2011 г.?
- **Решение.** Найдём время t с момента учёта до момента погашения векселя. 24.04 – день №144; 12.09 –день № 255; число дней 255 – 114 = 141; $t = \frac{141}{365}$. Сумма, полученная клиентом равна

$$S_0 = S_t(1-d)^t = 20000\cdot(1-0{,}1)^{\frac{141}{365}} = 19202{,}32$$

- **Задача 30.** Номинальная учетная ставка равна 10%. При этом проценты начисляются ежеквартально. Найти эффективную учетную ставку.

Решение задачи 30. Задача31

- Эффективная учётная ставка равна
- $$d_{эфф} = 1 - \left(1 - \frac{d}{m}\right)^m = 1 - \left(1 - \frac{0,1}{4}\right)^4 = 0,0963$$ или 9,63%.
- **Задача 31.** Что выгоднее, положить 1000 у.е. в банк на год под 8% годовых или купить за 1000 у.е. вексель с номиналом 1100 у.е. и погашением через год? Чему равна доходность покупки векселя, измеренная в виде годовой ставки процентов?

Решение задачи 31. Задача 32

- Наращенная сумма при вкладе в банк равна $S = S_0 \cdot (1 + i) = 1000 \cdot (1 + 0{,}08) = 1080$. Покупка векселя с номиналом 1100 выгоднее. Доходность покупки векселя вычисляется по формуле $S = S_0 \cdot (1 + i)$; 1100 = 1000·(1 +i); 1 + i = 1,1; i =0,1 или 10%.
- **Задача 32.** Вексель куплен за 200 дней до его погашения. На момент покупки рыночная простая учетная ставка составляла 7% годовых.

Задача 32

- Через 5 дней вексель продали по учетной ставке 6% годовых. Оцените эффективность данной финансовой операции в виде ставки простых процентов. Временная база K = 365 дней.
- **Решение.** Вексель куплен за сумму
- $S_0 = S\cdot(1-t\cdot i) = S\cdot\left(1-\frac{200}{365}\cdot 0{,}07\right) = 0{,}9616S$. Вексель продан за сумму $S_0' = S\cdot(1-t'\cdot i) = S\cdot\left(1-\frac{200-5}{365}\cdot 0{,}06\right) = 0{,}9679S$. Эффективность операции выражается по формуле $S_0' = S_0\cdot(1+t\cdot i)$. Откуда
- $0{,}9679S_0 = 0{,}9616S_0\cdot\left(1+\frac{5}{365}\cdot i\right)$; $1+\frac{i}{73} = \frac{9679}{9616}$; $i = 73\cdot\left(\frac{9679}{9616}-1\right) = 0{,}4783$ или 47,83%.

Задачи 33, 34

- **Задача 33.** Найти сложную процентную ставку , эквивалентную непрерывной ставке 8%. Ответ привести с точностью до 0,01%.
- **Решение.** Искомая ставка процентов равна
- $i = e^{\delta} - 1 = e^{0,08} - 1 = 0,0833$ или 8,33%.
- **Задача 34.** Найти сложную процентную ставку , эквивалентную простой ставке 10%.
- **Решение.** Используя формулу эквивалентности сложной и простой

Решение задачи 34. Задача 35.

- процентных ставок, получим
- $i_c = \sqrt[n]{1 + n \cdot i_п} - 1 = \sqrt[5]{1 + 5 \cdot 0{,}1} - 1 = 0{,}0845$ или 8,45%.
- **Задача 35.** Найти простую процентную ставку , эквивалентную сложной ставке 11% для временного интервала 1,5 года.
- **Решение.** Искомая простая ставка равна
- $i_п = \frac{1}{n} \cdot ((1 + i_c)^n - 1) = \frac{1}{1{,}5} \cdot ((1 + 0{,}11)^{1{,}5} - 1) = 0{,}113$ или 11,3%.

Задача 36

- Найти непрерывную процентную ставку , эквивалентную простой ставке в 15% для временного интервала в 5 лет.
- **Решение.** Используя равенство множителей наращения $e^{\delta \cdot n} = 1 + n \cdot i_{\text{п}}$, найдём непрерывную ставку процентов $i_{\text{н}}$ (силу роста δ) $\delta = \frac{1}{n} \cdot ln(1 + i_{\text{п}} \cdot n)$ = $\frac{1}{5} \cdot ln(1 + 0{,}15 \cdot 5) = 0{,}1119$
- или 11,19%.

Задача 37

- Найти простую процентную ставку , эквивалентную сложной ставке в 15% для временного интервала в 5 лет при ежемесячном начислении процентов.
- **Решение.** Используя равенство множителей наращения , $1 + n \cdot i_{\text{п}} = \left(1 + \frac{i}{k}\right)^{k \cdot n}$
- найдём простую ставку процентов
- $i_{\text{п}} = \frac{1}{n} \cdot \left(\left(1 + \frac{i}{k}\right)^{k \cdot n} - 1 \right) = \frac{1}{5} \cdot \left(\left(1 + \frac{0{,}15}{12}\right)^{12 \cdot 5} - 1 \right) = 0{,}2214$ или 22,14%.

Задача 38

- Номинальная процентная ставка составляет 12% годовых при годовом темпе инфляции 4%. Чему равна реальная ставка с учётом инфляции. Чему равна эффективная процентная ставка, если проценты начисляются ежемесячно? ежедневно? ежеквартально?
- **Решение.** Реальная ставка с учётом инфляции равна или

$$r = \frac{i - \alpha}{1 + \alpha} = \frac{0,12 - 0,08}{1 + 0,08} = 0,037$$

- 3,7%. Эффективная процентная ставка вычисляется по формуле

$$i_{эфф} = \left(1 + \frac{i}{k}\right)^{k} - 1$$

Решение задачи 38.Задача 39

- При ежемесячном начислении процентов
- $$i_{эфф} = \left(1 + \frac{0{,}12}{12}\right)^{12} - 1 = 0{,}1268 \text{ или } 12{,}68\%$$.
- При ежедневном начислении процентов
- $$i_{эфф} = \left(1 + \frac{0{,}12}{365}\right)^{365} - 1 = 0{,}1275 \text{ или } 12{,}75\%$$.
- При ежеквартальном начислении процентов $i_{эфф} = \left(1 + \frac{0{,}12}{4}\right)^{4} - 1 = 0{,}1255 \text{ или } 12{,}55\%$.
- **Задача 39.** Номинальная процентная ставка составляет 15% годовых. Чему равна

Задача 39

- эффективная процентная ставка, если проценты начисляются ежемесячно? ежедневно? ежеквартально?
- **Решение.** Воспользуемся формулой $i_{эфф} = \left(1 + \frac{i}{k}\right)^k - 1$
- При ежемесячном начислении процентов

$$i = \left(1 + \frac{0,15}{12}\right)^{12} - 1 = 0,1608 \text{ или } 16,08\%$$

- .
- При ежедневном начислении процентов

$$i_{эфф} = \left(1 + \frac{0,15}{365}\right)^{365} - 1 = 0,1618 \text{ или } 16,18\%.$$

Решение задачи 39. Задача 40

- При ежеквартальном начислении процентов $i_{эфф} = \left(1 + \frac{0,15}{4}\right)^4 - 1 =$ 0,1586 или 15,86% .
- **Задача 40.** Ставка процентов составляет 10% годовых. Месячный темп инфляции в первом полугодии был постоянен и составил 2%, во втором полугодии — 3%. Во сколько раз реальная наращенная сумма превзойдёт сумму депозита за год?

Решение задачи 40. Задача 41

- Темп инфляции за год составляет величину $\alpha = (1+\alpha_1)\cdot(1+\alpha_2)-1 = (1+0{,}02)\cdot(1+0{,}03)-1 = 0{,}0506$. Реальная процентная ставка равна $r = \dfrac{i-\alpha}{1+\alpha} = \dfrac{0{,}1-0{,}0506}{1+0{,}0506} = 0{,}047$. Реальная сумма депозита за год возрастёт в 1 + r = 1,047 раза.
- **Задача 41.** Темп инфляции α за период $t = t_1 + t_2 + t_3$
- равен 0,75. Темпы инфляции $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ за периоды t_1, t_2, t_3 соответственно, составляют геометрическую прогрессию со

Задача 41

- знаменателем 0,9. Найти темп инфляции за каждый период.
- **Решение.** Темпы инфляций равны α_1, $\alpha_2 = 0{,}9\,\alpha_1$, $\alpha_3 = 0{,}81\,\alpha_1$

$$(1+\alpha_1)(1+0{,}9\,\alpha_1)(1+0{,}81\,\alpha_1) = 1+0{,}75$$

- . Следовательно .

$$f(\alpha_1) = 729\,\alpha_1^3 + 2439\,\alpha_1^2 + 2710\,\alpha_1 - 750 = 0$$

- f(0,22) = -28; f(0,23) = 11,1. Следовательно с точностью до 0,005 $\alpha_1 = 0{,}225$ или 22,5%.

Задача 42

- Темп инфляции за период $t = t_1 + t_2 + t_3$ равен 0,8. Темпы инфляции за $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ периоды
- t_1, t_2, t_3 соответственно, составляют арифметическую прогрессию с разностью 0,01. Найти темп инфляции за каждый период.
- **Решение.** Воспользуемся формулой вычисления инфляции за несколько периодов .

$$(1+\alpha_1)\cdot(1+\alpha_1+0{,}01)\cdot(1+\alpha_1+0{,}02)=1{,}8$$

Решение задачи 42.Задача 43

- $f(\alpha_1) = (1+\alpha_1)\cdot(1{,}01+\alpha_1)\cdot(1{,}02+\alpha_1) - 1{,}8 = 0$
- $f(0{,}2) = -0{,}02856$, $f(0{,}21) = 0{,}015726$. Следовательно, с точностью до 0,005 $\alpha_1 = 0{,}205$ или 20,5%.
- **Задача 43.** Темп инфляции за первый период равен 0,37. Темп инфляции за второй период на 55% выше, чем за первый. Найти темп инфляции за каждый период.
- **Решение.** Используя формулу вычисления инфляции за два периода,

Решение задачи 43.Задача 44

- получим ; $(1+\alpha_1)\cdot(1+1{,}55\alpha_1)=1{,}37$; $\alpha_1^2+2{,}55\alpha_1-0{,}37=0$
- $\alpha_1=\dfrac{-2{,}55+\sqrt{2{,}55^2+6{,}2\cdot 0{,}37}}{3{,}1}=0{,}1346$ или 13,46%; $\alpha_2=1{,}55\cdot 13.46=20{,}79\%$
- **Задача 44.** Темп инфляции за период $t=t_1+t_2$ равен 0,4. Темп инфляции за первый период в 1,173 раза меньше, чем за второй. Найти темп инфляции за каждый период.
- **Решение.** Используя формулу вычисления инфляции за два периода, получим
- $(1+\alpha_1)\cdot(1+1{,}173\alpha_1)=1{,}4$; $1{,}173\alpha_1^2+2{,}173\alpha_1-0{,}227=0$;
- $\alpha_1=\dfrac{-2.173+\sqrt{2{,}173^2+4\cdot 1{,}173\cdot 0{,}227}}{2\cdot 1.173}$ = 0,0992 или 9,92%.

Задача 45

- Прогнозируется среднемесячный темп инфляции 3%. Найти квартальный, полугодовой и годовой темп инфляции.
- **Решение.** а) квартальный темп инфляции
- равен $\alpha = (1+0,03)^4 - 1 = 0.1255$ или 12,55%.
- б) полугодовой темп инфляции равен
- $\alpha = (1+0,03)^6 - 1 = 0.1941$ или 19,41%.
- в) годовой темп инфляции равен
- $\alpha = (1+0,03)^{12} - 1 = 0.4258$ или 42,58%.

Задача 46

- Месячный темп инфляции составляет 3%. Найти индекс цен и темп инфляции за год, определить наращенную сумму за год, если на сумму 200000 руб. в течение года начислялась простая (сложная) процентная ставка 15% годовых (K=360) , и определить ставку, при которой наращение равно потерям из-за инфляции.
- **Решение.** Темп инфляции за год равен

или 42,58%, индекс цен 1,42

$$\alpha = (1 + 0{,}03)^{12} - 1 = 0{,}4258$$

Решение задачи 46

- Наращенная сумма равна 200000·1,15 = 230000 .
- В случае сложных процентов месячная ставка равна $(1+0,15)^{1/12} - 1 = 0,01171$ или 1,17%. Годовая ставка, при которой потери из-за инфляции равны наращению составит 42,58%.

Задача 47

- Темп инфляции α за период $t = t_1 + t_2 + t_3$ равен 1,2. Темпы инфляции $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3$ за периоды
- t_1, t_2, t_3 соответственно, составляют арифметическую прогрессию с разностью 0,1. Найти темп инфляции за каждый период.
- **Решение.** Используя формулу вычисления инфляции за три периода, получим
- ;

$$(1+\ \alpha_1)\cdot(1{,}1+\ \alpha_1)\cdot(1{,}2+\ \alpha_1)=1+1.2$$

Решение задачи 47.Задача 48

- $f(\alpha_1) = (1+\alpha_1)\cdot(1{,}1+\alpha_1)\cdot(1{,}2+\alpha_1) - 2{,}2 = 0$; f(0,2) = -0,016 < 0; f(0,21) = 0,03 > 0. Следовательно, с точностью до 0,05, $\dot{\alpha}_1 = 0{,}205 \quad \dot{\alpha}_2 = 0{,}305 \quad \dot{\alpha}_3 = 0{,}405$.
- **Задача 48.** Прогнозируется среднемесячный темп инфляции 1%. Годовая номинальная ставка 15%. Найти эффективную реальную ставку, если начисление происходит 6 раз в году.
- **Решение.** Годовая ставка инфляции
- $\alpha = (1+0{,}01)^{12} - 1 = 0{,}1268$;

Решение задачи 48. Задача 49

- реальная годовая процентная ставка $r = \dfrac{i - \alpha}{1 + \alpha}$
- $= \dfrac{0,15 - 0,1268}{1 + 0,1268}$ = 0,0206; эффективная годовая ставка $r_{эфф} = \left(1 + \dfrac{r}{6}\right)^6 - 1 = \left(1 + \dfrac{0,0206}{6}\right)^6 - 1 = 0,0208$ или 2,08%.
- **Задача 49.** Пусть темп инфляции за месяц равен 2%. Найти темп инфляции за год при условии постоянства темпа инфляции в течение года.
- **Решение.** Годовой темп инфляции равен
- $\alpha = (1 + 0,02)^{12} - 1 = 0,2682$ или 26,82%.

Задачи 50, 51

- Пусть темп инфляции за год равен $\alpha = 20\%$. Найти темп инфляции α_1 за квартал при условии его постоянства.
- **Решение.** Темп инфляции за квартал равен
- $\alpha_1 = \sqrt[4]{1+\alpha} - 1 = \sqrt[4]{1,2} - 1 = 0,0466$ или 4,6%.
- **Задача 51.** Какую ставку должен установить банк, чтобы при инфляции 8% годовых он мог бы иметь 10% доходность?

Решение. Воспользуемся формулой Фишера

$r = \dfrac{i - \alpha}{1 + \alpha}$; $0,1 = \dfrac{i - 0,08}{1 + 0,08}$; $0,108 = i - 0,08$; $i = 0,188$ или 18,8%.

Задача 52

- Найти реальный доход вкладчика, если на депозит положено 200000 у.е. на 4 года под 15% годовых с ежемесячным начислением процентов при квартальной инфляции, которая составляет в среднем за данный период 3%.
- **Решение.** Найдём годовой темп инфляции
- . Вычислим реальный

процент по формуле Фишера

$$\alpha = (1 + \alpha_1)^n - 1 = (1 + 0{,}03)^4 - 1 = 0{,}1255$$

$$r = \frac{i - \alpha}{1 + \alpha} = \frac{0{,}15 - 0{,}1255}{1 + 0{,}1255} = 0{,}0218.$$

Решение задачи 52. Задача 53

- Реальный доход равен

$$200000 \cdot \left(1+\frac{r}{12}\right)^{4\cdot 12} - 200000 = 200000 \cdot \left(1+\frac{0{,}0218}{12}\right)^{4\cdot 12} - 200000$$
$$= 18205{,}71$$

- **Задача 53.** При какой годовой процентной ставке сумма увеличится в 3 раза за 10 лет, если проценты начисляются поквартально?
- **Решение.** Найдём процентную ставку , исходя из уравнения $3S_0 = S_0 \cdot \left(1+\frac{i}{4}\right)^{10\cdot 4}$

Решение задачи 53. Задача 54

- Откуда $\left(1+\frac{i}{4}\right)^{40}=3$; $1+\frac{i}{4}=3^{1/40}$; $i=4\cdot\left(3^{1/40}-1\right)=0,1114$ или 11,14%.
- **Задача 54.** Найти период времени , за который сумма, положенная на депозит под 13% годовых по схеме сложных процентов, возрастет в 4 раза.
- **Решение.** Используем формулу наращения
- $S_n = S_0\cdot(1+i)^n$, как уравнение относительно n.
- $4S_0 = S_0\cdot(1+0,13)^n$; $1,13^n=4$; $n=\dfrac{ln4}{ln1,13}=11,34$.

Задача 55

- Компания имеет на депозите в банке 100000 руб. Депозитная ставка банка составляет 18% годовых. Предлагается объединить оборотные средства в совместном предприятии, которое прогнозирует утроение капитала через 8 лет. Провести сравнение вариантов вложения капитала.

Решение Найдём наращенную сумму в банке

Решение задачи 55. Задача 56

- за 8 лет. $S = S_0 \cdot (1+0{,}18)^8 = 3{,}76 \cdot S_0 > 3S_0$. Следовательно, оставить деньги на депозите в банке выгоднее.
- **Задача 56.** При какой годовой сложной процентной ставке сумма удвоится за 7 лет, если проценты начисляются ежеквартально?
- **Решение.** Используем правило семидесяти
- $n = \frac{70}{i}$ в качестве уравнения: $7 = \frac{70}{i}$; i = 10%.

Задача 57.

- При какой годовой сложной процентной ставке сумма утроится за 6 лет, если проценты начисляются ежемесячно? ежеквартально?
- **Решение.** Используем формулу наращения
- $S_n = S_0 \cdot \left(1 + \frac{i}{k}\right)^{k \cdot n}$ как уравнение относительно i. При ежемесячном начислении процентов
- $3S_0 = S_0 \cdot \left(1 + \frac{i}{12}\right)^{72}$; $\left(1 + \frac{i}{12}\right)^{72} = 3$; $i = 12 \cdot \left(\sqrt[72]{3} - 1\right) = 0,1845$ или 18,45%. При ежеквартальном – $i = 4 \cdot \left(\sqrt[24]{3} - 1\right) = 0,1873$ или 18,73%.

Задача 58

- **Задача 58.** За сколько лет при ставке 10% годовых вклад вырастет в 4 раза в схеме простых процентов?
- **Решение.** Используем формулу наращения
- $S_n = S_0 \cdot (1 + n \cdot i)$ как уравнение относительно n.
- $4S_0 = S_0 \cdot (1 + n \cdot 0{,}1)$; $1 + 0{,}1n = 4$; $n = 30$.
- **Задача 59.** За сколько лет удвоится капитал в схеме простых процентов при ставке 18% годовых?

Задачи 59, 60, 61

- Воспользуемся правилом «ста» $n = \frac{100}{i} = \frac{100}{18} = 5{,}56$.
- **Задача 60.** За сколько лет удвоится капитал в схеме сложных процентов при ставке 18% годовых?
- **Решение.** Воспользуемся правилом семидесяти $n = \frac{70}{i} = \frac{70}{18} = 3{,}89$.
- **Задача 61.** Три платежа: 15000, 26000 и 45000 руб., произведенные в начале третьего, начале четвертого периодов и в

Задачи 61, 62

- конце пятого, соответственно, заменить платежом 90000 руб. Годовая ставка 15%.
- **Решение.** Найдем срок платежа n исходя из уравнения эквивалентности $\frac{90000}{1,15^n} = \frac{15000}{1,15^2} + \frac{26000}{1,15^3} + \frac{45000}{1,15^5}$;
- $1,15^n = \frac{90000}{\frac{15000}{1,15^2} + \frac{26000}{1,15^3} + \frac{45000}{1,15^5}}$; $n = \frac{ln\frac{90000}{\frac{15000}{1,15^2} + \frac{26000}{1,15^3} + \frac{45000}{1,15^5}}}{ln1,15} = 4,18$

- **Задача 62.** Три платежа: 13000, 25000 и 35000 руб., произведенные в начале

Задача 62

- третьего, начале четвертого периодов и в конце пятого, соответственно, заменить двумя платежами в конце шестого и седьмого периодов. При этом первый платеж в три раза больше второго. Годовая ставка сложных процентов равна 11%.
- **Решение.** Обозначим второй из искомых платежей через S, тогда первый будет равен 3S. Найдем S, исходя из уравнения эквивалентности ; ;

$$\frac{3S}{1{,}11^6} + \frac{S}{1{,}11^7} = \frac{13000}{1{,}11^2} + \frac{25000}{1{,}11^3} + \frac{35000}{1{,}11^5}$$

Решение задачи 62. Задача 63

- $$S\cdot\left(\frac{3}{1{,}11^6}+\frac{1}{1{,}11^7}\right)=\frac{13000}{1{,}11^2}+\frac{25000}{1{,}11^3}+\frac{35000}{1{,}11^5}$$
- $$S=\frac{\frac{13000}{1{,}11^2}+\frac{25000}{1{,}11^3}+\frac{35000}{1{,}11^5}}{\frac{3}{1{,}11^6}+\frac{1}{1{,}11^7}}=23783{,}14$$
- Первый платёж равен $3S=71367{,}43$, второй – $23783{,}14$.
- **Задача 63.** Два платежа: 13000 и 35000 руб. произведенные в начале четвертого и в конце пятого периодов, соответственно, заменить

Задача 63

- двумя платежами в конце шестого и восьмого периодов. При этом первый платеж на 20% больше второго. Годовая ставка сложных процентов равна 9%.
- **Решение.** Обозначим второй из искомых платежей через S, тогда первый будет равен 1,2S. Найдем S, исходя из уравнения эквивалентности ;
- $$\frac{1{,}2S}{1{,}09^6}+\frac{S}{1{,}09^8}=\frac{13000}{1{,}09^2}+\frac{35000}{1{,}09^5}$$

$$S\cdot\left(\frac{1{,}2}{1{,}09^6}+\frac{1}{1{,}09^8}\right)=\frac{13000}{1{,}09^3}+\frac{35000}{1{,}09^5}$$

$$S=\frac{\frac{13000}{1{,}09^3}+\frac{35000}{1{,}09^5}}{\frac{1{,}2}{1{,}09^6}+\frac{1}{1{,}09^8}}=26931{,}14$$

Решение задачи 63. Задача 64

- Первый платёж равен $1,2S = 32317,72$, второй –
- $26931,14$.
- **Задача 64.** Один платеж 43000 руб. в начале третьего периода заменить тремя равными платежами, произведенными в начале первого и в конце четвертого и седьмого периодов, соответственно. Годовая ставка простых процентов равна 17%.

Решение задачи 64. Задача 65

- Обозначим искомый платёж через S. Найдем S, исходя из уравнения эквивалентности $S+\frac{S}{1{,}17^6}+\frac{S}{1{,}17^7}=\frac{43000}{1{,}17^2}$;

$$S\cdot\left(1+\frac{1}{1{,}17^6}+\frac{1}{1{,}17^7}\right)=\frac{43000}{1{,}17^2} \qquad S=\frac{43000}{1{,}17^2\cdot\left(1+\frac{1}{1{,}17^6}+\frac{1}{1{,}17^7}\right)}=16826{,}29$$

- **Задача 65.** Резервный фонд создается в течение 18 лет. На поступающие в него средства начисляются сложные проценты по ставке 4,5% годовых.

Задача 65

- В течение первых 6 лет в конце каждого года в фонд вносили по 15000 у.е., в течение последующих 4 лет — по 18000 у.е. в конце года, а в последние 8 лет — по 22000 у.е. в конце года. Чему будет равна сумма фонда через 18 лет? Ответ привести с точностью до 0,01.
- **Решение.** Сумма фонда S складывается из трёх наращенных сумм, каждая из которых

Решение задачи 65

- вычисляется по формуле $S_n = R \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i}$. Причём, первая сумма лежит на депозите и наращивается в течение 12 лет, вторая – в течение 8 лет.

$$S = S_1 \cdot (1+0,045)^{12} + S_2 \cdot (1+0,045)^8 + S_3 =$$

$$= 15000 \cdot \frac{1,045^6 - 1}{0,045} \cdot (1,045)^{12} + 18000 \cdot \frac{1,045^4 - 1}{0,045} \cdot (1,045)^8 + 22000 \cdot \frac{1,045^8 - 1}{0,045} = 486738,41$$

- **Задача 66**. Семья планирует через 5 лет купить квартиру за 1900000 руб. и с этой целью ежемесячно на банковский депозит

Задача 66

- вносится определенная сумма. Найти ее, если годовая банковская ставка составляет 11% с ежемесячным начислением процентов.
- **Решение.** Используем формулу Подставляя данные задачи, получим уравнение относительно годового взноса R.

$$S_n = R\frac{\left(1+\frac{i}{k}\right)^{n\cdot k}-1}{i}$$

- . Откуда .

$$1900000 = R\frac{\left(1+\frac{0{,}11}{12}\right)^{12\cdot 5}}{0{,}11}$$

Месячный

Годовой платёж равен.

$$R = \frac{0{,}11\cdot 1900000}{\left(1+\frac{0{,}11}{12}\right)^{60}-1} = 286727{,}25$$

Месячный – 23893,94

$$R = \frac{0{,}11\cdot 1900000}{\left(1+\frac{0{,}11}{12}\right)^{60}-1} = 286727{,}25$$

Задача 67

- Какую сумму нужно положить в банк под 12% годовых мужчине 37 лет, чтобы по достижении им пенсионного возраста 60 лет в течение 15 лет в начале каждого месяца снимать по 10000 рублей, если проценты капитализируются: в конце года; в конце каждого полугодия; в конце каждого квартала; в конце каждого месяца?
- **Решение.** Обозначим через A искомую сумму. Тогда к пенсионному возрасту эта

Решение задачи 67

- сумма нарастится до величины $A\cdot\left(1+\frac{0,12}{k}\right)^{23k}$. Эта величина является приведённой суммой ренты (пенсии) и вычисляется по формуле

$$\left(1+\frac{0,12}{k}\right)^{23k} A = 10000\cdot\frac{\left(1+\frac{0,12}{k}\right)^{kn}-1}{\left(1+\frac{0,12}{k}\right)^{k/12}-1}\cdot\left(1+\frac{0,12}{k}\right)^{k/12};$$

$$A=\frac{10000}{\left(1+\frac{0,12}{k}\right)^{23k}}\cdot\frac{\left(1+\frac{0,12}{k}\right)^{15k}-1}{\left(1+\frac{0,12}{k}\right)^{k/12}-1}\cdot\left(1+\frac{0,12}{k}\right)^{k/12}$$

- Проценты начисляются раз в год, k = 1.
- $A=\frac{10000}{(1,12)^{23}}\cdot\frac{(1,12)^{15}-1}{(1,12)^{1/12}-1}\cdot(1+0,12)^{1/12}=351180,05$ Проценты начисляются раз в полгода, k = 2.
- $A=\frac{10000}{(1,06)^{46}}\cdot\frac{(1,06)^{30}-1}{(1,06)^{1/6}-1}\cdot(1+0,06)^{1/6}=336395,19$

Решение задачи 67. Задача 68

- Проценты начисляются раз в квартал, k = 4.

$$A = \frac{10000}{(1{,}03)^{92}} \cdot \frac{(1{,}03)^{60} - 1}{(1{,}03)^{1/3} - 1} \cdot 1{,}03^{1/3} = 328850{,}68$$

- Проценты начисляются раз в месяц, k = 12.
- $$A = \frac{10000}{(1{,}01)^{276}} \cdot \frac{(1{,}01)^{180} - 1}{0{,}01} \cdot 1{,}01 = 323762{,}57$$
- **Задача 68.** Сколько лет должна выплачиваться рента с годовым платежом 5000 руб., чтобы ее текущая (наращенная) стоимость превзошла величину 75000 руб. при процентной ставке 9% годовых?

Решение задачи 68. Задача 69

- Найдём наращенную величину(текущую стоимость) ренты $S = R \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i} = 5000 \cdot \frac{1{,}09^n - 1}{0{,}09}$ и решим неравенство $5000 \cdot \frac{1{,}09^n - 1}{0{,}09} > 75000$: $1{,}09^n - 1 > 15 \cdot 0{,}09$

$1{,}09^n > 2{,}35$; $n > \frac{ln2{,}35}{ln1{,}09} = 9{,}91$. Наименьшее число лет равно 10.

- **Задача 69.** Фонд создается в течение 7 лет, взносы поступают в конце каждого полугодия равными суммами. На поступившие средства в конце года

Задача 69

- начисляется 12% годовых. На сколько процентов возрастет сумма фонда в конце седьмого года при переходе к непрерывной капитализации процентов?
- **Решение.** При годовой капитализации сумма фонда составит величину

$$S = \frac{R}{2} \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^{1/2} - 1} = \frac{R}{2} \cdot \frac{1{,}12^7 - 1}{\sqrt{1{,}12} - 1} = 10{,}3831R$$

. При непрерывной капитализации сумма фонда составит величину

$$S' = \frac{R}{2} \cdot \frac{e^{in} - 1}{e^{i/p} - 1} = \frac{R}{2} \cdot \frac{e^{7 \cdot 0{,}12} - 1}{e^{0{,}06} - 1} = 10{,}6439R$$

Решение задачи 69. Задача 70

- что в $\frac{S'}{S} = \frac{10{,}6439R}{10{,}3881R} = 1{,}02462$ раза, или на 2,46%, больше, чем при годовой капитализации.
- **Задача 70.** Фонд создается в течение 10 лет. Средства поступают в фонд в конце года равными суммами. На собранные средства в конце года начисляется 10% годовых. На сколько процентов возрастет наращенная сумма фонда при переходе к: а) взносам в конце каждого квартала; б) ежемесячному начислению процентов? Ответ привести с точностью до 0,01%.

Решение задачи 70

- При ежегодных взносах наращенная сумма равна $S = R \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i} = R \cdot \frac{1{,}1^{10} - 1}{0{,}1} = 15{,}9374R$. При ежеквартальных взносах наращенная сумма равна
- $$S' = \frac{R}{p} \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^{1/p} - 1} = \frac{R}{4} \cdot \frac{1{,}1^{10} - 1}{1{,}1^{1/4} - 1} = 16{,}5232R$$, что в 1,03676 раза, или на 3,676%, больше, чем при годовых взносах. При ежемесячном начислении процентов наращенная сумма равна $$S'' = R \cdot \frac{\left(1 + \frac{i}{k}\right)^{kn} - 1}{\left(1 + \frac{i}{k}\right)^{k} - 1} = R \cdot \frac{\left(1 + \frac{0{,}1}{12}\right)^{120} - 1}{\left(1 + \frac{0{,}1}{12}\right)^{12} - 1} = 16{,}30208657R$$ что в $$\frac{S''}{S} = \frac{16{,}30208657R}{15{,}9374R} = 1{,}0229$$ раза, или на 2,29%, больше, чем при годовой капитализации.

Задача 71

- Какую сумму нужно положить в банк женщине 55 лет, чтобы в течение 18 лет в конце каждого года снимать по 3000 у.е., если на остаток вклада меньше 10000 у.е. начисляется 3% годовых, больше или равно 10000 у.е. — 4% годовых?
- **Решение.** Найдём срок, в течение которого приведённая величина ренты меньше 10000. Воспользуемся формулой вычисления приведённой величины и

Решение задачи 71

- решим неравенство. $A = R \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = 3000 \cdot \frac{1-1{,}03^{-n}}{0{,}03} < 10000$
- $3000 \cdot (1 - 1{,}03^{-n}) < 300$; $1 - 1{,}03^{-n} < 0{,}1$; $1{,}03^{-n} > 0{,}9$; $-n > \frac{ln0{,}9}{ln1{,}03}$;
- $n < \frac{-ln0{,}9}{ln1{,}03} = 3{,}56$. Следовательно 3% будут начисляться последние 3 года, а 4% первые 15 лет. Искомый вклад равен сумме приведённой величины 15-летней ренты и дисконтированной приведенной величины 3-летней ренты и равен
- $$3000 \cdot \frac{1-1{,}04^{-15}}{0{,}04} + 3000 \cdot \frac{1-1{,}03^{-3}}{0{,}03} \cdot 1.04^{-15} = 38067{,}04$$

Задача 72

- Фонд создается в течение 5 лет. Средства поступают в фонд в конце года по 50000 руб., на них начисляется 13% годовых. В каком случае сумма фонда станет больше: а) при переходе к ежемесячным взносам в конце каждого месяца; б) при переходе к ежедневной капитализации процентов? (К=365 дней).
- **Решение.** Величина фонда (наращенная

Решение задачи 72

- сумма) при ежемесячных взносах равна
- $$S = \frac{R}{p}\cdot\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^{1/p} - 1} = \frac{50000}{12}\cdot\frac{(1{,}13)^5 - 1}{(1{,}13)^{1/12} - 1} = 342893{,}42$$; при ежедневной капитализации процентов сумма фонда равна

$$S = R\cdot\frac{\left(1+\frac{i}{k}\right)^{kn} - 1}{\left(1+\frac{i}{k}\right)^{k} - 1} = S = 50000\cdot\frac{\left(1+\frac{0{,}13}{365}\right)^{365\cdot 5} - 1}{\left(1+\frac{0{,}13}{365}\right)^{365} - 1} = 329721{,}11$$

В случае ежедневной капитализации процентов сумма меньше, чем в случае ежемесячных взносов.

Задача 73

- Для создания премиального фонда один раз в год производятся взносы в размере 15000 руб. На вносимые средства начисляются проценты под 12% годовых. Определить размер фонда через 7 лет в следующих случаях: а) поступление средств в конце года, ежеквартальное начисление процентов; б) поступление средств в конце квартала, начисление процентов 6 раз в году; в) ежемесячное поступление средств и ежеквартальное начисление процентов.

Решение задачи 73

- Воспользуемся формулой $S = \frac{R}{p} \cdot \frac{\left(1 + \frac{i}{k}\right)^{kn} - 1}{\left(1 + \frac{i}{k}\right)^{k/p} - 1}$
- а) $s = 15000 \cdot \frac{\left(1 + \frac{0,12}{4}\right)^{28} - 1}{(1,03)^4 - 1} = 153924,77$
- б) $S = \frac{15000}{4} \cdot \frac{\left(1 + \frac{0,12}{6}\right)^{42} - 1}{\left(1 + \frac{0,12}{6}\right)^{6/4} - 1} = 161351,47$
- в) $S = \frac{15000}{12} \cdot \frac{\left(1 + \frac{0,12}{4}\right)^{28} - 1}{\left(1 + \frac{0,12}{4}\right)^{4/12} - 1} = 162590,24$.

Задачи 74, 75

- **Задача 74.** Формируется фонд на основе ежегодных отчислений в сумме 8000 у.е. с начислением на них сложных процентов по ставке 11%. Определить величину фонда через 10 лет.
- **Решение.**

$$S = R \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i} = 8000 \cdot \frac{1{,}11^{10} - 1}{0{,}11} = 133776{,}07$$

- **Задача 75.** Определить размер вклада, который обеспечивает ежегодное (в конце года) получение денежной суммы в размере 1700 у.е. в конце года в течение 19 лет, если процентная ставка равна 11%.

Решение задачи 75. Задача 76

- $A = R\cdot\dfrac{1-(1+i)^{-n}}{i}$ = 1700$\cdot\dfrac{1-1{,}11^{-19}}{0{,}11}$ = 13326,8.
- **Задача 76.** Дайте определение внутренней нормы доходности потока и найдите ее для потока $CF = \{(0,-2500),\ (1;2000),\ (2;3500)\}$.
- **Решение.** Внутренняя норма доходности – это такая процентная ставка , при которой приведённая сумма потока равна нулю;
- $\dfrac{P_1}{(1+i)^{t_1}} + \dfrac{P_2}{(1+i)^{t_2}} + \dots + \dfrac{P_n}{(1+i)^{t_n}} = 0$; $-2500 + \dfrac{2000}{1+i} + \dfrac{3500}{(1+i)^2} = 0$;
- $x = \dfrac{1}{1+i}$, $7x^2 + 4x - 5 = 0$, $x = \dfrac{-2+\sqrt{4+7\cdot 5}}{7} = 0{,}606428285$

$$i = x^{-1} - 1 = 0{,}649$$

или 64,9%.

Задача 77

- Дайте определение внутренней нормы доходности потока и найдите ее для потока

$CF = \{(0;-500),\ (1;450),\ (2;300)\}$.

- **Решение.** Внутренняя норма доходности – это такая процентная ставка , при которой приведённая сумма потока равна нулю;

$$\frac{P_1}{(1+i)^{t_1}} + \frac{P_2}{(1+i)^{t_2}} + \cdots + \frac{P_n}{(1+i)^{t_n}} = 0;\quad -500 + \frac{450}{1+i} + \frac{300}{(1+i)^2} = 0;\quad x = \frac{1}{1+i};$$

$$6x^2 + 9x - 10 = 0;\quad x = \frac{-9 + \sqrt{81+240}}{12} = 0{,}743;\quad i = x^{-1} - 1 = 0{,}3458$$

или 34,58%.

Задача 78

- Определить доходность инвестиций, выраженную в виде годовой ставки процента, если известно, что на 25000 руб. вложений доход составит 3000 руб. ежегодно в течение 17 лет.
- **Решение.** Найдём искомый процент i, исходя из формулы, $A_n = R \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$
- рассматриваемой в качестве уравнения относительно i. $25000 = 3000 \cdot \frac{1-(1+i)^{-17}}{i}$;
- $25i(1+i)^{17} - 3(1+i)^{17} - 3 = 0$ i = 13%.

Задача 79

- Сравните два потока по среднему сроку:

$$CF_1 = \{(0;500),\ (1;300),\ (2;450),\ (3;100)\} \qquad CF_2 = \{(0;600),\ (1;250),\ (2;350),\ (3;50)\}$$

- **Решение**. $t_1 = \dfrac{0\cdot500 + 1\cdot300 + 2\cdot450 + 3\cdot100}{500+300+450+100} = 1{,}3043$;

$$t_2 = \frac{0\cdot600 + 1\cdot250 + 2\cdot350 + 3\cdot50}{600+250+350+50} = 0{,}92$$

- **Задача 80.** Даны два потока: $CF_1 = \{(1;200),\ (2;250),\ (3;150)\}$ и $CF_2 = \{(1;150),\ (2;300),\ (3;100)\}$. Какой из этих потоков является предпочтительнее? Почему?

Решение задачи 80. Задача 81

- Найдём современные величины обоих потоков. $A_1 = \frac{200}{1+i} + \frac{250}{(1+i)^2} + \frac{150}{(1+i)^3}$; $A_2 = \frac{150}{1+i} + \frac{300}{(1+i)^2} + \frac{100}{(1+i)^3}$.
- $(1+i)^2 \cdot A_1 > (1+i)^2 \cdot A_2$, так как $(1+i)^2 \cdot A_1 = 450 + 200i + \frac{150}{1+i}$;
- $(1+i)^2 \cdot A_2 = 450 + 150i + \frac{100}{1+i}$. Следовательно $A_1 > A_2$. Т. о. первый поток предпочтительнее.
- **Задача 81.** Пусть поток платежей $CF = \{(0;-2500),(2;2000),(4;3000)\}$ и процентная ставка составляет 10%. Найти приведенную стоимость и наращенную величину этого потока.

Решение задачи 81. Задача 82

- Приведённая стоимость равна.
- $A = -2500 + \dfrac{2000}{1{,}1^2} + \dfrac{3000}{1{,}1^4} = 1201{,}93$. Наращенная величина равна $S = -2500 \cdot 1{,}1^4 + 2000 \cdot 1{,}1^2 + 3000 = 1759{,}75$.
- **Задача 82.** Приведите поток
- $CF = \{(0;600),\ (1;250),\ (2;350),\ (3;600)\}$ к моменту времени $t = 2$ при ставке 8%.
- **Решение.** Приведённая величина потока равна $PV_2 = 600 \cdot (1+0{,}08)^2 + 250 \cdot (1+0{,}08) + 350 + 600 \cdot (1+0{,}08)^{-1} = 1875{,}4$

Задачи 83, 84

- Приведите поток $CF = \{(0;600),\ (1;250),\ (2;350),\ (3;600)\}$
- к моменту времени $t = 3$ при ставке 9%.
- **Решение.** Приведённая величина потока равна
- $$PV_2 = 600 \cdot (1+0{,}09)^3 + 250 \cdot (1+0{,}09)^2 + 350 \cdot (1+0{,}09) + 600 = 2055{,}54$$
- **Задача 84.** Найдите средний срок потока
- $CF = \{(0;100),\ (1;200),\ (2;400),\ (3;100)\}$.
- **Решение.** Средний срок равен $$t = \frac{t_1 \cdot P_1 + t_2 \cdot P_2 + \ldots + t_n \cdot P_n}{P_1 + P_2 + \ldots + P_n} =$$

Решение задачи 84. Задача 85

$$= \frac{0 \cdot 100 + 1 \cdot 200 + 2 \cdot 400 + 3 \cdot 100}{100 + 200 + 400 + 100} = 1{,}625$$

- **Задача 85.** На счет в банке помещено 160000 руб. За первые 5 лет и 6 месяцев процентная ставка равнялась 10%, а в следующие 7 лет и 4 месяца — 8%, капитализация полугодовая. Чему будет равна наращенная величина вклада через 12 лет 10 месяцев.
- **Решение.**

$$S = 160000 \cdot \left(1 + \frac{0{,}1}{2}\right)^{2 \cdot 5{,}5} \cdot \left(1 + \frac{0{,}08}{2}\right)^{2 \cdot (7 + 4/12)} = 160000 \cdot 1{,}05^{11} \cdot 1{,}04^{44/3}$$

$$= 486434{,}74$$

Задача 86

- На счет в банке помещено 25000 руб., а через 5 лет сняли 20000 руб. Чему будет равна наращенная величина вклада через 12 лет (со дня помещения), если процентная ставка равна 11%, а капитализация полугодовая.

Решение. Через 5 лет сумма на банковском счете оказалась равной

$$25000\cdot\left(1+\frac{0,11}{2}\right)^{2\cdot 5}-20000$$

. Ещё через 7 лет сумма нарастится до величины

$$\left(25000\cdot(1,055)^{10}-20000\right)\cdot\left(1+\frac{0,11}{2}\right)^{2\cdot 7}=48042,92$$

Задача 87

- Банк предлагает вкладчикам на двухлетний срок два варианта начисления процентов: 1) в первый год 2,5% ежеквартально, во второй год по 2% ежеквартально; 2) в первое полугодие по 3,5% ежеквартально, а в каждом последующем полугодии ежеквартальная ставка убывает на 0,5%. Какой вклад выгоднее.
- **Решение.** 1) Наращенная сумма равна

$$S = S_0(1+0{,}025)^4 \cdot (1+0{,}02)^4 = 1{,}1948 \cdot S_0$$

Решение задачи 87. Задача 88

- 2) Наращенная сумма равна
- $S = S_0(1 + 0{,}035)^2 \cdot (1 + 0{,}03)^2 \cdot (1 + 0{,}025)^2 \cdot (1 + 0{,}02)^2 = 1{,}244 \cdot S_0$.
- Второй вариант выгоднее.
- **Задача 89.** Контракт предусматривает следующий порядок начисления сложных процентов: первый год — 11%, в каждом последующем полугодии ставка повышается на 1%. Определить множитель наращения за 2,5 года.

Решение задачи 88. Задача 89

- Множитель наращения является произведением четырёх множителей и равен $(1+0{,}11)^{1/2}\cdot(1+0{,}12)^{1/2}\cdot(1+0{,}13)^{1/2}\cdot(1+0{,}14)^{1/2}\cdot(1+0{,}15)^{1/2}$.
$= 1{,}13571$

Задача 89. Банк объявил следующие условия выдачи ссуды на один год: за первый квартал ссудный процент 30%; за второй квартал — 35%; за третий — 37%; за четвертый квартал — 40%. Определить сумму к возврату в банк, если ссуда составляет 200000 руб.

Решение задачи 89. Задача 90

- Сумма к возврату равна S = 200000·(1 + 0,3) ·(1 + 0,35) ·(1 + 0,37) ·(1 + 0,4) =673218.
- **Задача 90.** Банк объявил следующие условия выдачи ссуды на один год: за первый квартал ссудный процент 30%; за второй квартал — 35%; за третий — 37%; за четвертый квартал — 40%. Определить сумму к возврату в банк, если ссуда составляет 200000 руб.

Решение задачи 90. Задача 91

- Сумма к возврату равна S = 200000·(1 + 0,3) ·(1 + 0,35) ·(1 + 0,37) ·(1 + 0,4) =673218.
- **Задача 91.** Найти простую процентную ставку , эквивалентную сложной ставке для временного интервала в 6 лет при ежеквартальном начислении процентов.
- **Решение.** Приравняем множители наращения и выразим ставку простых процентов. $1 + 6i_{п} = \left(1 + \frac{i_c}{4}\right)^{4\cdot 6}$; $6i_{п} = \left(1 + \frac{i_c}{4}\right)^{24} - 1$;

$$i_{п} = \frac{1}{6}\left(1 + \frac{i_c}{4}\right)^{24} - \frac{1}{6}$$

Задача 92

- Найти простую процентную ставку , эквивалентную сложной ставке в 8% для временного интервала в 10 лет при ежемесячном начислении процентов.
- **Решение.** Найдём ставку , исходя из равенства множителей наращения
- $$1 + 10 \cdot i_{\text{п}} = \left(1 + \frac{0{,}08}{12}\right)^{12\cdot 10} \qquad i_{\text{п}} = \frac{1}{10}\cdot\left(\left(1 + \frac{0{,}08}{12}\right)^{120} - 1\right) = 0{,}122$$

  или 12,2%.

Задачи 93, 94

- Найти простую процентную ставку $i_{\text{п}}$, эквивалентную непрерывной ставке 9%.
- **Решение.** Найдём ставку $i_{\text{П}}$, исходя из равенства множителей наращения
- $1 + n \cdot i_{\text{П}} = e^{0,09n}$; $i_{\text{п}} = \frac{1}{n} \cdot (e^{0,09n} - 1)$
- **Задача 94.** Найти сложную процентную ставку , эквивалентную непрерывной ставке 9%.

Решение задачи 94. Задача 95.

- Найдём ставку , исходя из равенства множителей наращения $(1+i_c)^n = e^{0,09n}$; $1+i_c = e^{0,09}$
- $i_c = e^{0,09} - 1 = 0,0942$ или 9,42%.
- **Задача 95.** Найти непрерывную процентную ставку , эквивалентную сложной ставке 5%.
- **Решение.** Найдём ставку $i_{н}$, исходя из равенства множителей наращения
- ; или 4,88%. $i_{н}$
- $e^{i_{н} n} = (1+0,05)^n$

$e^{i_{н}} = 1,05$ $i_{н} = ln1,05 = 0,0488$

Задачи 96, 97

- Инвестор намерен положить некоторую сумму под 14% годовых с целью накопления через три года 1500000 руб. Определить сумму вклада.

Решение. Найдём искомую сумму S_0 исходя из уравнения $1500000 = S_0 \cdot (1+0{,}14)^3$; $S_0 = \dfrac{1500000}{1{,}14^3} = 1012457{,}27$.

- **Задача 97.** Рыночная цена 12-ти процентной облигации номиналом 1000 руб. за два года до погашения равна 1200 руб.

Задача 97.

- Найти текущую стоимость облигации при процентной ставке: а) 10%, б) 14%, в) 12% и её курс.
- **Решение.** Найдём курс $K = \frac{V}{N} = \frac{1200}{1000} = 1{,}2$ или 120%. Текущая стоимость P вычисляется по формуле $P = c \cdot N \cdot \frac{1 - (1+r)^{-n}}{r} + N \cdot (1+r)^{-n}$ и равна следующим величинам:
- а) $P = 0{,}12 \cdot 1000 \cdot \frac{1 - (1+0{,}1)^{-2}}{0{,}1} + 1000 \cdot (1+0{,}1)^{-2} = 1034{,}71$;

  б) $P = 0{,}12 \cdot 1000 \cdot \frac{1 - (1+0{,}14)^{-2}}{0{,}14} + 1000 \cdot (1+0{,}14)^{-2} = 1034{,}71 = 967{,}07$;

Задачи 97, 98

- в) текущая стоимость P равна номинальной стоимости N и равна 1000, так как купонная и номинальная ставки равны.
- **Задача 98.** Найти текущую стоимость облигации номинальной стоимостью 1000 руб., сроком погашения 5 лет и ежегодными выплатами по купонной ставке 15%, если годовая процентная ставка составляет 20%.

Решение задачи 98. Задача 99.

- Текущая стоимость P вычисляется по формуле $P = c \cdot N \cdot \frac{1 - (1+r)^{-n}}{r} + N \cdot (1+r)^{-n}$ и равна
- $P = 0{,}15 \cdot 1000 \cdot \frac{1 - (1+0{,}2)^{-2}}{0{,}2} + 1000 \cdot (1+0{,}2)^{-2} = 850{,}47$.
- **Задача 99.** Одна из двух бумаг портфеля является безрисковой. Рисковая бумага имеет параметры (0,4; 0,7), доходность безрисковой бумаги равна 0,31. Найти портфель и его доходность, если его риск равен 0,55.
-

Решение задачи 99

- Обозначим через x_1 долю рисковой бумаги, а через x_2 долю безрисковой бумаги, через μ_2
- и σ_2 доходность и риск рисковой бумаги. Риск портфеля вычисляется по формуле
- . Следовательно ;
- $\sigma = \sigma_2 \cdot x_2$; $0{,}55 = 0{,}7 \cdot x_2$. Доходность портфеля равна $x_2 = \frac{0{,}55}{0{,}7} = 0{,}7857$

$$x_1 = 1 - x_2 = 0{,}2143$$

$$\mu = \mu_1 \cdot x_1 + \mu_2 \cdot x_2 = 0{,}31 \cdot 0{,}2143 + 0{,}4 \cdot 0{,}7857 = 0{,}3807$$

- **Задача 100.** Найдите изменение текущей рыночной стоимости облигации со сроком

Задача 100

- обращения n = 7 лет, номинальной стоимостью N = 50000, купонной ставкой с = 8% и доходностью к погашению ρ =10% при увеличении и уменьшении доходности к погашению на 2%.
- **Решение.** Текущая рыночная стоимость облигации вычисляется по формуле
- $V = cN\dfrac{1-(1+\rho)^{-n}}{\rho} + N\cdot(1+\rho)^{-n}$. При ставке доходности к погашению ρ = 10% рыночная стоимость

Задачи 100, 101

- равна $V = 0{,}8 \cdot 5000 \cdot \dfrac{1 - (1{,}1)^{-7}}{0{,}1} + 1000 \cdot (1{,}1)^{-7} = 45131{,}58$; при ставке 12% стоимость
- $V = 0{,}8 \cdot 5000 \cdot \dfrac{1 - (1{,}12)^{-7}}{0{,}12} + 1000 \cdot (1{,}12)^{-7} = 40872{,}49$; при ставке 8% стоимость $V = 0{,}8 \cdot 5000 \cdot \dfrac{1 - (1{,}08)^{-7}}{0{,}08} + 1000 \cdot (1{,}08)^{-7} = 45000$.
- **Задача 101.** Рыночная цена 20-ти процентной облигации номиналом 3500 руб. за два года до погашения равна 4300 руб. найти текущую стоимость облигации при процентной ставке: а) 14%, б) 20%, в) 23% и её курс.

Решение задачи 101

- Курс облигации равен $K = \frac{V}{N} = \frac{4300}{3500} = 1{,}2286$ или 122,86%. Текущую стоимость найдём по формуле $P = c \cdot N \cdot \frac{1 - (1+r)^{-n}}{r} + N \cdot (1+r)^{-n}$

а) $P = 0{,}2 \cdot 3500 \cdot \frac{1 - (1+0{,}14)^{-2}}{0{,}14} + 3500 \cdot (1+0{,}14)^{-2} = 3845{,}8$

б) $P = 0{,}2 \cdot 3500 \cdot \frac{1 - (1+0{,}2)^{-2}}{0{,}2} + 3500 \cdot (1+0{,}2)^{-2} = 3500$

в) $P = 0{,}2 \cdot 3500 \cdot \frac{1 - (1+0{,}23)^{-2}}{0{,}23} + 3500 \cdot (1+0{,}23)^{-2} = 3345{,}23$

Задачи 102, 103

- Найти срок ренты постнумерандо, если известны .
- **Решение.** Найдём срок ренты n, исходя из формулы вычисления наращенной суммы
- ; ; .

$$S = 2000; i = 15\%; R = 100$$

- **Задача 103.** Найти рентный платеж ренты постнумерандо, если известны

$$S = R \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i} \quad 2000 = 100 \cdot \frac{(1+0{,}15)^n - 1}{0{,}15} \quad (1{,}15)^n - 1 = 3 \quad (1{,}15)^n = 4$$

$$n = \frac{ln4}{ln1{,}15} = 9{,}92$$

- 4

$$A = 3500; i = 8\%; n = 10$$

- ; ; ;

Решение задачи 103. Задача 104

- Найдём рентный платёж R, исходя из формулы вычисления приведённой величины A. ;
- .
- **Задача 104.** Семья планирует через 5 лет купить машину за 50000 у.е. С этой целью ежемесячно на банковский депозит вносится определенная сумма в у.е. Найти этот ежемесячный платеж, если годовая

$$A = R \cdot \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i} \qquad 3500 = R \cdot \frac{1 - (1+0{,}08)^{-10}}{0{,}08}$$

$$R = \frac{3500 \cdot 0{,}08}{1 - 1{,}08^{-10}} = 521{,}6$$

- з

Задачи 104, 105

- банковская ставка составляет 13% с ежемесячным начислением процентов.
- **Решение.** . .
- Месячный взнос равен R/12 = 492,3.
- **Задача 105.** Найти размер вклада, обеспечивающего получение в конце каждого года 2000 руб. бесконечно долго при сложной ставке 14% годовых.
- Решение.

$$50000 = R \cdot \frac{\left(1 + \frac{0,13}{12}\right)^{60} - 1}{0,13} \qquad R = \frac{6500}{\left(1 + \frac{0,13}{12}\right)^{60} - 1} = 5907,57$$

- задача

$$A = \frac{R}{i} = \frac{2000}{0,14} = 14285,714$$

Задача 106

- Во сколько раз больше будет наращенная сумма в конце n-ого периода при ежепериодном (в конце периода) платеже R, чем при разовом платеже в начальный момент времени?
- **Решение.** $S_1 = R \cdot \dfrac{(1+i)^n - 1}{i}$; $S_2 = R \cdot (1+i)^n$; $\dfrac{S_1}{S_2} = \dfrac{(1+i)^n - 1}{i \cdot (1+i)^n}$
- **Задача 107.** Для бессрочной (вечной) ренты определить, что больше увеличит приведенную стоимость этой ренты,

Задачи 106, 107

- увеличение рентного платежа на 3% или уменьшение процентной ставки на 3%?
- **Решение**. $S = \frac{R}{i}$; $S_1 = \frac{1{,}03R}{i}$; $S_2 = \frac{R}{0{,}97i} = 1{,}0309\frac{R}{i}$ Увеличение процентной ставки приведёт к большему увеличению приведенной стоимости ренты.
- **Задача 107**. Фонд создается в течение 12 лет с ежегодными взносами 120000 у.е. в конце года. На поступившие средства

Задача 107

- начисляется 4% годовых, если сумма не превышает 250000 у.е. и 4,5% годовых, если сумма превышает 250000 у.е. Чему будет равна величина фонда через 12 лет?
- **Решение.** $S_1 = 120000 \cdot \frac{1{,}04^n - 1}{0{,}04} < 250000$; $1{,}04^n < \frac{1}{12} + 1$;

$n < \frac{ln\, ^{13}/_{12}}{ln 1{,}04} = 2{,}0428$; $S_1 = 120000 \cdot \frac{1{,}04^3 - 1}{0{,}04} = 374592$;

- $S = 374592 \cdot 1{,}045^9 + 120000 \cdot \frac{1{,}045^9 - 1}{0{,}045} = 1852933{,}06$

Задача 108

- Сколько нужно вносить ежегодно на счет в банке под 5,5% годовых, чтобы через 14 лет накопить 90000 у.е., если: а) взносы в конце каждого квартала; б) взносы в конце каждого месяца?
- **Решение.** Воспользуемся формулой
- $S = \frac{R}{p} \cdot \frac{\left(1 + \frac{i}{k}\right)^{kn} - 1}{\left(1 + \frac{i}{k}\right)^{k/p} - 1}$. В случае а) p = 4, k = 1, i = 0,055, n = 14, S = 90000. Следовательно

$$90000 = \frac{R}{4} \cdot \frac{1{,}055^{14} - 1}{1{,}055^{1/4} - 1} \qquad R = \frac{4 \cdot 90000 \cdot \left(1{,}055^{1/4} - 1\right)}{1{,}055^{14} - 1} = 4346{,}4$$

Задачи 108, 109

- . В случае б) p = 12; $R = \dfrac{12 \cdot 90000 \cdot \left(1{,}055^{1/12} - 1\right)}{1{,}055^{14} - 1} = 4327{,}09$

- **Задача 109.** За сколько лет можно накопить 150000 у.е., если в конце каждого квартала на счет вносится 10000 у.е. и на данные средства начисляются проценты в конце каждого полугодия по ставке 6% годовых? На сколько нужно увеличить годовые выплаты, чтобы срок уменьшился на полгода?

Решение задачи 109. Задача 110

- Воспользуемся формулой $S = \frac{R}{p} \cdot \frac{\left(1 + \frac{i}{k}\right)^{kn} - 1}{\left(1 + \frac{i}{k}\right)^{k/p} - 1}$
- где S = 150000; p = 4; i= 0,06; k = 2; R/4 = 10000; R =40000; Найти n. Имеем

$$1{,}03^{2n} = 15 \cdot \left(\sqrt{1{,}03} - 1\right) + 1 \qquad n = \frac{ln\left(15 \cdot \left(\sqrt{1{,}03} - 1\right) + 1\right)}{2 \cdot ln1{,}03} = 3{,}41$$

Задача 110. Фонд создается в течение 10 лет, взносы поступают в конце каждого квартала равными суммами. На поступившие средства в конце года начисляется 7% годовых.

Решение задачи 109

- На сколько процентов возрастет сумма фонда в конце 10-го года при переходе к непрерывной капитализации процентов?
- **Решение.** Найдём наращенную сумму при ежегодной капитализации
- $S_1 = R \cdot \dfrac{(1+0{,}07)^{10\cdot 0{,}07} - 1}{0{,}07} = 13{,}82R$. Найдём наращенную сумму при непрерывной капитализации
- $S_2 = R \cdot \dfrac{e^{10\cdot 0{,}07} - 1}{e^{0{,}07} - 1} = 13{,}98R$. Искомый процент равен .

$$p = \frac{S_2 - S_1}{S_1} = \frac{0{,}16R}{13{,}82R} \cdot 100 = 1{,}16\%$$

Задача 110

- Вычислить приведенную и наращенную величины непрерывной 7-летней ренты с непрерывным начислением процентов с рентным платежом 300 при ставке 15% годовых.
- **Решение.** Приведенная величина равна
- $$A = R \cdot \frac{1 - e^{-n}}{i} = 300 \cdot \frac{1 - e^{-7}}{0,15} = 1958,18$$.

  Наращенная сумма равна

$$A = R \cdot \frac{1 - e^{-n}}{i} = 300 \cdot \frac{1 - e^{-7}}{0,15} = 1958,18$$

Задача 111

- Приведенная величина 12-летней ренты пренумерандо с непрерывным начислением процентов, процентной ставкой 5% равна 27000 руб. Найти наращенную сумму.
- **Решение.** Воспользуемся формулой, связывающей наращенную величину с приведённой суммой $S = A \cdot e^{i \cdot n} = 27000 \cdot e^{0,05 \cdot 12} = 49197,21$

Задача 112

- Приведенная величина 7-летней ренты пренумерандо с ежемесячным начислением процентов, процентной ставкой 7,5%, равна 100000 руб. Найти наращенную сумму.
- **Решение.** Наращенная сумма равна .
- $$S = A \cdot \left(1 + \frac{i}{12}\right)^{12n} = 100000 \cdot \left(1 + \frac{0{,}075}{12}\right)^{84} = 168769{,}92$$

Задача 113

- Наращенная сумма 5-летней ренты постнумерандо с ежеквартальным начислением процентов, процентной ставкой 4,25% равна 50000 руб. Найти приведенную величину.
- **Решение.** Найдём приведённую величину по формуле

$$A = S \cdot \left(1 + \frac{i}{k}\right)^{-k \cdot n} = 50000 \cdot \left(1 + \frac{0{,}0425}{4}\right)^{-20} = 40473{,}36$$

Задача 114

- Во сколько раз увеличится приведенная величина ренты постнумерандо, если платежи платить в начале периода? Ставка равна 20%.
- **Решение**. В 1 + i =1,2 раза.
- **Задача 115**. Во сколько раз увеличится приведенная величина квартальной ренты постнумерандо, если платежи платить в начале периода? Ставка равна 30%.

Решение задачи 115.

- Приведённая величина ренты пренумерандо равна приведённой величине ренты постнумерандо, умноженной на множитель наращения за один малый период (квартал), т. е. на
- $(1+i)^{1/4} = (1+0,3)^{1/4} = 1,0678$. Следовательно приведённая величина ренты пренумерандо в 1,0678 раза больше приведённой величины ренты постнумерандо.

Задача 116

- Какова процентная ставка, если наращенная величина месячной ренты постнумерандо увеличится в 1,0234 раза, если платежи платить в начале периода?
- **Решение.** Величина ренты пренумерандо в
- $(1+i)^{1/p}$ раза больше приведённой величины ренты постнумерандо. Поэтому $(1+i)^{1/12} = 1{,}0234$;
- $i = 1{,}0234^{12} - 1 = 0{,}3199$ или 31,99%.

Задача 117

- Какова процентная ставка, если приведенная величина ежедневной ренты постнумерандо увеличится в 1, 000687 раз, если платежи платить в начале периода (К=360)?
- **Решение.** Величина ренты пренумерандо в
- $(1+i)^{1/p}$ раза больше приведённой величины ренты постнумерандо. Поэтому, $(1+i)^{1/360} = 1,000687$;
- $i = 1,000687^{360} - 1 = 0,2805$ или 28,05%.

Задача 118

- Заменить ренту с параметрами $R_1 = 200;\ n = 5;\ i = 10\%$
  рентой с параметрами $R_2 = 100;\ i = 10\%$.
- **Решение**. Используем уравнение эквивалентности (равенство приведённых величин двух рент) $R_1 \frac{1-(1+i_1)^{-n_1}}{i_1} = R_2 \cdot \frac{1-(1+i_2)^{-n_2}}{i_2}$.
- $200 \frac{1-(1+0{,}1)^{-5}}{0{,}1} = 100 \cdot \frac{1-(1+0{,}1)^{-n}}{0{,}1}$; $2 - 2 \cdot 1{,}1^{-5} = 1 - 1{,}1^{-n}$;
- $1{,}1^{-n} = 2 \cdot 1{,}1^{-5} - 1$; $n = -\frac{ln(2 \cdot 1{,}1^{-5} - 1)}{ln1{,}1} = 14{,}9$

Задача 119

- Замените годовую ренту параметрами
- $R_1 = 2;\ n_1 = 2;\ i = 20\%$, на p-срочную (месячную) ренту $n_2 = 4;\ i = 20\%$.
- Решение. Используем уравнение эквивалентности (равенство приведённых величин двух рент).

$$R_1 \frac{1 - (1+i_1)^{-n_1}}{i_1} = \frac{R_2}{p} \cdot \frac{1 - (1 + i_2)^{-n_2}}{(1 + i_2)^{1/p} - 1}$$

:

- $$2 \frac{1 - (1 + 0{,}2)^{-3}}{0{,}2} = \frac{R_2}{p} \cdot \frac{1 - (1 + 0{,}2)^{-4}}{1{,}2^{1/12} - 1}$$

:

$$R_2 = \frac{120 \cdot (1 - 1{,}2^{-3})(1{,}2^{1/12} - 1)}{1 - 1{,}2^{-4}} = 1{,}495$$

Задача 120

- Замените две ренты постнумерандо с параметрами $R_1 = 200;\ n_1 = 4;\ i_1 = 10\%$ и $R_2 = 250;\ n_2 = 6;\ i_2 = 12\%$
- разовым платежом в момент времени $n = 4$
  , $i = 15\%$
- И процентной ставкой
- **Решение**. Используем уравнение эквивалентности $R_1 \cdot \dfrac{1-(1+i_1)^{-n_1}}{i_1} + R_2 \cdot \dfrac{1-(1+i_2)^{-n_2}}{i_2} = S \cdot (1+i)^{-n}$ (равенство приведённых величин двух рент)

$$200 \cdot \frac{1-(1{,}12)^{-4}}{0{,}12} + 250 \cdot \frac{1-(1{,}14)^{-6}}{0{,}14} = S \cdot (1{,}15)^{-4}$$

$$S = 1{,}15^4 \cdot 200 \cdot \frac{1-(1{,}12)^{-4}}{0{,}12} + 1{,}15^4 \cdot 250 \cdot \frac{1-(1{,}14)^{-6}}{0{,}14} = 2762{,}79$$

Задача 121

- Консолидируйте три ренты постнумерандо с параметрами $R_1 = 1000;\ n_1 = 3;\ i_1 = 10\%$ $R_2 = 1500;\ n_2 = 5;\ i_2 = 10\%$
- $R_3 = 2000;\ n_3 = 7;\ i_3 = 10\%$ 4-летней рентой постнумерандо с $i = 15\%$.
- **Решение.** Воспользуемся равенством суммы приведённых величин трёх данных рент и приведённой величины искомой ренты
- $$R_1 \cdot \frac{1 - (1+i_1)^{-n_1}}{i_1} + R_2 \cdot \frac{1 - (1+i_2)^{-n_2}}{i_2} + R_1 \cdot \frac{1 - (1+i_1)^{-n_1}}{i_1} = R \cdot \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i}$$

Задачи 121, 122

$$1000 \cdot \frac{1-\ (1{,}1)^{-3}}{0{,}1} +\ 1500 \cdot \frac{1-\ (1{,}1)^{-5}}{0{,}1} + 2000 \cdot \frac{1-\ (1{,}1)^{-7}}{0{,}1}$$
$$= R \cdot \frac{1-\ (1{,}15)^{-4}}{0{,}15}$$

$$R = \frac{1500 \cdot (1-\ 1{,}1^{-3}) +\ 2250 \cdot (1-\ 1{,}1^{-5}) + 3000 \cdot (1-\ 1{,}1^{-7})}{1-\ 1{,}15^{-4}} = 6273{,}21$$

Задача 122. Пусть доходность актива за месяц μ_1 равна 2%. Найти доходность актива за год μ при условии постоянства месячной доходности в течение года.

Решение задачи 122. Задача 123

- Доходность актива за год равна

$\mu = (1+\mu_1)^{12} - 1 = 1{,}03^{12} - 1 = 0{,}2628$ или 26,28%.

- **Задача 123.** Замените единовременный платеж 345000 руб. в момент времени $t = 2$
- p -срочной рентой постнумерандо с параметрами $R_1;\ n_1 = 5;\ i = 15\%;\ p = 6$
- **Решение.** Приравняем современные величины данного платежа и искомой ренты

$$\frac{R}{p} \cdot \frac{1 - (1+i_1)^{-n_1}}{(1+i_1)^{1/p} - 1} = S \cdot (1+i)^{-n}$$

Задачи 123, 124, 125

$$\frac{R}{6}\cdot\frac{1-(1{,}15)^{-5}}{(1{,}15)^{1/6}-1}=345000\cdot(1{,}15)^{-2R}$$

$$R=\frac{345000\cdot 1{,}15^{-2}\cdot\left(1{,}15^{1/6}-1\right)\cdot 6}{1-1{,}15^{-5}}=73360{,}95$$

- **Задача 124.** Доходность актива за год μ равна 24%. Найти доходность актива за квартал при условии ее постоянства.
- **Решение.** Квартальная ставка равна
- или 5,53%.

$$\mu_{1/4}=\sqrt[4]{1+\mu}-1=\sqrt[4]{1{,}24}-1=0{,}0553$$

- **Задача 125**. Замените единовременный платеж 600000 руб. в момент времени и процентной ставкой 8% -срочной рентой $t = 1$

Задача 125

- постнумерандо с параметрами $R_1 = 5000;\ n_1;\ i_1 = 8{,}25\%$
- **Решение.** Приравняем современные величины данного платежа и искомой ренты $\frac{R}{p} \cdot \frac{1 - (1 + i_1)^{-n_1}}{(1 + i_1)^{1/p} - 1} = S \cdot (1 + i)^{-n}$

$$\frac{5000}{12} \cdot \frac{1 - (1{,}0825)^{-n_1}}{(1{,}0825)^{1/12} - 1} = 60000 \cdot (1{,}08)^{-1}$$

$$1 - (1{,}0825)^{-n_1} = \frac{720000 \cdot \left(0{,}0825^{1/12} - 1\right)}{5000 \cdot 1.08}$$

$$-(1{,}0825)^{-n_1} = \frac{720 \cdot \left(0{,}0825^{1/12} - 1\right)}{5{,}4} - 1$$

$$(1{,}0825)^{-n_1} = 1 - \frac{800 \cdot \left(0{,}0825^{1/12} - 1\right)}{6}$$

$$n_1 = -\frac{ln\left(1 - \frac{400}{3} \cdot \left(1{,}0825^{1/12} - 1\right)\right)}{ln 1{,}0825} = 27{,}14$$

Задачи 126, 127

- Пусть доходности за два последовательных периода времени t_1, t_2 равны 20% и 30% соответственно. Найти доходность μ за период $t = t_1 + t_2$.
- **Решение.** Годовая доходность равна
- $\mu = (1 + \mu_1) \cdot (1 + \mu_2) - 1 = 1{,}2 \cdot 1{,}3 - 1 = 0{,}56$ или 56%.
- **Задача 127.** По вине пенсионного фонда семье в течение 3 лет не доплачивали 625 руб. ежемесячно. Какую сумму должен

Задачи 127, 128

- должен выплатить фонд вместе с процентами (10% годовых)?
- **Решение.** Сумма выплаты равна

$$S = \frac{R}{p} \cdot \frac{1 - (1+i)^{-n_1}}{(1+i)^{1/p} - 1} = 625 \cdot \frac{1{,}1^3 - 1}{1{,}1^{1/12} - 1} = 25943{,}24$$

- **Задача 128.** Доходность актива за период $t = t_1 + t_2 + t_3$ равна 0,75. Доходности актива $\mu_1; \mu_2; \mu_3$ за периоды соответственно $t_1; t_2; t_3$ составляют геометрическую прогрессию со знаменателем 1,2. Найти доходность актива за каждый период.

Решение задачи 128

- Доходности активов за периоды равны
- $\mu_1;\ \mu_2 = 1,2 \cdot \mu_1;\ \mu_3 = 1,44 \cdot \mu_1$. Тогда $(1+\mu_1)\cdot(1+1,2\mu_1)\cdot(1+1,44\mu_1) = 1+0,75$

$$f(\mu_1) = (1+\mu_1)\cdot(1+1,2\mu_1)\cdot(1+1,44\mu_1) - 1,75 = 0 \quad f(0,2) = 0,1665 \quad f(0,19) = 0,11$$

$$f(0,18) = 0,0568 \quad f(0,17) = 0,00352 \quad f(0,16) = -1,43 \quad f(0,168) = -0,007$$

Так как значения функции f имеют разные знаки в точках 0,168 и 0,17, то с точностью до 0,001 (0,1%) искомое значение доходности $\mu_1 = 0,168;\ \mu_2 = 1,2 \cdot \mu_1 = 0,228;\ \mu_3 = 1,44 \cdot \mu_1 = 0,2434$