Основы теории управления

Лекция 6

Устойчивость линейных САУ

Критерии устойчивости

Устойчивость линейной САУ

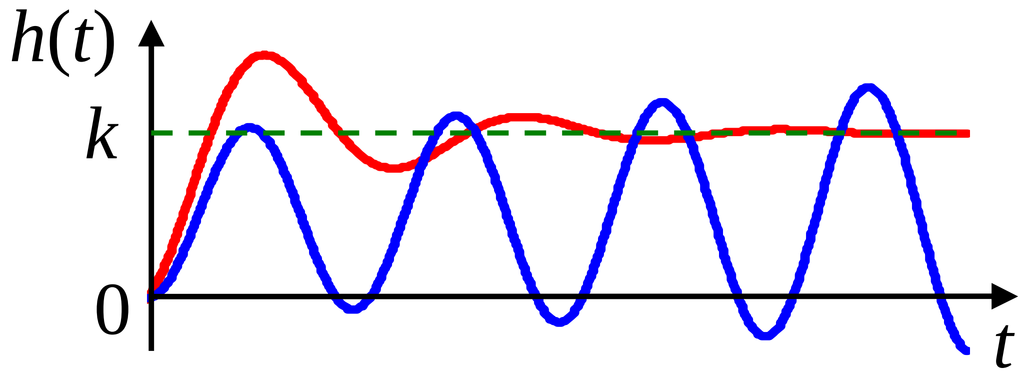
Устойчивость – это свойство системы возвращаться в исходный или близкий к нему установившийся режим после всякого выхода из него в результате какого-либо воздействия.

При ограниченном входном воздействии выходной сигнал также является ограниченным и процессы в системе стремятся к определенному значению при любых начальных условиях.

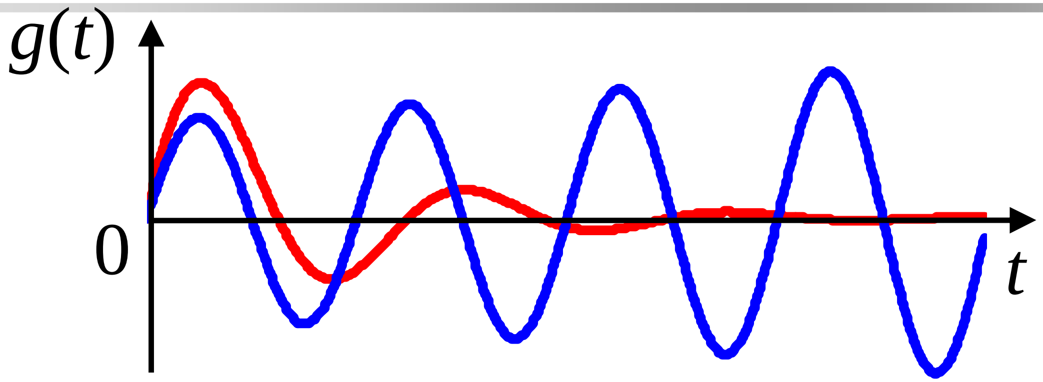
В случае линейной системы устойчивость определяется только ее структурой и параметрами и не зависит от величины внешних воздействий и начальных условий.

Устойчивость линейной САУ

Устойчивость – это свойство системы возвращаться в исходный или близкий к нему установившийся режим после всякого выхода из него в результате какого-либо воздействия.



$$\lim_{t\to\infty} h(t) = k$$



$$\lim_{t\to\infty} g(t) = 0$$

Характеристическое уравнение

$$W(p) = \frac{b_m p^m + \ldots + b_1 p + b_0}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \ldots + a_1 p + a_0}$$

Характеристическое уравнение:

$$a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \ldots + a_1 p + a_0 = 0$$

Корни уравнения: $\lambda_i,\ i = 1,..,n$

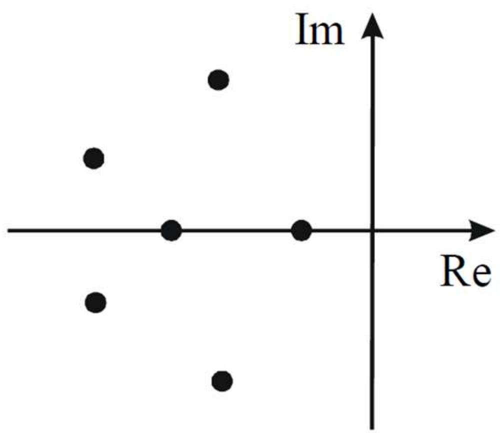
Процесс в системе: $x(t) = \sum_{i=1}^{n} C_i e^{\lambda_i t} x_i(0)$

Общее условие устойчивости линейных систем

Характеристическое уравнение:

$$a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \ldots + a_1 p + a_0 = 0$$

Для устойчивости линейной системы **необходимо и достаточно**, чтобы все корни характеристического уравнения имели отрицательную вещественную часть.



Корни должны располагаться в левой полуплоскости комплексной плоскости.

Необходимое условие устойчивости

Характеристический полином:

$$A(p) = a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \ldots + a_1 p + a_0$$

$$A(p) = a_n (p - \lambda_n)(p - \lambda_{n-1}) \ldots (p - \lambda_1)$$

Если все корни вещественные и отрицательные, то

$$A(p) = a_n (p + \alpha_n)(p + \alpha_{n-1}) \ldots (p + \alpha_1), \text{где } \alpha_i = -\lambda_i .$$

Раскрывая скобки, получим характеристический полином с **положительными коэффициентами**.

Необходимое условие устойчивости

Для устойчивой системы **необходимо**, чтобы все коэффициенты характеристического полинома были положительными.

$$\boldsymbol{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \ldots + a_1 p + a_0 = 0}$$

$$\boldsymbol{a_i > 0,\ i = 0,..,n}$$

При наличии хотя бы одного отрицательного коэффициента система будет неустойчивой.

Положительность коэффициентов не является достаточным условием устойчивости!

Критерии устойчивости

1. Алгебраические
   - Критерий Гурвица
   - Критерий Рауса

2. Частотные
   - Критерий Михайлова
   - Критерий Найквиста
   - D-разбиение (Ю.И. Неймарк)

Критерий устойчивости А. Гурвица

$$a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \ldots + a_1 p + a_0 = 0$$

Составим определитель Гурвица по следующим правилам:

1. Главная диагональ содержит коэффициенты a_{n-1}, a_{n-2},..., a_0.
2. Над главной диагональю – коэффициенты, индекс которых уменьшается на 1.
3. Под главной диагональю – коэффициенты, индекс которых увеличивается на 1.

$$\Delta = \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \cdots & 0 & 0 \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_2 & a_0 \end{bmatrix}$$

Критерий устойчивости А. Гурвица

$$\Delta = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_{n-1} & \boldsymbol{a}_{n-3} & \boldsymbol{a}_{n-5} & \cdots & 0 & 0 \\ \boldsymbol{a}_{n} & \boldsymbol{a}_{n-2} & \boldsymbol{a}_{n-4} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \boldsymbol{a}_{n-1} & \boldsymbol{a}_{n-3} & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \boldsymbol{a}_{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \boldsymbol{a}_{2} & \boldsymbol{a}_{0} \end{bmatrix}$$

Для устойчивости линейной системы **необходимо и достаточно**, чтобы были положительными n главных определителей матрицы Гурвица.

Критерий устойчивости А. Гурвица

Для устойчивости линейной системы **необходимо и достаточно**, чтобы n главных определителей матрицы Гурвица были положительными.

$$\left.\begin{array}{c} \Delta_1 = a_{n-1} \\ \\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ a_n & a_{n-2} \end{vmatrix} \\ \\ \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix} \\ \\ \ldots \end{array}\right\} > 0$$

Критерий устойчивости А. Гурвица

Для уравнения второго порядка:

$$a_2 p^2 + a_1 p + a_0 = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\Delta = \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ a_2 & a_0 \end{bmatrix}$$

$$\Delta_1 = a_1 \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & 0 \\ a_2 & a_0 \end{vmatrix} = a_1 a_0$$

Таким образом, для уравнения второго порядка положительность коэффициентов является необходимым и достаточным условием устойчивости.

Критерий Э. Дж. Рауса

Критерий сформулирован в виде **алгоритм**а,
по которому заполняется специальная таблица.

$$a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \ldots + a_1 p + a_0 = 0$$

1. В первой строке таблицы записываются коэффициенты характеристического уравнения, начиная с $\mathbf{a_n}$, через один, по убыванию индекса.

2. Во второй строке таблицы записываются коэффициенты характеристического уравнения, начиная с $\mathbf{a_{n-1}}$, через один, по убыванию индекса.

Критерий Э. Дж. Рауса

$$a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \ldots + a_1 p + a_0 = 0$$

1. В первой строке таблицы записываются коэффициенты характеристического уравнения, начиная с $\mathbf{a_n}$, через один, по убыванию индекса.
2. Во второй строке таблицы записываются коэффициенты характеристического уравнения, начиная с $\mathbf{a_{n-1}}$, через один, по убыванию индекса.

	1	2	3	…
1	$c_{11} = a_n$	$c_{12} = a_{n-2}$	$c_{13} = a_{n-4}$	…
2	$c_{21} = a_{n-1}$	$c_{22} = a_{n-3}$	$c_{23} = a_{n-5}$	…
…	…	…	…	…

Критерий Э. Дж. Рауса

3. Для построения третьей и последующих строк вычисляется величина $\mathbf{r_i}$ ($i = 3, 4, \ldots$) по формуле:

$$r_i = c_{i-2,1} / c_{i-1,1}.$$

	1	2	3	…	r_i
1	$c_{11} = a_n$	$c_{12} = a_{n-2}$	$c_{13} = a_{n-4}$	…	-
2	$c_{21} = a_{n-1}$	$c_{22} = a_{n-3}$	$c_{23} = a_{n-5}$	…	-
3	…	…	…	…	$r_3 = c_{11} / c_{21}$
…	…	…	…	…	

Критерий Э. Дж. Рауса

4. Записывается третья и последующие строки, элементы которых вычисляются по формуле:

$$c_{ij} = c_{i-2,j+1} - r_i * c_{i-1,j+1}.$$

	1	2	3	…	r_i
1	$c_{11} = a_n$	$c_{12} = a_{n-2}$	$c_{13} = a_{n-4}$	…	-
2	$c_{21} = a_{n-1}$	$c_{22} = a_{n-3}$	$c_{23} = a_{n-5}$	…	-
3	$c_{31} = c_{12}-r_3*c_{22}$	$c_{32} = c_{13}-r_3*c_{23}$	$c_{33} = c_{14}-r_3*c_{24}$	…	$r_3 = c_{11} / c_{21}$
4	$c_{41} = c_{22}-r_4*c_{32}$	$c_{42} = c_{23}-r_4*c_{33}$	$c_{43} = c_{24}-r_4*c_{34}$	…	$r_4 = c_{21} / c_{31}$
5	$c_{51} = c_{32}-r_5*c_{42}$	$c_{52} = c_{33}-r_5*c_{43}$	$c_{53} = c_{34}-r_5*c_{44}$	…	$r_5 = c_{31} / c_{41}$
…	…	…	…	…	…

Число строк в таблице равно **n+1**.

Критерий Э. Дж. Рауса

Для устойчивости линейной системы **необходимо и достаточно**, чтобы коэффициенты первого столбца таблицы Рауса были одного знака (положительными).

Если это не выполняется, то система неустойчива, а количество правых корней равно числу перемен знака в первом столбце.

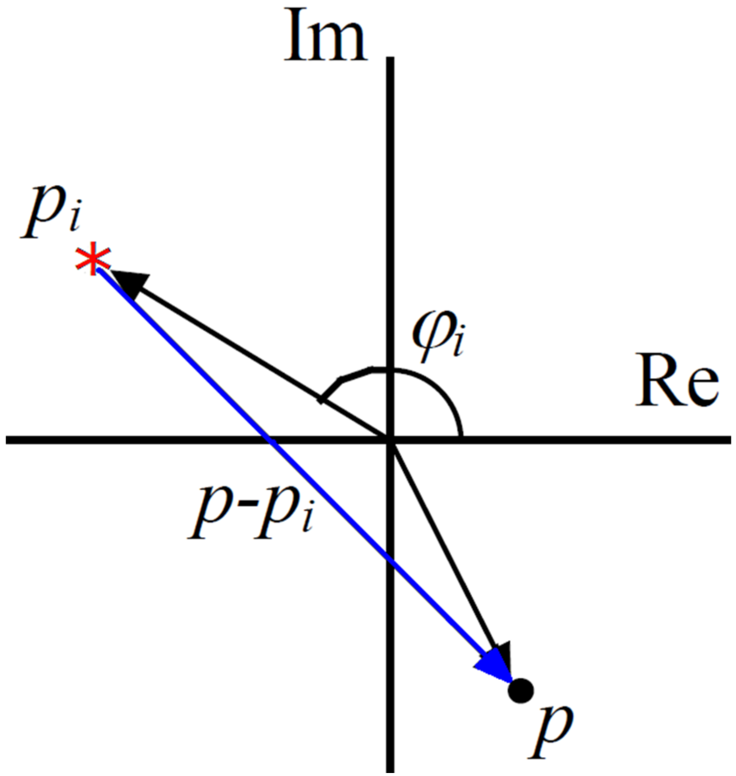
	1	2	3	…	r_i
1	$c_{11} = a_n$	$c_{12} = a_{n-2}$	$c_{13} = a_{n-4}$	…	-
2	$c_{21} = a_{n-1}$	$c_{22} = a_{n-3}$	$c_{23} = a_{n-5}$	…	-
3	$c_{31} = c_{12}-r_3*c_{22}$	$c_{32} = c_{13}-r_3*c_{23}$	$c_{33} = c_{14}-r_3*c_{24}$	…	$r_3 = c_{11} / c_{21}$
4	$c_{41} = c_{22}-r_4*c_{32}$	$c_{42} = c_{23}-r_4*c_{33}$	$c_{43} = c_{24}-r_4*c_{34}$	…	$r_4 = c_{21} / c_{31}$
5	$c_{51} = c_{32}-r_5*c_{42}$	$c_{52} = c_{33}-r_5*c_{43}$	$c_{53} = c_{34}-r_5*c_{44}$	…	$r_5 = c_{31} / c_{41}$
…	…	…	…	…	…

Критерий устойчивости А.В. Михайлова

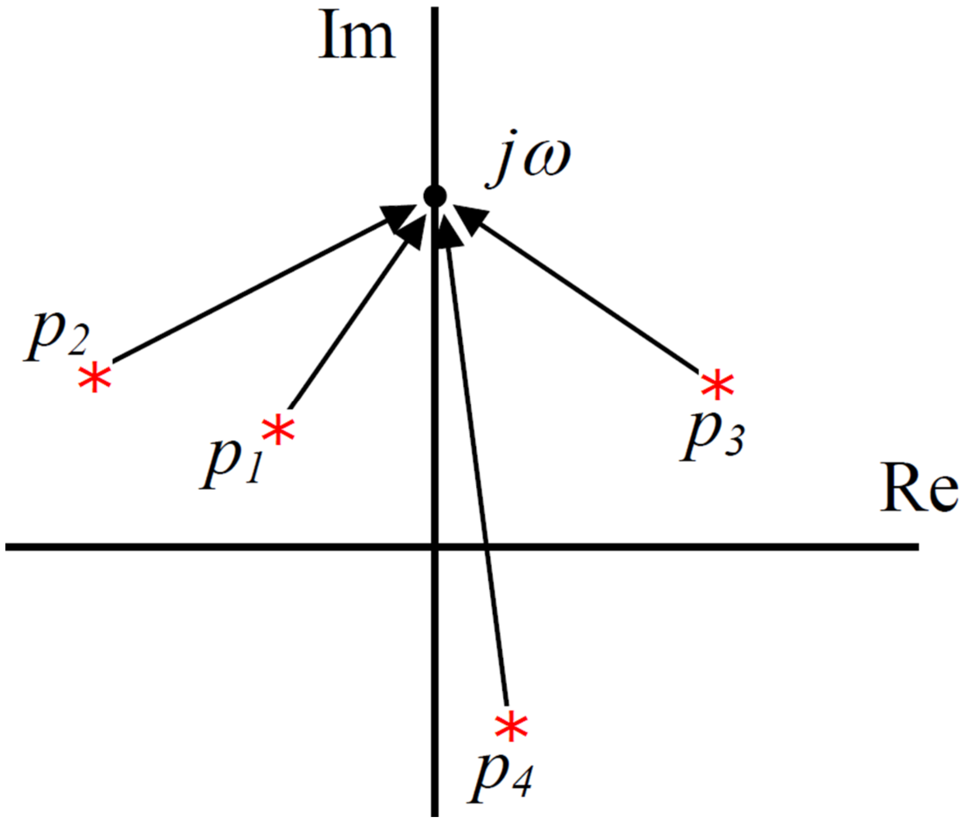
$$M(p) = a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \ldots + a_1 p + a_0$$

Корни уравнения: $p_1, p_2, \ldots, p_n$

$$M(p) = a_n (p - p_1)(p - p_2) \ldots (p - p_n)$$



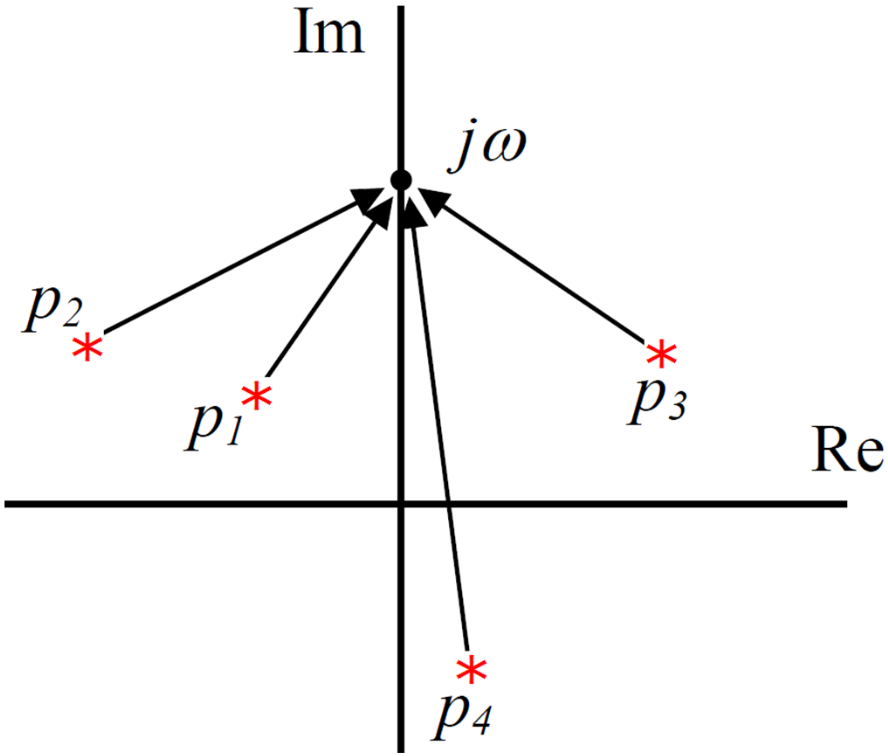
Критерий устойчивости А.В. Михайлова



Заменим $\boldsymbol{p}$ на $\boldsymbol{j\omega}$:

$$\boldsymbol{M}(j\omega) = \boldsymbol{a_n}(j\omega - \boldsymbol{p}_1)(j\omega - \boldsymbol{p}_2)\ldots(j\omega - \boldsymbol{p_n})$$

Критерий устойчивости А.В. Михайлова



При изменении частоты

от $-\infty$ до $+\infty$ каждый вектор будет поворачиваться.

Если корень левый, то вектор повернется против часовой стрелки.

Для правого корня вектор вращается по часовой стрелке.

$$M(j\omega) = a_n \prod_{i=1}^{n} (j\omega - p_i) \qquad \varphi_M = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i$$

Критерий устойчивости А.В. Михайлова

Если имеется *k* правых корней, то суммарный угол поворота будет равен:

$$\varphi_M = \pi(n-k) - \pi k = \pi\left(n-2k\right)$$

Для устойчивости системы необходимо и достаточно, чтобы все корни были левыми, тогда

$$\varphi_M = \pi n$$

При изменении частоты от $-\infty$ до $+\infty$ получим кривую на комплексной плоскости – годограф Михайлова.

Критерий устойчивости А.В. Михайлова

Уравнение годографа Михайлова:

$$M(j\omega) = a_n (j\omega)^n + a_{n-1}(j\omega)^{n-1} + \ldots + a_1(j\omega) + a_0$$

$$M(j\omega) = \mathbf{R}(\omega) + jI(\omega)$$

Действительная часть: $\mathbf{R}(-\omega) = \mathbf{R}(\omega)$ - четная ф-ция

Мнимая часть: $I(-\omega) = -I(\omega)$ - нечетная ф-ция

$$M(-j\omega) = \mathbf{R}(\omega) - jI(\omega)$$

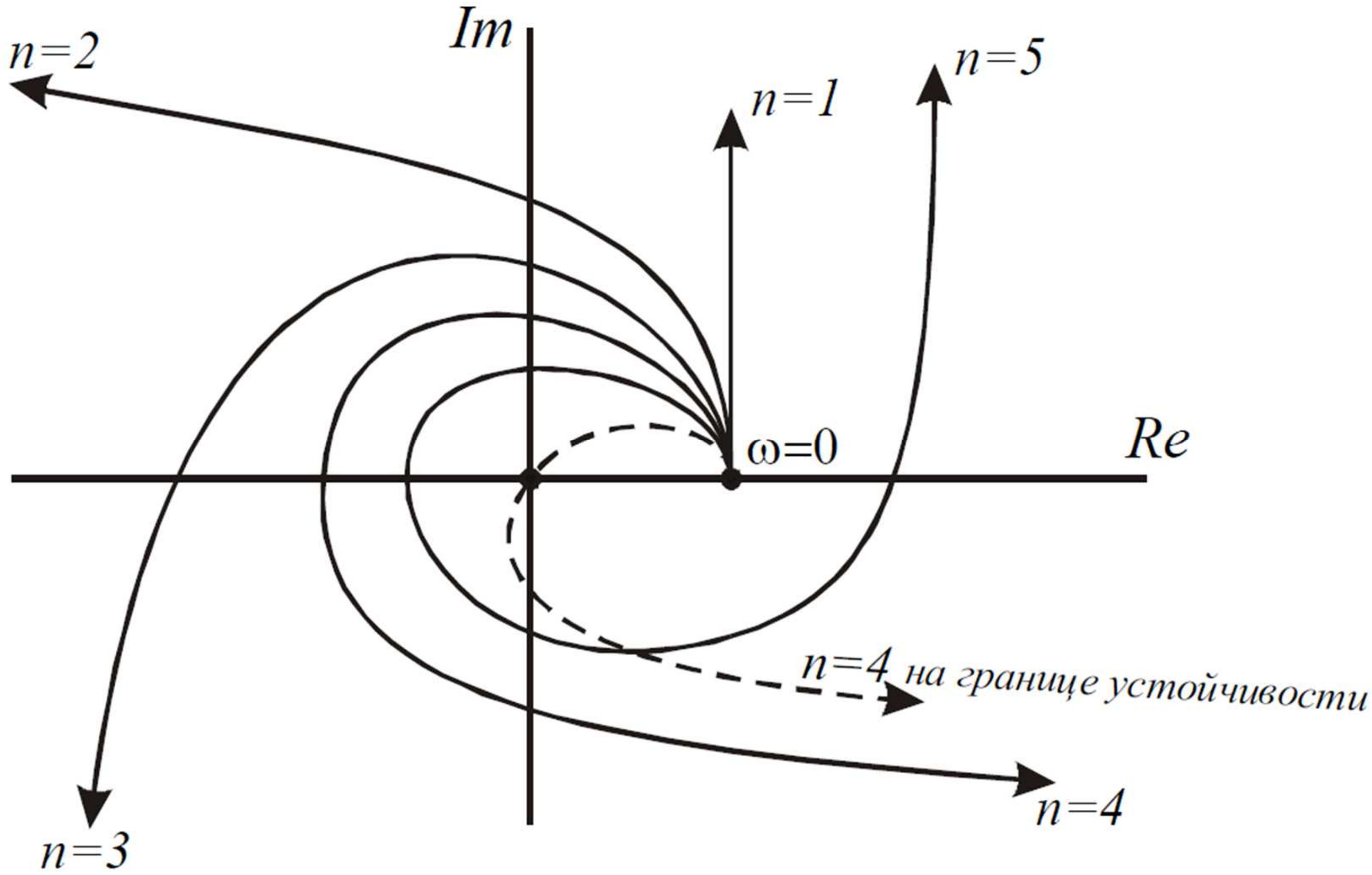
Годограф симметричен относительно вещественной оси

Критерий устойчивости А.В. Михайлова

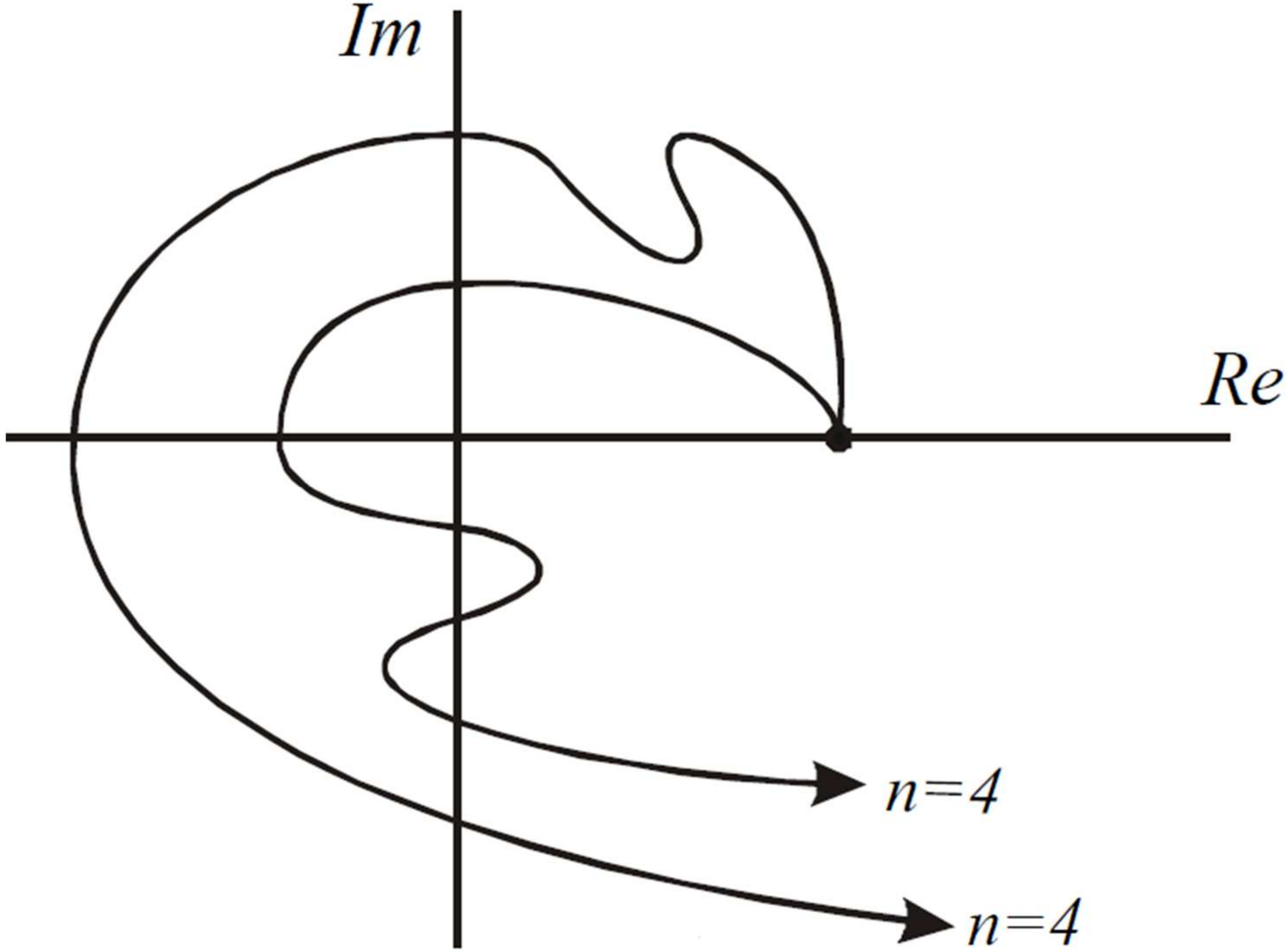
Для того, чтобы система была устойчива, **необходимо и достаточно**, чтобы при изменении частоты от 0 до $+\infty$ годограф Михайлова прошёл столько квадрантов, каков порядок характеристического уравнения, причем начинался бы с положительной действительной оси и не нарушал порядок пересечений вещественной и мнимой осей комплексной плоскости М.

Условие границы устойчивости (критерий Михайлова)

$$F(j\omega_0) = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} R_F(\omega_0) = 0, \\ I_F(\omega_0) = 0; \end{cases}$$



Неустойчивые системы



Спасибо за внимание!