Основы теории управления

Лекция 2

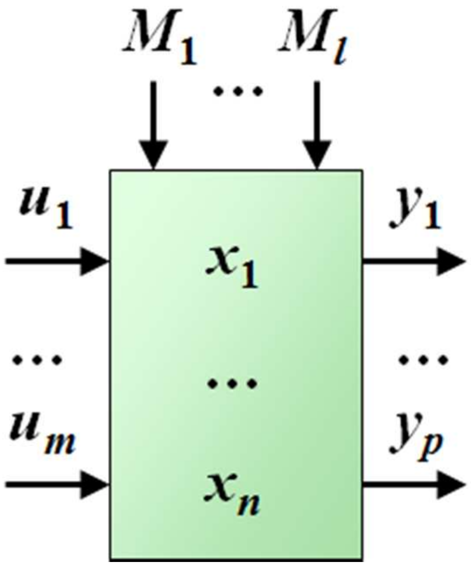
Темы лекции

- Математическое описание динамических систем.

- Применение операционного исчисления для анализа систем.

Математическое описание динамических систем

Поведение объекта описывается системой уравнений.



$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = f\left(x, u, \mathrm{F}, \mathrm{t}\right), \\ y = g\left(x\right), \\ \dfrac{du}{dt} = v\left(x, v\right). \end{cases}$$

Вектор-функции *f, g* и *v* могут быть нелинейными.

Математическое описание динамических систем

Линейное дифференциальное уравнение - это наиболее общая форма математического описания поведения динамических систем и их элементов.

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \ldots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) =$$

$$b_m \frac{d^m u(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} u(t)}{dt^{m-1}} + \ldots + b_1 \frac{du(t)}{dt} + b_0 u(t)$$

$u(t)$ – входная величина,

$y(t)$ – выходная величина,

a_i и b_j – параметры (константы).

Принцип суперпозиции

Для автоматических систем управления, описываемых линейным уравнением, справедлив **принцип наложения или суперпозиции:**

Изменение выходной величины $y(t)$, возникающее при действии на систему нескольких входных сигналов $u_i(t)$, равно сумме изменений $y_i(t)$ величины $y(t)$, вызываемых каждым сигналом в отдельности.

Операторная форма записи уравнений

Введем специальное обозначение для операции дифференцирования:

$$\frac{d}{dt} = p$$

Тогда k-я производная будет обозначаться следующим образом:

$$\frac{d^k}{dt^k} = p^k$$

Операторная форма записи уравнений

Линейное дифференциальное уравнение:

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \ldots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y =$$

$$b_m \frac{d^m u}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} u}{dt^{m-1}} + \ldots + b_1 \frac{du}{dt} + b_0 u$$

Запись в операторной форме:

$$a_n p^n y + a_{n-1} p^{n-1} y + \ldots + a_1 p y + a_0 y =$$

$$b_m p^m u + b_{m-1} p^{m-1} u + \ldots + b_1 p u + b_0 u$$

Операторная форма записи уравнений

Оператор *p* можно рассматривать как алгебраический сомножитель, а выражение *py* – как произведение.

$$\left(a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \ldots + a_1 p + a_0\right) y =$$

$$\left(b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \ldots + b_1 p + b_0\right) u$$

Многочлены от *p* степени *m* и *n*, находящиеся в левой и правой частях уравнения, называются **дифференциальными операторами**.

Порядок наивысшей производной во входном операторе не может быть больше порядка наивысшей производной в собственном операторе, т.е. $m \leq n$.

Если это условие не выполняется, то уравнение соответствует **физически нереализуемой системе**.

Стандартная форма записи уравнений

Уравнение преобразовывают таким образом, чтобы коэффициент при выходной величине был равен единице.

$$\left(a_2 p^2 + a_1 p + a_0\right) y = \left(b_1 p + b_0\right) u$$

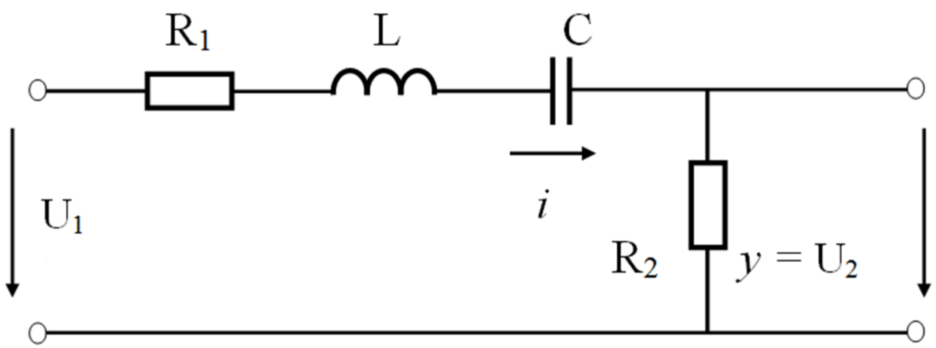
$$\Downarrow$$

$$\left(T_2^2 p^2 + T_1 p + 1\right) y = k\left(Tp + 1\right) u$$

$k = b_0 / a_0$ - передаточный коэффициент

$T = b_1 / b_0\,,\quad T_1 = a_1 / a_0\,,\quad T_2^2 = a_2 / a_0$ - постоянные времени

Пример описания динамической системы



$$iR_1 + L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int i dt + iR_2 = U_1$$ - по второму закону Кирхгофа

$$U_2 = iR_2 \Rightarrow i = U_2 / R_2$$

Подставим в первую формулу выражение для тока *i*:

$$\left(\frac{R_1}{R_2}\right)U_2 + \left(\frac{L}{R_2}\right)\frac{dU_2}{dt} + \frac{1}{C}\int \frac{U_2}{R_2} dt + U_2 = U_1$$

Пример описания динамической системы

$$\left(\frac{R_1}{R_2}\right)U_2+\left(\frac{L}{R_2}\right)\frac{dU_2}{dt}+\frac{1}{C}\int\frac{U_2}{R_2}dt+U_2=U_1$$

- интегрально-дифференциальное уравнение

Продифференцируем и получим:

$$\left(\frac{L}{R_2}\right)\frac{d^2U_2}{dt^2}+\left(1+\frac{R_1}{R_2}\right)\frac{dU_2}{dt}+\frac{1}{R_2C}U_2=\frac{dU_1}{dt}$$

Пример описания динамической системы

$$\left(\frac{L}{R_2}\right)\frac{d^2U_2}{dt^2}+\left(1+\frac{R_1}{R_2}\right)\frac{dU_2}{dt}+\frac{1}{R_2C}U_2=\frac{dU_1}{dt}$$

Перепишем в стандартной форме:

$$T_2^2\frac{d^2U_2}{dt^2}+T_1\frac{dU_2}{dt}+U_2=T\frac{dU_1}{dt}$$

В операторной форме:

$$\left(T_2^2p^2+T_1p+1\right)U_2=TpU_1$$

Понижение порядка дифференциального уравнения

Пусть поведение объекта описывается дифференциальным уравнением *n*-го порядка:

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = b_0 u$$

Можно перейти к системе дифференциальных уравнений первого порядка. Для этого:

1) Разрешим уравнение относительно старшей производной:

$$y^{(n)} = -\left(\frac{a_{n-1}}{a_n} y^{(n-1)} + \frac{a_{n-2}}{a_n} y^{(n-2)} + \ldots + \frac{a_1}{a_n} y' + \frac{a_0}{a_n} y \right) + \frac{b_0}{a_n} u$$

Понижение порядка дифференциального уравнения

2). Введем обозначения:

$$\begin{cases} y_1 = y, \\ y_2 = y_1' = y', \\ y_3 = y_2' = y'', \\ \ldots \\ y_n = y_{n-1}' = y^{(n-1)}. \end{cases}$$

Понижение порядка дифференциального уравнения

3). Запишем систему уравнений, объединив введенные обозначения и уравнение поведения системы:

$$\begin{cases} y_1' = y_2, \\ y_2' = y_3, \\ y_3' = y_4, \\ \ldots \\ y_n' = -\left(\dfrac{a_{n-1}}{a_n} y_n + \dfrac{a_{n-2}}{a_n} y_{n-1} + \ldots + \dfrac{a_1}{a_n} y_2 + \dfrac{a_0}{a_n} y_1 \right) + \dfrac{b_0}{a_n} u. \end{cases}$$

Получили систему уравнений в **нормальной форме Коши**.

Применение операционного исчисления

Для решения задач теории автоматического управления наиболее удобным оказывается **операционный метод**, который основан на **функциональном преобразовании Лапласа.**

Преобразование Лапласа

Преобразованием Лапласа называется преобразование функции $x(t)$ действительной переменной t в функцию $X(s)$ другой **комплексной** переменной s $\left(x(t) \to X(s)\right)$ при помощи оператора, определяемого соотношением:

$$X(s) = \int_0^{\infty} x(t) e^{-st} dt = L\left[x(t)\right]$$

Преобразование Лапласа

Функцию времени $x(t)$, входящую в интеграл Лапласа, называют **оригиналом**, а результат интегрирования – функцию $X(s)$ – **изображением** функции $x(t)$ по Лапласу. L – оператор Лапласа.

Для нахождения оригинала по изображению используется соотношение:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma - j\infty}^{\sigma + j\infty} F(s) e^{st} ds = L^{-1}\left[F(s)\right]$$

Схема решения задач методами операционного исчисления

1. От искомых функций переходят к некоторым другим функциям (изображениям).

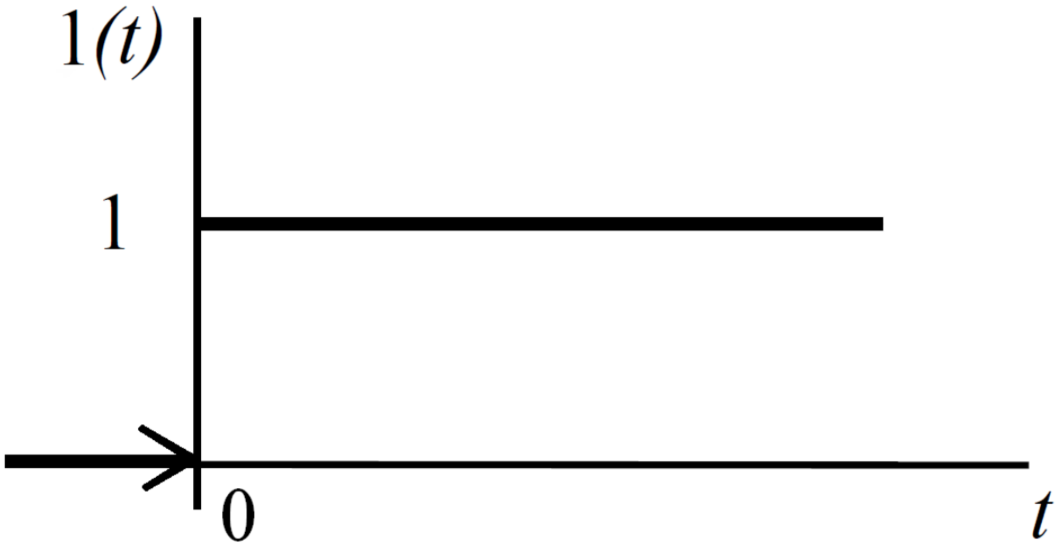
2. Над изображениями производят операции, соответствующие заданным операциям над самими функциями.

3. Получив некоторый результат при действиях над изображениями, возвращаются к самим функциям (оригиналам).

Единичная ступенчатая функция

Преобразование Лапласа выполнимо лишь для таких функций времени, которые равны нулю при *t<0*.

$$1(t) = \begin{cases} 0, \text{ при } t < 0, \\ 1, \text{ при } t \geq 0. \end{cases}$$



Свойства преобразования Лапласа

1. Теорема линейности.

Линейной комбинации оригиналов соответствует такая же комбинация изображений.

$$f_1(t) \pm f_2(t) \to F_1(s) \pm F_2(s)$$

$$\alpha f(t) \to \alpha F(s)$$

2. Теорема подобия.

Умножение аргумента оригинала на любое постоянное положительное число приводит к делению аргумента изображения на то же число.

$$f(\alpha t) \to \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{s}{\alpha}\right)$$

Свойства преобразования Лапласа

3. Теорема дифференцирования оригинала.

$$\frac{df(t)}{dt} \to s\,F(s) - f(0)$$

$$\frac{d^2 f(t)}{dt^2} \to s^2\,F(s) - sf(0) - f'(0)$$

При нулевых начальных условиях:

$$\frac{d^n f(t)}{dt^n} \to s^n\,F(s)$$

При нулевых начальных условиях дифференцированию оригинала $f(t)$ по переменной t соответствует умножение изображения $F(s)$ на комплексную переменную s.

Свойства преобразования Лапласа

4. Теорема интегрирования оригинала.

$$\int f(t)\,dt \to \frac{1}{s} F(s)$$

При нулевых начальных условиях интегрированию оригинала $f(t)$ по переменной t соответствует деление изображения $F(s)$ на комплексную переменную s.

Операционный метод решения дифференциальных уравнений

1. Исходное дифференциальное уравнение, записанное относительно искомой выходной функции *y(t),* заменить на алгебраическое уравнение относительно изображения *Y(s)* (**алгебраизация** дифференциального уравнения).

2. Решая алгебраическое уравнение при заданном *X(s),* найти изображение *Y(s)*.

3. По изображению *Y(s)* определить функцию *y(t)*. Для большинства практических задач достаточно таблиц из справочников по операционному исчислению.

Операционный метод решения дифференциальных уравнений

Преобразование Лапласа для часто встречающихся функций

$f(t)$(оригинал)	$F(s)$(изображение)
$1(t)$	$1/s$
$e^{-\alpha t}$	$1/(s+\alpha)$
t	$1/s^2$
$\sin\omega t$	$\omega/(s^2+\omega^2)$
$\cos\omega t$	$s/(s^2+\omega^2)$

Пример решения дифференциального уравнения

Решить уравнение:

$$a_2 y''(t) + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = b_0 1(t),$$
$$y(0) = y'(0) = 0.$$

Преобразуем по Лапласу:

$$a_2 s^2 Y(s) + a_1 s Y(s) + a_0 Y(s) = b_0\, 1/s\,,$$

$$\left(a_2 s^2 + a_1 s + a_0\right) Y(s) = b_0\, 1/s\,.$$

Найдем изображение: $Y(s) = \dfrac{b_0}{s\left(a_2 s^2 + a_1 s + a_0\right)}$.

Пример решения дифференциального уравнения

Каждая правильная рациональная дробь может быть единственным образом представлена в виде суммы элементарных дробей четырех видов

1. $\dfrac{A}{p-a}$

2. $\dfrac{A}{(p-a)^k},\ k\in N,\ k\geq 2$

3. $\dfrac{Bp+C}{p^2+bp+c},\ b^2-4c<0$

4. $\dfrac{Bp+C}{\left(p^2+bp+c\right)^k},\ b^2-4c<0,\ k\in N,\ k\geq 2$

Пример решения дифференциального уравнения

Разбивая на простейшие дроби, получим:

$Y(s) = \dfrac{C_0}{s} + \dfrac{C_1}{s - s_1} + \dfrac{C_2}{s - s_2}$, где s_1, s_2 – корни полинома.

Коэффициенты C_0, C_1 и C_2 находим методом неопределенных коэффициентов: $C_0 = \dfrac{b_0}{s_1 s_2}$, $C_1 = \dfrac{b_0}{s_1(s_1 - s_2)}$,

$C_2 = \dfrac{b_0}{s_2(s_2 - s_1)}$.

Переходя к оригиналу, получим:

$y(t) = C_0 + C_1 e^{s_1 t} + C_2 e^{s_2 t}$.

Спасибо за внимание!