

Нестационарная теплопроводность с источником теплоты

Рассматривается задача о динамике теплопроводности с источником теплоты в заданной области. Необходимо найти распределение температур в области, сравнить со стационарным распределением. Модель реализуется в программном пакете FreeFem++.

Заданная область:



Параметры области:

$W = 30 \text{ кВт/м}^2$ мощность источника

$t_a = 25 \text{ C}$ температура окружающей среды

$\mu = 16 \text{ м}^2/\text{с}$ температуропроводность

Нестационарное уравнение теплопроводности, описывающее изменение температуры $u(x,y,t)$ с течением времени, имеет вид:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \mu \Delta u = f(x, y, t), (x, y) \in D, \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

Для простоты рассматриваем случай, когда на границе области заданы граничные условия первого рода.

$$u_s = g(x, y, t)$$

Начальное распределение температуры удовлетворяет краевым условиям в начальный момент времени.

Тогда вариационную формулировку для этой задачи можно записать в FreeFem++ как:

```
// начальное распределение
```

```
func h = 25;
```

```
// внешние источники мощности тепла
```

```
func f = 30;
```

```
// функции для граничных условий
```

```
func g11 = 25; func g22 = 25; func g33 = 25; func g44 = 25; func g55 = 25; func g66 = 25;
```

```
// слабая (вариационная) формулировка
```

```
problem Heat(u,v) =
```

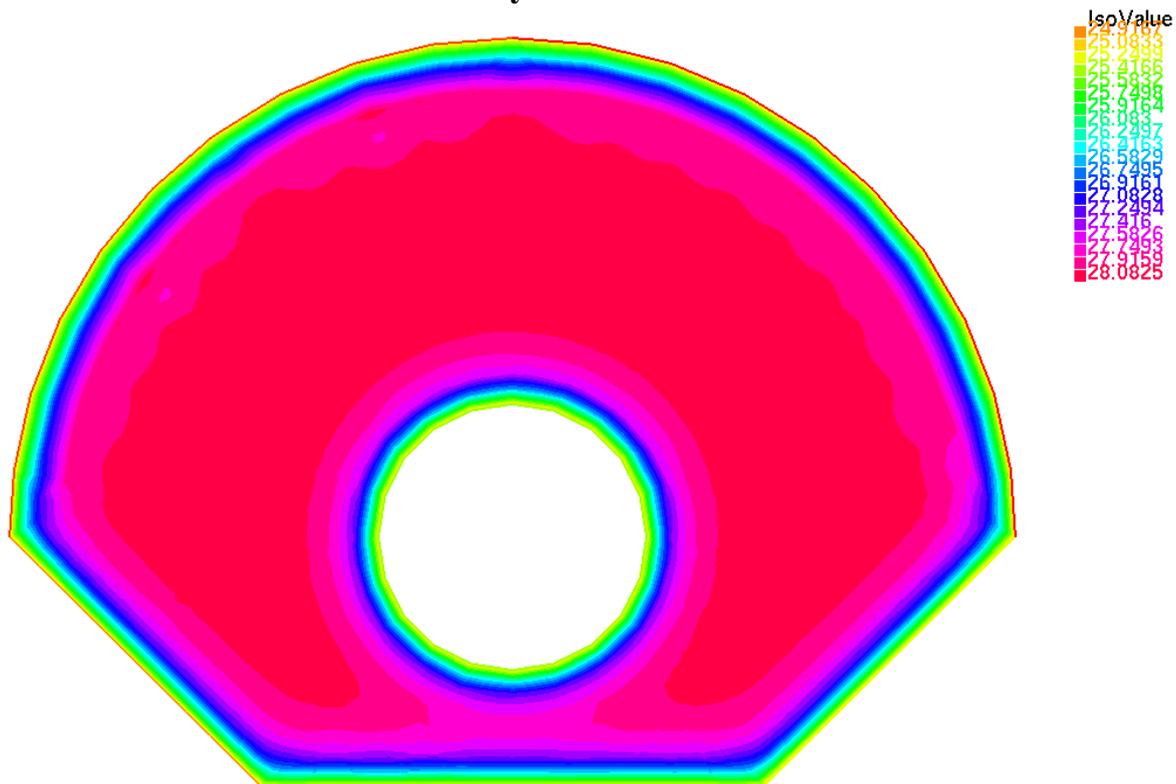
```
int2d(Th)(u * v + mu*dt*(dx(u)*dx(v) + dy(u)*dy(v)))
```

```
- int2d(Th)(uOld + dt * f) * v)
```

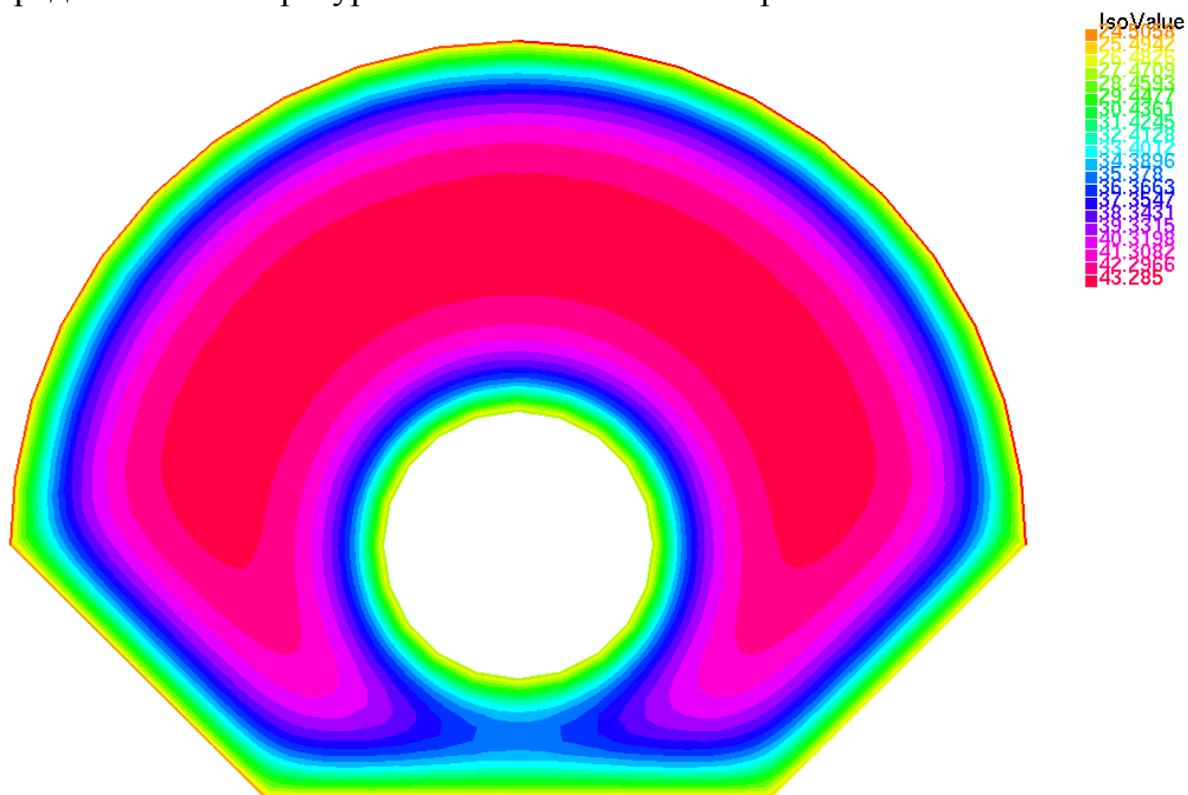
```
+ on( g1, u = g11 ) + on( g2, u = g22)
```

```
+ on( g3, u = g33 ) + on( g4, u = g44 ) + on( g5, u = g55 ) + on( g6, u = g66 )
```

Результаты

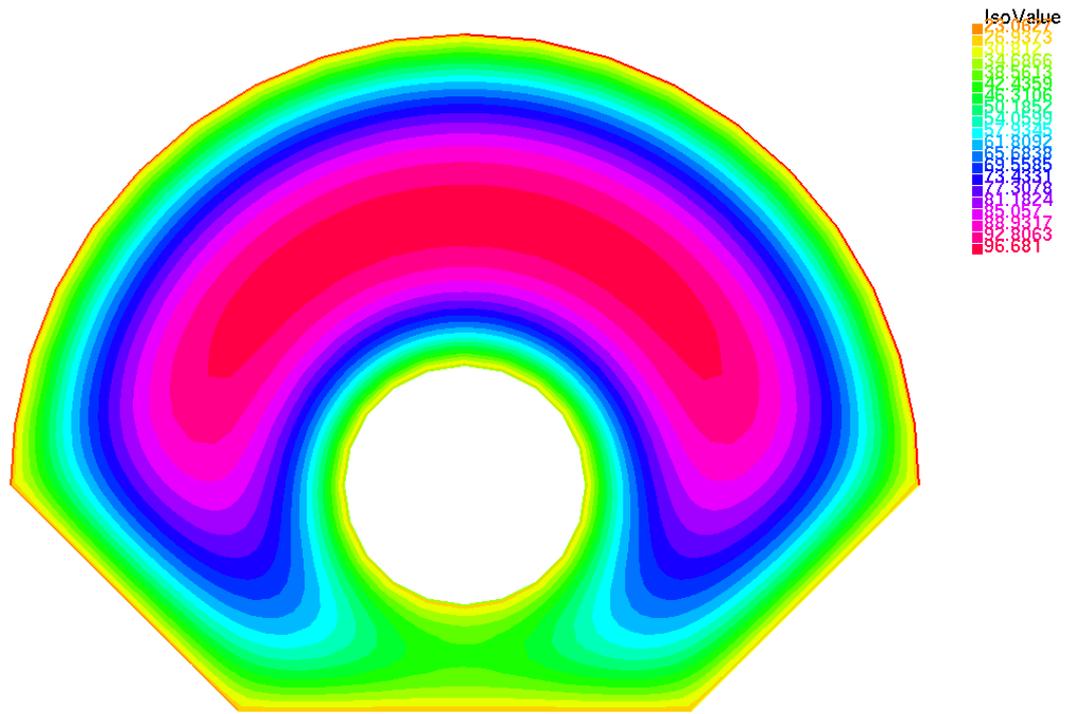


Распределение температуры в начальный момент времени $t = 0$

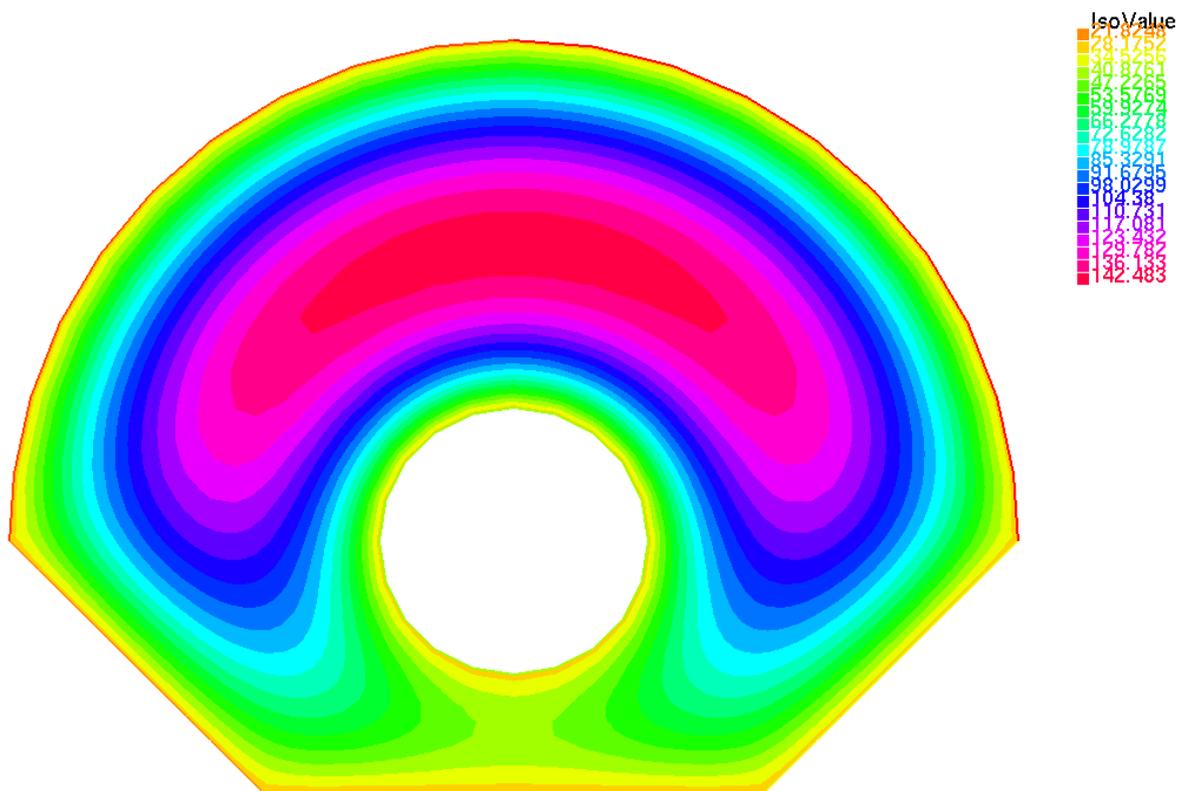


Распределение температуры в момент времени $t = 0.5$ с

t=3



Распределение температуры в момент времени $t = 3$ секунды



Распределение температуры в момент времени $t = 12$ секунд

Листинг – Программа «Нестационарное распределение теплопроводности»

```
real t, dt;
real mu = 16;
int k = 0;
border g1(t=0,pi/2){x=30*cos(t);y=30*sin(t);} //Граница g1
border g2(t=pi/2,pi){x=30*cos(t);y=30*sin(t);} //Граница g2
border g3(t=-30,-15){x=t;y=-t-30;} //Граница g3
border g4(t=-15,15){x=t;y=-15;} //Граница g4
border g5(t=15,30){x=t;y=t-30;} //Граница g5
border g6(t=0,2*pi){x=8*cos(t);y=8*sin(t);} //Граница g6
// ñòðîèì ñàòéó, íà èàæáíé ãðàíèöà ï 5*n-óçèâ
mesh Th = buildmesh(g1(10)+g2(10)+g3(10)+g4(10)
+g5(10)+g6(-20));
fespace Vh(Th, P2);
// èññîüçóàì íáíçíà÷áíèÿ: u=u(x,y,(m+1)*dt), uOld=u(x,y,m*dt)
Vh u, v, uOld;
// ïðåååÿâì ôóíêöèÿ -- íà÷àèííà ðàññåååéâ
func h = 25;
// ïðåååÿâì ôóíêöèÿ -- ïðåååÿâì ðàññåååéâ
func f = 30;
// ïðåååÿâì ôóíêöèè äèÿ çàâàíèÿ ãðàíè÷íóõ îñèâèè
func g11 = 25; func g22 = 25;
func g33 = 25; func g44 = 25;
func g55 = 25; func g66 = 25;
problem Heat(u,v) =
int2d(Th)( u * v + mu*dt*(dx(u)*dx(v) + dy(u)*dy(v)) )
- int2d(Th)( (uOld + dt * f) * v )
+ on( g1, u = g11 ) + on( g2, u = g22 )
+ on( g3, u = g33 ) + on( g4, u = g44 )
+ on( g5, u = g55 ) + on( g6, u = g66 ) ;
t = 0; dt = 0.1;
uOld = h;
for (int m=0; m<240; m++)
{ t = t + dt;
k = k+1;
Heat; // âúçíâ ïðèðåååóð
uOld = u;
if (k==10)
{ k = 0;
plot(u,fill = 1,value =1);
}
plot(u, fill=1, value=1);
```

