Основы электростатики. Теорема Гаусса

Цели работы: закрепить умения и навыки решения задач с использованием основного закона электростатики.

Оборудование: тетрадь для практических работ, ручка, методические рекомендации по выполнению работы, линейка, карандаш.

Указание: Практическая работа состоит из двух частей – теоритической и практической.

После изучения теоретического материала можно приступать к выполнению практической части. Она состоит из двух и более задач для самостоятельного выполнения. Не забывайте о правильном оформлении решения.

На выполнение практической работы отводится два академических часа.

1. Ознакомьтесь и повторите теоритические сведения, изученные на лекциях

а так же материал, размещённый в ЭОС по ссылкам:

https://edu.stankin.ru/mod/resource/view.php?id=301748

https://edu.stankin.ru/mod/resource/view.php?id=301864

https://edu.stankin.ru/mod/resource/view.php?id=301867

1. Теория. Основные понятия и формулы

3.1 Электростатика

По закону Кулона сила электростатического взаимодействия между двумя заряженными телами, размеры которых малы по сравнению с расстоянием *r* между ними, определяется формулой

$$F = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 \varepsilon r^2},$$

где q_1 и q_2 – электрические заряды тел, ε - относительная диэлектрическая проницаемость среды, $\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м – электрическая постоянная.

Напряженность электрического поля определяется формулой

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q},$$

Где F – сила, действующая на заряд q.

Напряженность поля точечного заряда

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 \varepsilon r^2}$$

Напряженность электрического поля нескольких зарядов (например, поле диполя) находится по правилу векторного сложения.

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^{n} \vec{E}_i$$

По теореме Гаусса поток напряженности сквозь любую замкнутую поверхность

$$\Phi_E = \frac{1}{\varepsilon_0 \varepsilon} \sum q_i ,$$

где $\sum q_i$ - алгебраическая сумма зарядов, находящихся внутри этой поверхности.
При помощи теоремы Гаусса можно найти напряженность электрического поля, образованного различными заряженными телами:
А) напряженность поля, образованного бесконечно длинной нитью

$$E = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 \varepsilon r} ,$$

где τ – линейная плотность заряда на нити, r – расстояние от нити.
Если нить имеет конечную длину, то напряженность поля в точке, находящейся на перпендикуляре, восстановленном из середины нити на расстоянии r от неё

$$E = \frac{\tau \sin\alpha}{2\pi\varepsilon_0 \varepsilon r} ,$$

где α - угол между направлением нормали к нити и радиус-вектором, проведенным из рассматриваемой точки к концу нити.

Б) напряженность поля, образованного заряженной бесконечно длинной плоскостью

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0 \varepsilon} ,$$

где σ - поверхностная плотность заряда на плоскости.
В) напряженность поля, образованного разноименно заряженными параллельными бесконечными плоскостями (поле плоского конденсатора)

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon} .$$

Г) напряженность поля, образованного заряженным шаром

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 \varepsilon r^2}$$

где q- заряд шара радиусом R, r – расстояние от центра шара до точки.

Разность потенциалов между двумя точками электрического поля определяется работой, которую надо совершить, чтобы единичный положительный заряд перенести из одной точки в другую:

$$U = \phi_1 - \phi_2 = \frac{A_{1,2}}{q}.$$

Потенциал поля точечного заряда

$$\phi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 \varepsilon r},$$

где r – расстояние от заряда.

Напряженность электрического поля и потенциал связаны соотношением

$$\vec{E} = -\vec{grad}\,\phi$$

В случае однородного поля плоского конденсатора напряженность

$$E = \frac{U}{d},$$

где U – разность потенциалов между пластинами конденсатора, d – расстояние между ними.

Потенциал уединенного проводника и его заряд связаны соотношением

$$q = C\phi,$$

где C – емкость уединенного проводника.

Емкость плоского конденсатора

$$C = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S}{d},$$

где S – площадь каждой пластины конденсатора.

Емкость сферического конденсатора

$$C = \frac{4\pi\varepsilon_0 \varepsilon rR}{R - r},$$

где r и R – радиусы внутренней и внешней сферы.

В частном случае, когда R = ∞,

$$C = 4\pi\varepsilon_0 \varepsilon r$$

- емкость уединенного шара.

Емкость цилиндрического конденсатора

$$C = \frac{2\pi\varepsilon_0 \varepsilon L}{\ln(R/r)},$$

где L – высота коаксиальных цилиндров, r и R – радиусы внутреннего и внешнего цилиндров.

Емкость системы конденсаторов:

- при параллельном соединении конденсаторов

$$C = C_1 + C_2 + C_3 + \ldots$$

- при последовательном соединении

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \ldots$$

Энергия заряженного конденсатора может быть найдена по одной из следующих формул:

$$W=\frac{qU}{2}, \qquad W=\frac{CU^2}{2}, \qquad W=\frac{q^2}{2C}.$$

В случае плоского конденсатора энергия

$$W=\frac{\varepsilon_0 \varepsilon SU^2}{2d}=\frac{\varepsilon_0 \varepsilon E^2 Sd}{2}=\frac{\sigma^2 Sd}{2\varepsilon_0 \varepsilon},$$

где S – площадь каждой пластины конденсатора, σ - поверхностная плотность заряда на пластинах, U – разность потенциалов между пластинами, d – расстояние между ними.

Объемная плотность энергии электростатического поля:

$$\omega=\frac{\varepsilon_0 \varepsilon E^2}{2}=\frac{ED}{2},$$

где D – электрическое смещение (D = $\varepsilon\varepsilon_0 E$).

Сила притяжения между пластинами плоского конденсатора:

$$F=\frac{\varepsilon_0 \varepsilon E^2 S}{2}=\frac{\varepsilon_0 \varepsilon SU^2}{2d^2}=\frac{\sigma^2 S}{2\varepsilon_0 \varepsilon}.$$

2 Примеры решения задач

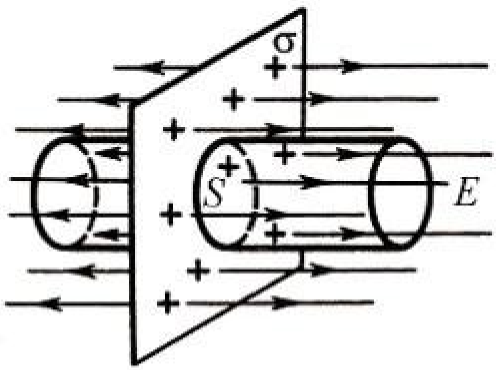
Задача на теорему Гаусса №1: напряженность поля плоскости

Условие

Определите напряженность поля бесконечной заряженной плоскости. Поверхностная плотность заряда *сигма*.

Решение

Линии напряженности перпендикулярны рассматриваемой плоскости и направлены в обе стороны от неё. Выберем в качестве гауссовой поверхности цилиндр с основанием, параллельным плоскости:



По теореме Гаусса:

$$\Phi = \oint_S \vec{E}(r)d\vec{S} = \oint_S E(r)dS\cos\alpha = \frac{q_{внутр}}{\varepsilon_0}$$

Поток сквозь цилиндр равен сумме потоков сквозь боковую поверхность цилиндра и потокам сквозь оба его основания. Поток сквозь боковую поверхность равен нулю, так как линии напряженности параллельны ей:

$$\Phi = 2\Phi_{осн} = 2ES$$

Согласно теореме Гаусса:

$$2ES = \sigma S/\varepsilon_0$$

Отсюда:

$$E = \sigma/2\varepsilon_0$$

Ответ: $E = \sigma / 2\varepsilon_0$

Задача на теорему Гаусса №2: напряженность поля двух пластин

Условие

Электрическое поле создано двумя параллельными заряженными тонкими пластинами с поверхностными плотностями заряда *+ сигма* и *-2 сигма*. Площадь каждой пластины *S*, расстояние между пластинами *d* можно считать значительно меньшим их продольных размеров. Какова напряженность электрического поля, созданного этими пластинами?

Решение

Для электрического поля действует принцип суперпозиции: результирующее поле равно векторной сумме отдельных полей каждой пластины. Из предыдущей задачи мы знаем формул по которой вычисляется напряженность поля тонкой заряженной пластины, запишем для каждой из них:

$$E_+ = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

$$E_- = \frac{2\sigma}{2\varepsilon_0}$$

Векторы напряженности между пластинами совпадают по направлению, результирующая напряженность равна:

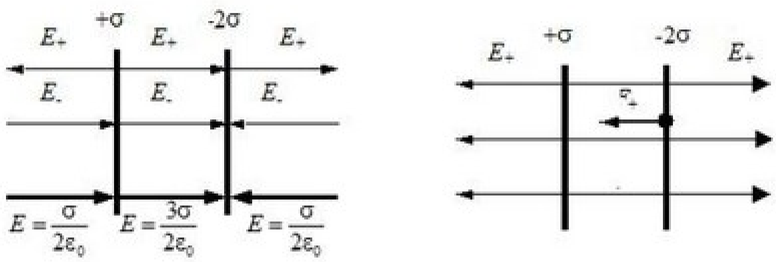
$$E_{между} = E_- + E_+ = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} + \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = \frac{3\sigma}{2\varepsilon_0}$$

Справа и слева от пластин, во внешней области, векторы направлены в разные стороны:

Справа и слева от пластин, во внешней области, векторы направлены в разные стороны:

$$E_{вне} = E_- - E_+ = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} - \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

Для наглядности приведем рисунок:

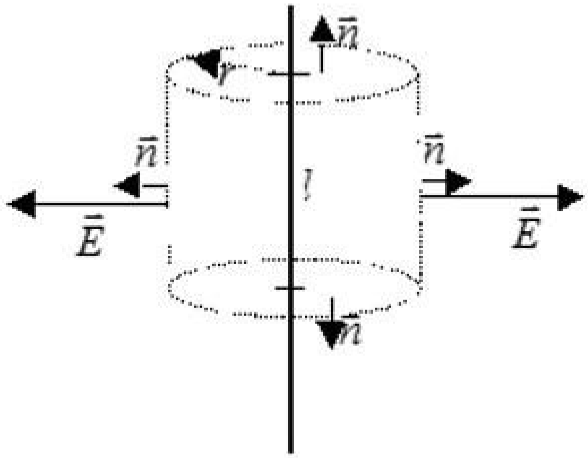


Ответ: см. выше.

Задача на теорему Гаусса №3: напряженность электрического поля бесконечной нити

Условие

Определить напряженность электрического поля, создаваемую бесконечной тонкой нитью, равномерно заряженной с линейной плотностью заряда лямбда.



Решение

Напряженность будем искать при помощи теоремы Гаусса. Наша задача – определить зависимость напряженности от расстояния от нити. В качестве поверхности выберем цилиндр с боковыми стенками, параллельными нити. Будем учитывать только поток вектора напряженности через боковую поверхность, так как поток через основания цилиндра равен нулю:

$$\oint(\vec{E}d\vec{s}) = E \cdot S = E(r) \cdot 2\pi r \cdot l$$

Заряд нити внутри рассматриваемой поверхности равен заряду отрезка нити длиной l:

$$q = \lambda \cdot l$$

По теореме Гаусса:

$$E(r) \cdot 2\pi r \cdot l = \lambda \cdot l / \varepsilon_0$$

Отсюда:

$$E(r) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

Ответ: см. выше.

3. Ознакомьтесь с разбором и ходом решения задач. Решите подобную задачу для своего варианта.

Пример 1. Точечный заряд q = 25 нКл находится в поле, созданном прямым бесконечным цилиндром радиусом R = 1 см, равномерно заряженным с поверхностной плотностью δ = 0,2 нКл/см^2. Определить силу F, действующую на заряд, если его расстояние от оси цилиндра r = 10 см.

Р е ш е н и е. Значение силы F, действующей на точечный заряд q, находящийся в электрическом поле, определяется по формуле

$$F = qE, \qquad (1)$$

где E - напряженность поля.

Как известно, напряженность поля бесконечно длинного равномерно заряженного цилиндра

$$E = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_o r}, \qquad (2)$$

где τ – линейная плотность заряда.

Выразим линейную платность τ через поверхностную плотность δ. Для этого выделим элемент цилиндра длиной *l* и выразим находящийся на нем заряд q двумя способами: $q = \delta S = \delta 2\pi Rl$. Приравняв правые части этих формул и сократив полученное равенство на *l*, найдем τ = 2πRδ. С учетом этого (2) примет вид $E = R\delta/(\varepsilon_o\, r)$. Подставив выражение E в (1), получим $F = q\delta R/\varepsilon_o\, r$.

Произведем вычисления:

$$F = \frac{2,5\cdot 10^{-8}\cdot 2\cdot 10^{-6}\cdot 1}{8,85\cdot 10^{-12}\cdot 10} H = 5,65\cdot 10^{-4} H = 565\, мкН .$$

Сила F сонаправлена с напряженностью E, которая в силу симметрии (цилиндр бесконечно длинный) перпендикулярна поверхности цилиндра.

Таблица 1 – Варианты заданий для решения Пример№1

Вариант	q = нКл	R = 1 см	δ = нКл/см^2	r = 10 см.
1	20	=	**0,25**	=
2	30	=	**0,4**	=
3	30	=	**0,2**	=
4	22	=	**0,22**	=
5	20	=	**0,24**	=
6	25	=	**0,2**	=
7	20	=	**0,4**	=
8	20	=	**0,25**	=
9	30	=	**0,4**	=
10	30	=	**0,2**	=
11	22	=	**0,22**	=
12	20	=	**0,24**	=
13	25	=	**0,2**	=
14	20	=	**0,4**	=

Пример 2. По тонкому кольцу размещён равномерно заряд q =40 нКл с линейной плотностью τ = 50нКл/м. Определить напряженность Е электрического поля, создаваемого этим зарядом в точке А, лежащей да оси кольца и удаленной от его центра на расстояние, равное половине радиуса.

Р е ш е н и е. Совместим координатную. плоскость х0у с плоскостью кольца, а ось 0z - с осью кольца (рис. 4).

На кольце выделим малый участок длиной *dl*. Так как заряд *dq = τdl,* находящейся на этом участке, можно считать точечным, то напряженность dE электрического поля, создаваемого этим зарядом, может быть записана в виде

$$dE = \frac{\tau\, dl}{4\pi\varepsilon_o r^2}\cdot\frac{r}{r}$$

где к - радиус-вектор, направленный от элемента dl к т. А.

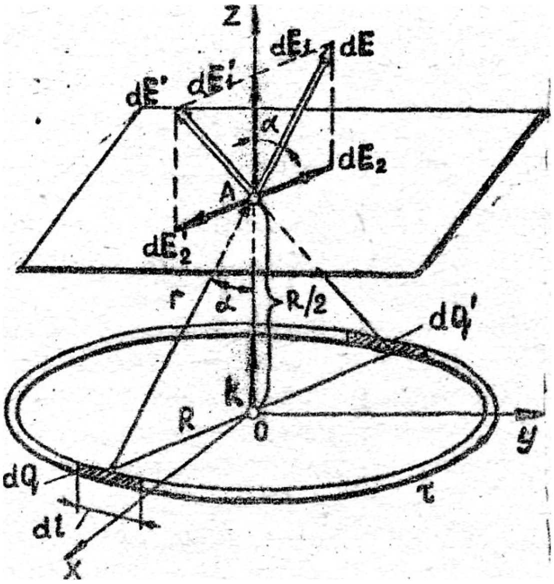


Рис. 4

Разложим вектор dE на две составляющие: dE_1 , перпендикулярную плоскости кольца (сонаправленную с осью 0z), и E_2 , параллельную плоскости кольца (плоскости x0y), т.е. $dE = dE_1 + dE_2$.

Напряженность электрического поля в т. А найдем интегрированием.

$$E = \int_L E_1 + \int_L E_2,$$

где интегрирование ведется по всем элементам заряженного кольца. Заметим, что для каждой пары зарядов dq и dq'(dq = dq'), расположенных симметрично относительно центра кольца, векторы dE_2 и dE_2' в точке А равны по и противоположны по направлений: $dE_2 = - dE_2'$. Поэтому векторная (интеграл) $\int_L dE_2 = 0.$ Составляющие dE_1 для всех элементов кольца сонаправлены с осью 0z (единичным вектором k), т. е, $dE = kdE_1$. Тогда E = $k\int_L dE_1.$

Так как $dE = \dfrac{\tau\, dl}{4\pi\varepsilon_o r^2}$, $r = \sqrt{R^2 + (R/2)^2} = \sqrt{5}\, R/2$ и $\cos\alpha = (R/2)/r = l\sqrt{5},$ то

$$dE_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\cdot\frac{4\tau\, dl}{5R^2\sqrt{5}}dl = \frac{\tau\, dl}{5\sqrt{5}\,\pi\varepsilon_o R^2}.$$

Таким образом,

$$E = k \int_0^{2\pi R} \frac{\tau\, dl}{5\sqrt{5}\pi\varepsilon_o r^2} = k \frac{2\tau}{5\sqrt{5}\,\varepsilon_o R}.$$

Из соотношения q=2πRτ определим радиус кольца: R = q/ (2πτ). Тогда

$$E = k \frac{2\tau\, 2\pi\tau}{5\sqrt{5}\,\varepsilon_o q} = k \frac{4\pi\tau^2}{5\sqrt{5}\,\varepsilon_o q}.$$

Модуль напряженности |E| = 4 $\pi\tau^2$ /$5\sqrt{5}$ ε_o q.

Проворим, дает ли правая часть полученного равенства единицу напряженности (В/м):

$$\frac{[\tau^2]}{[\varepsilon_o][q]} = \frac{(1\, Кл/м)^2}{1\, Ф/м \cdot 1\, Кл} = \frac{1\, Кл}{1\, Ф \cdot 1\, м} = 1\, В/м.$$

Выразим физические величины, входящие в (1), в единицах СИ (τ = 5 · 10^{-8}

Кл/м, q = 4 · 10 $^{-8}$ Кл, ε_o = 8,84 · 10 $^{-12}$ Ф/м) и произведем вычисления:

$$E = \frac{4 \cdot 3,14 \cdot (5 \cdot 10^{-8})^2}{5\sqrt{5} \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 4 \cdot 10^{-8}}\, В/м = 7,92\, кВ/м.$$

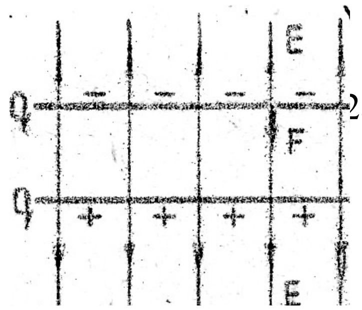
Таблица 2 – Варианты заданий для решения Пример№2

Вариант	q = нКл	τ = нКл/м.	ε_o = 8,84 · 10 $^{-12}$ Ф/м
1	20	40	=
2	20	60	=
3	25	**40**	=
4	22	**40**	=
5	30	**40**	=
6	42	**50**	=

7	20	40	=
8	20	60	=
9	25	**40**	=
10	22	**40**	=
11	30	**40**	=
12	42	**50**	=
13	20	40	=
14	20	60	=

Пример 3. На пластинах плоского конденсатора находится заряд q = 10 нКл. Площадь S каждой пластины конденсатора равна 100 см^2, диэлектрик – воздух. Определить силу F, с которой притягиваются пластины. Поле между пластинами считать однородным.

Р е ш е н и е. Заряд q пластины находится - в поле напряженностью E, созданном зарядом другой пластины конденсатора. Следовательно, на первый заряд действует сила (рис. 7)



$$F = qE. \qquad (1)$$

$2\varepsilon_o) = q / (2\varepsilon_o S)$, где δ – поверхностная плотность заряда пластины, то формула (1) примет вид $F = q^2 / (2\varepsilon_o S)$.

Рис. 7

Произведем вычисления:

$$F = \frac{10^{-16}}{2 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 10^{-2}} H = 5,65 \cdot 10^{-4} H = 565\, мкН .$$

Таблица 3 – Варианты заданий для решения Пример№3

Вариант	q = нКл	S = см^2
1	20	200
2	30	300
3	40	**400**
4	50	**500**
5	40	**400**
6	25	**250**
7	25	200
8	20	300
9	25	**400**
10	30	**500**
11	22	**400**
12	40	**250**
13	40	200
14	25	300

4. Вопросы к практическому занятию:

Напишите конспективно ответы на вопросы:

Вопрос 1. Сформулируйте теорему Гаусса.

Вопрос 2. Что такое поток вектора напряженности?

Вопрос 3. Что такое силовые линии напряженности?

Вопрос 4. Где начинаются и где заканчиваются силовые линии электростатического поля?

Вопрос 5. Верно ли утверждение: теорема Гаусса справедлива только для неподвижных зарядов.