Приложение 6
к рабочей программе

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
УРАЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭКОНОМИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ

УТВЕРЖДЕНЫ

на заседании кафедры
шахматного искусства и
компьютерной математики

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ

КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

по дисциплине

Высшая математика

Прежде чем приступить к выполнению контрольной работы необходимо ознакомиться с теоретическим материалом. Рекомендуется также изучить Методические указания к решению задач (в конце данного пособия, стр. 10-28) . Выбор варианта осуществляется с приведенной ниже таблицей (стр.4). Работу следует сдать на проверку не позднее, чем за 3 дня до зачета/экзамена. Проверенная работа может быть возвращена на доработку. В этом случае студент выполняет работу над ошибками и сдает работу повторно.

Важно: работу следует загружать **одним** файлом (или архивом)

Рекомендации по изучению разделов и тем дисциплины

Тема 1 «Матрицы и определители.
Общая теория систем линейных уравнений»

Все понятия, которые рассматриваются в рамках этой темы, являются необходимыми при изучении дисциплины. Обратите внимание на следующие понятия: скалярные величины, вектор, матрица; определитель, минор; система линейных уравнений; система линейных неравенств.

Тема 2 «Аналитическая геометрия и векторная алгебра»

Рекомендуется обратить внимание на изучение тем: Прямая на плоскости. Виды уравнения прямой на плоскости. Взаимное расположение двух прямых на плоскости. Уравнения плоскости. Взаимное расположение плоскостей. Прямая в пространстве. Плоскость и прямая в пространстве. Линейная зависимость векторов, базис пространства.

Тема 3 «Математический анализ. Предел и непрерывность. Производная и ее приложение. Неопределенный интеграл. Определенный интеграл. Функции нескольких переменных. Дифференциальные уравнения»

Необходимо добросовестно освоить, уточнить, запомнить понятие множества, операции над множеством, логическую символику, обозначения, чтобы Вы могли понимать преподавателя. Обратите внимание на следующие понятия: простейшие и элементарные функции; способы задания функции; числовая последовательность; монотонность, ограниченность последовательности; пределы функций; правила раскрытия неопределенностей при вычислении пределов.

Понятие производной и предела являются основными в современной математике. При самостоятельной работе по данной теме следует основательно отработать технику вычисления предела, приемы раскрытия неопределенностей. Запомнить таблицу основных производных. Уметь вычислять производные сложных функций. Теория одного раздела курса используется во многих прикладных задачах экономики.

Понятие первообразной и интеграла дополняют понятия производной и дифференциала. Ввиду этого студенту следует иметь в виду, что необходимы, прочные знания дифференциального исчисления. Нужно иметь навыки выполнения преобразований элементарных функций. При самостоятельной работе по данной теме следует основательно отработать технику вычисления интегралов различного типа. Это необходимо в дальнейшем, в частности, для изучения дифференциальных уравнений, рядов Фурье и теории вероятностей. Обратите внимание на особенности вычисления определенных интегралов, поскольку в понятия определенного интеграла присутствуют важнейшие математические операции: сумма и предел.

Рекомендуется обратить внимание на изучение понятий: частные производные, их геометрический смысл, градиент поля, полный дифференциал, свойство смешанных производных, экстремума функции двух переменных. Необходимое условие экстремума, условный экстремум, метод наименьших квадратов.

Стоит обратить особое внимание на виды дифференциальных уравнений и методы их решения: дифференциальные уравнения первого порядка с разделяющимися переменными, линейные и однородные дифференциальные уравнения первого порядка, дифференциальные уравнения высших порядков, допускающие понижение порядка, линейные однородные и неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка.

Тема 4 «Основные понятия теории вероятностей.
Основные вероятностные схемы и правила.
Случайные величины.
Закон больших чисел и предельные теоремы»

При изучении случайных событий необходимо усвоить следующее: элементарное событие; вероятностное пространство; достоверное событие, невозможное событие, случайное событие; основные комбинаторные схемы и правила; классический способ подсчета вероятности; дискретная вероятностная схема; геометрическая вероятность; несобственные события; зависимые и независимые события; условная вероятность; формула полной вероятности и формула Байеса; схема независимых испытаний Бернулли.

При изучении случайных величин необходимо осознанно усвоить следующие понятия: случайная величина; закон распределения случайных величин; функция распределения случайной величины; дискретные и непрерывные случайные величины; плотность распределения случайной величины; числовые характеристики случайной величины; случайный процесс.

При изучении случайных величин необходимо повторить дифференциальное и интегральное исчисление, поскольку оно существенно используется при нахождении числовых характеристик непрерывной случайной величины. Следует обратить особое внимание на нормальное распределение, которое играет важную роль в математической статистике.

Тема 5 «Методы оптимальных решений»

Изучение этой темы начинают с изучения составления математических моделей. Особое внимание необходимо уделить графическому методу решения задач линейного программирования, алгоритму в решении задач симплексным методом.

ДОМАШНЯЯ КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА

2 семестр

Выбор вариантов

Начальные буквы фамилий студентов	Вариант
А, Б	**1**
В, Г	**2**
Д, Е, Ж	**3**
З, И, К,	**4**
Л, М	**5**
Н, О, П	**6**
Р, С	**7**
Т, У, Ф, Х	**8**
Ц, Ч, Ш, Щ	**9**
Э, Ю, Я	**10**

По каждому заданию в контрольных работах имеются методические указания, в которых подробно разобраны подобные задачи.

Тема 1. Элементы комбинаторики. События и их вероятности, классический и геометрический способы подсчета вероятностей

Вариант 1. Среди 40 деталей 3 нестандартные. Наудачу взяты 2 детали. Найти вероятность того, что они нестандартные.

Вариант 2. В урне 3 белых и 7 чёрных шаров. Какова вероятность того, что вынутые наугад два шара окажутся белыми?

Вариант 3. В ящике 100 деталей, из них 10 бракованных. Наудачу извлечены четыре детали. Найти вероятность того, что среди извлеченных деталей: а) нет бракованных; б) нет годных.

Вариант 4. Устройство состоит из пяти элементов, из которых два изношены. При включении устройства включаются случайным образом два элемента. Найти вероятность того, что включенными окажутся неизношенные элементы.

Вариант 5. Товаровед получил 50 одинаковых изделий, среди них 5 бракованных. Наудачу для контроля взяты путём случайного выбора три изделия. Найти вероятность того, что среди них окажется ровно одно бракованное.

Вариант 6. Из партии, в которой 30 деталей без дефекта и 5 с дефектом, берут наугад три детали. Какова вероятность того, что среди них ровно две детали без дефекта?

Вариант 7. Среди 17 студентов группы, из которых 8 – девушки, разыгрывается 7 билетов в театр. Какова вероятность того, что среди обладателей билетов окажутся 4 девушки и 3 юношей?

Вариант 8. На складе имеется 15 телевизоров, причем 10 из них изготовлены отечественным производителем. Найти вероятность того, что среди пяти взятых наудачу телевизоров окажутся три отечественных телевизора.

Вариант 9. Найти вероятность того, что точка брошенная в круг радиуса 1, окажется вне вписанного в этот круг квадрата.

Вариант 10. Внутрь круга радиуса R наудачу брошена точка. Найти вероятность того, что точка окажется внутри вписанного в круг правильного треугольника.

Тема 2. Операции над событиями. Правила сложения и умножения вероятностей

Вариант 1. Заводом послана автомашина за различными материалами на 4 базы. Вероятность наличия нужного материала на первой базе равна 0,9; на второй – 0,95; на третьей – 0,8; на четвёртой – 0,6. Найти вероятность, того что только на одной базе не окажется нужного материала.

Вариант 2. Для сигнализации об аварии установлены два независимо работающих сигнализатора. Вероятность того, что при аварии сигнализатор сработает, равна 0,95 для первого сигнализатора и 0,9 для – второго. Найти вероятность того, что при аварии сработает только один сигнализатор.

Вариант 3. Производится три выстрела по одной и той же мишени. Вероятность попадания при первом выстреле равна 0,4; при втором – 0,5 и при третьем – 0,7. Найти вероятности следующих событий: A = {ровно одно попадание}; B = { хотя бы одно попадание}; C = { хотя бы два попадания}.

Вариант 4. В телеателье имеется три телевизора. Вероятности неисправности каждого из них соответственно равны 0,1; 0,2; 0,1. Какова вероятность того, что среди этих телевизоров исправными окажутся: 1) ровно два; 2) хотя бы один.

Вариант 5. Из партии изделий товаровед отбирает изделия высшего сорта. Вероятность того, что наудачу взятое изделие окажется высшего сорта, равна 0,8. Найти вероятность того, что из трёх проверенных изделий только два изделия высшего сорта.

Вариант 6. В сессию студент должен сдать 4 экзамена. Вероятность не выдержать первый – 0,1, для последующих экзаменов – 0,2; 0,15; 0,25 соответственно. Какова вероятность того, что студент сдаст хотя бы один экзамен?

Вариант 7. Устройство состоит из трёх элементов, работающих независимо. Вероятности безотказной работы первого, второго и третьего элементов соответственно равны 0,6; 0,7;08. Найти вероятность того, что безотказно будут работать: а) только один элемент; б) только два элемента; в) все три элемента.

Вариант 8. Брошены три игральные кости. Найти вероятность того, что на каждой из выпавших граней появится пять очков.
Вариант 9. Первый магазин может выполнить план с вероятностью 0,9; второй – с вероятностью 0,8, а третий – с вероятностью 0,85. Найти вероятность того, что план выполнят не менее двух магазинов.
Вариант 10. Вероятность поражения цели первым стрелком при одном выстреле равна 0,8, а вторым стрелком – 0,6. Найти вероятность того, что цель будет поражена только одним стрелком.

Тема 3. Формула полной вероятности. Формулы Бейеса

Вариант 1. Сборщик получил 6 коробок деталей, изготовленных заводом №1, и 4 коробки деталей, изготовленных заводом №2. Вероятность того, что деталь завода №1 стандартна, равна 0,8, а завода №2 – 0,9. Сборщик случайно извлёк деталь из наудачу взятой коробки. Деталь оказалась стандартной. Определить вероятность того, что она изготовлена на заводе №1.
Вариант 2. На сборку попадают детали с 3 автоматов. Известно, что первый автомат дает 3% брака, второй – 2% и третий – 4%. Найти вероятность того, что на сборку попадает бракованная деталь, если с первого автомата поступает 100, со второго – 200, с третьего – 250 деталей.
Вариант 3. Турист, заблудившийся в лесу, вышел на полянку, от которой в разные стороны ведут 5 дорог. Если турист пойдет по первой дороге, то вероятность его выхода из леса в течение часа составляет 0,6; если по второй – 0,3; если по третьей – 0,2; если по четвёртой – 0,1; если по пятой – 0,1. Какова вероятность того, что турист пошёл по первой дороге, если через час он вышел из леса?
Вариант 4. В сборочный цех завода поступают детали с трех автоматов. Вероятность поступления бракованной продукции с первого автомата

составляет 0,03, для второго и третьего автоматов эти вероятности равны соответственно 0,01 и 0,02. Определить вероятность попадания на сборку небракованной детали, если с каждого автомата в цех поступило соответственно 500, 200 и 300 деталей.

Вариант 5. Известно, что в партии из 600 электрических лампочек 200 изготовлены на первом заводе, 250 на втором, 150 – на третьем. Вероятности того, что лампочка окажется стандартной при изготовлении на первом, втором, третьем заводах соответственно равны 0,97, 0,91 и 0,93. Какова вероятность того, что взятая наудачу лампочка окажется стандартной, изготовлена вторым заводом?

Вариант 6. При проверке качества зёрен пшеницы было установлено, что зёрна могут быть разбиты на 4 группы. К зёрнам первой группы принадлежит 96 %, второй – 2%, третьей и четвёртой – по 1% всех зёрен. Вероятности того, что зёрна дадут колос, содержащий не менее 50 зёрен, для семян указанных групп равны соответственно 0,5; 0,2; 0,18 и 0,2. Найти вероятность того, что из взятого наудачу зерна вырастет колос, содержащий не менее 50 зёрен.

Вариант 7. В группе спортсменов 20 лыжников, 6 велосипедистов и 4 бегуна. Вероятность выполнить квалификационную норму для лыжника равна 0,9; для велосипедиста – 0,8; для бегуна – 0,75. Вызванный наудачу спортсмен норму выполнил. Найти вероятность того, что это бегун.

Вариант 8. Страховая компания разделяет водителей по трём классам: № 1 (мало рискует), № 2 (рискует средне), № 3 (рискует сильно). Компания предполагает, что из всех водителей, застраховавших автомобили, 30% принадлежат классу № 1, 50% - к классу № 2 и 20% - к классу № 3. Вероятность того, что в течение года водитель класса № 1 попадает в одну аварию, равна 0,01, для водителя класса № 2 эта вероятность равна 0,02, а для класса № 3 – 0,08. Найти вероятность того, что водитель, застраховавший свою машину, попадает в аварию в течение года.

Вариант 9. Прибор может собираться из высококачественных деталей и из деталей обычного качества. Известно, что около 40% приборов собирается из высококачественных деталей, при этом вероятность его безотказной работы равна 0,95. Если прибор собран из деталей обычного качества, эта вероятность равна 0,7. Прибор испытывался и работал безотказно. Найти вероятность того, что он собран из высококачественных деталей.

Вариант 10. Пассажир может обратиться за получением билета в одну кассу из трёх. Вероятности обращения в каждую из касс зависят от их месторасположения и равны соответственно 0,2; 0,3; 0,5. Вероятность того, что к моменту прихода пассажира интересующие его билеты будут распроданы, равна для первой кассы 0,3, для второй – 0,4, для третьей – 0,5. Пассажир направился в одну из касс и приобрёл нужный билет. Найти вероятность того, что это была первая касса.

Тема 4. Повторение независимых испытаний. Наивероятнейшее число успехов. Формулы Бернулли, Лапласа, Пуассона.

Вариант 1. Университетом для студенческих общежитий приобретено 5 телевизоров. Для каждого из них вероятность выхода из строя в течение гарантийного рока равна 0,1. Определить вероятность того, что в течение гарантийного срока выйдут из строя: а) ровно один; б) не менее двух; в) не более трех телевизоров.

Вариант 2. В результате систематически проводимого контроля качества изготовляемых предприятием деталей установлено, что брак составляет в среднем 5%. Сколько изготовленных деталей нужно взять, чтобы наиболее вероятное число годных среди них было равно 60 штук?

Вариант 3. Вероятность того, что какой-нибудь абонент позвонит на коммутатор в течение часа, равна 0,01. Телефонная станция обслуживает

300 абонентов. Какова вероятность того, что в течение часа позвонят ровно 4 абонента?

Вариант 4. Вероятность того, что саженец ели прижился и будет расти, равна 0,8. Посажено 400 саженцев. Какова вероятность того, что нормально вырастет: а) ровно 250 деревьев; б) не менее 250 деревьев.

Вариант 5. Вероятность попадания в цель при каждом выстреле равна 0,001. Найти вероятность попадания в цель двух и более пуль, если число выстрелов ровно 5000.

Вариант 6. Вероятность того, что изготовленная рабочим деталь отличного качества, равна 0,8. Найти вероятность того, что среди 100 деталей окажется отличного качества: а) ровно 80 деталей; б) от 70 до 85 деталей; в) не менее 85 деталей.

Вариант 7. В магазине 5 холодильников. Вероятность выхода каждого холодильника из строя в течение года равна 0,2. Найти вероятность того, что в течение года ремонта потребует: а) ровно 4 холодильника; б) не менее 2 холодильников; в) не более 1 холодильника.

Вариант 8. Известно, что в большой партии радиоламп 90% стандартных. Найти вероятности того, что из 300 отобранных радиоламп стандартных окажутся: а)ровно 270; б) от 260 до 275; в) не менее 275.

Вариант 9. Чему равна вероятность наступления события в каждом из 39 независимых испытаний, если наивероятнейшее число наступлений события в этих испытаниях равно 25?

Вариант 10. Вероятность поражения мишени при одном выстреле равна 0,8. Найти вероятности того, что при 100 выстрелах мишень будет поражена: а) ровно 75 раз; б) от75 до 80 раз; в) не менее 80 раз.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ

Тема 1. Элементы комбинаторики. События и их вероятности,

классический и геометричесий способы подсчета вероятностей

1. При *классическом способе подсчета* вероятность события A вычисляется по формуле

$$P(A)=\frac{m}{n}\text{, где}$$

все элементарные исходы равновозможны, т.е. ни один из них не является более возможным, чем другой;

n – общее число всех возможных элементарных исходов испытания;

m – число элементарных исходов испытания, благоприятствующих появлению события A.

2. Для подсчета m и n, а также для других целей, часто приходится использовать *комбинаторные понятия и формулы.*

Пусть имеется n различных объектов (элементов).

а) Расположение их всех в каком-нибудь определенном порядке называется *перестановкой из n элементов.*

Перестановки, состоящие из одних и тех же элементов, отличаются только порядком их расположения. Число всех возможных перестановок: $P_n = n!$, где $n! = 1\cdot 2\cdot 3\ldots\cdot n$, $n=1,2,3,\ldots$; $1! = 1$, $0! = 1$.

б) Расположение некоторых m ($m \le n$) из них в определенном порядке называется *размещением m элементов из n элементов.* Размещения отличаются *и составом и порядком элементов*. Число всех возможных размещений

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!} = \frac{P_n}{P_{n-m}} = n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1).$$

Понятно, что при $m=n$ размещение является перестановкой.

в) Если не принимать во внимание порядок элементов в размещении, а учитывать только его состав, то получится *сочетание т элементов из п*. Сочетания отличаются *только составом элементов*.

Число всех возможных сочетаний

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!} = \frac{A_n^m}{P_m}.$$

3. *Геометрические вероятности – вероятности попадания точки в область*(отрезок, часть плоскости и т.д.) – применяются, когда элементарные исходы эксперимента могут быть интерпретированы как точки отрезка, фигуры или тела.

Пусть отрезок l составляет часть отрезка L. Если предположить, что вероятность попадания точки на отрезок l пропорциональна длине этого отрезка, то вероятность попадания точки на отрезок l определяется равенством

$$P = \text{Длина } l / \text{Длина } L.$$

Аналогично определяется вероятность попадания точки в плоскую фигуру g, составляющую часть плоской фигуры G

$$P = \text{Площадь } g / \text{Площадь } G$$

и вероятность попадания точки в пространственную фигуру υ, которая составляет часть фигуры V

$$P = \text{Объём } \upsilon / \text{Объём } V.$$

Пример 1. (Варианты 1, 2, 3, 4)

В ящике имеется 15 деталей, среди которых 10 окрашенных. Сборщик наудачу извлекает три детали. Найти вероятность того, что извлеченные детали окажутся окрашенными.

Решение:

Событие A = {извлечены три окрашенных детали}. Общее число возможных элементарных исходов испытания равно числу способов, которыми можно извлечь 3 детали из 15, т.е.

$$n = C_{10}^{3} = \frac{15!}{3!(15-3)!} = \frac{15!}{3!12!} = \frac{13 \cdot 14 \cdot 15}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 13 \cdot 7 \cdot 5$$

Число исходов, благоприятствующих интересующему нас событию, равно числу способов, которыми можно извлечь 3 детали из 10 окрашенных, т. е.

$$m = C_{10}^{3} = \frac{10!}{3!(10-3)!} = \frac{10!}{3!\,7!} = \frac{8 \cdot 9 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 4 \cdot 3 \cdot 10; \qquad P(A) = \frac{m}{n} = \frac{C_{10}^{3}}{C_{15}^{3}} = \frac{3 \cdot 4 \cdot 10}{5 \cdot 7 \cdot 13} = \frac{24}{91} \approx 0{,}26$$

Пример 2. (Варианты 5, 6, 7, 8)

В цехе работают шесть мужчин и четыре женщины. Наудачу отобраны семь человек. Найти вероятность того, что среди отобранных лиц окажутся три женщины и четыре мужчины.

Решение:

Событие А= {среди отобранных ровно три женщины}. Общее число возможных элементарных исходов испытания равно числу способов, которыми можно выбрать 7 человек из всех работников, цеха, т.е. из 10 человек.

$$n = C_{10}^{7} = \frac{10!}{7!(10-7)!} = \frac{10!}{7!3!} = 3 \cdot 4 \cdot 10$$

Подсчитаем число исходов, благоприятствующих интересующему нас событию (среди 7 отобранных ровно 3 женщины): трёх женщин можно выбрать из четырёх C_4^3 способами; при этом остальные 4 человека должны быть мужчинами. Выбрать же четырех мужчин из шести мужчин можно C_6^4 способами.

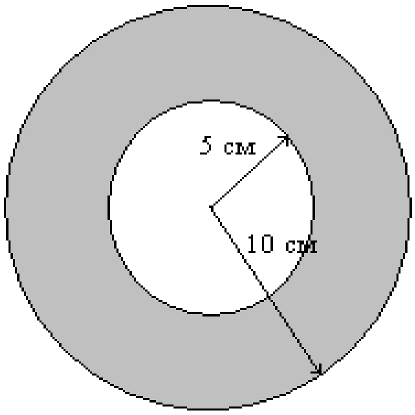
Следовательно, $m = C_4^3 \cdot C_6^4 = \dfrac{4!\,6!}{3!(4-3)!4!(6-4)!} = \dfrac{4 \cdot 5 \cdot 6}{1 \cdot 2} = 2 \cdot 5 \cdot 6$

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{C_4^3 \cdot C_6^4}{C_{10}^{7}} = \frac{2 \cdot 5 \cdot 6}{3 \cdot 4 \cdot 10} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

Пример 3. (Варианты 9, 10)

На плоскости начерчены две концентрические окружности, радиусы которых 5 и 10 см. Найти вероятность того, что точка, брошенная наудачу в большой круг, попадает в кольцо, образованное построенными окружностями.

Решение:



Площадь кольца (фигуры g)

$S_g = \pi\left(10^2 - 5^2\right) = 75\pi \cdot$

Площадь большого круга

$S_G = \pi \cdot 10^2 = 100\pi$

Искомая вероятность

$P = \dfrac{S_g}{S_G} = \dfrac{75\pi}{100\pi} = 0{,}75 \cdot$

Тема 2. Операции над событиями.
Правила сложения и умножения вероятностей

События называются *несовместными*, если появление одного из них исключает появление других событий в одном и том же испытании.

Два события называются *совместными*, если появление одного из них не исключает появление другого события в том же испытании.

Событие В называется *независимым* от события А, если появление события А не изменяет вероятности события В, т.е.

$$P_A(B) = P(B),$$ где

$P_A(B)$ - условная вероятность наступления события В, если событие А уже наступило.

1. Сложение вероятностей.

Правило сложения вероятностей совместных событий

Для любых событий *A* и *B*

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB), \text{ где}$$

P(A+B) – вероятность появления хотя бы одного из двух событий,

P(AB) – вероятность совместного появления двух событий.

Правило сложения вероятностей несовместных событий

$$P(A+B)=P(A)+P(B).$$

2. Умножение вероятностей

Правило умножения вероятностей зависимых событий

Для любых событий *A* и *B*

$$P(AB)=P(A)\cdot P_A(B)=P(B)\cdot P_B(A), \text{ где}$$

$P_A(B)$ - условная вероятность наступления события В, если событие А уже наступило,

$P_B(A)$ - условная вероятность наступления события А, если событие В уже наступило.

Правило умножения вероятностей независимых событий

$$P(AB)=P(A)\cdot P(B).$$

Пример 4. (Все варианты)

Экзаменационный билет содержит 3 вопроса. Вероятность того, что студент ответит на первый вопрос, рана 0,9; на второй – 0,7; на третий – 0,8. Найти вероятность того, что студент ответит:

а) только на один вопрос (варианты 1,2,3,7,10)

б) на все вопросы (варианты 7,8)

в) хотя бы на один вопрос (варианты 3,4,6)

г) по крайней мере на два вопроса (варианты 3,9)

д) на два вопроса (варианты 4,5)

Решение:

Пусть событие A_1 = {студент ответил на первый вопрос},

$\overline{A_1}$ = {студент не ответил на первый вопрос},

A_2 ={ студент ответил на второй вопрос },

$\overline{A_2}$={ студент не ответил на второй вопрос },

A_3={ студент ответил на третий вопрос },

$\overline{A_3}$ ={ студент не ответил на третий вопрос }.

События A_1 и $\overline{A_1}$ – противоположные, поэтому $P(A_1)+P(\overline{A_1})=1$, $P(\overline{A_1})=1-P(A_1)=1-0,9=0,1$. Аналогично $P(\overline{A_2})=1-P(A_2)=1-0,7=0,3$ и $P(\overline{A_3})=1-P(A_3)=1-0,8=0,2$.

а) Событие A ={студент ответил только на один вопрос}.

Появление события А означает, что наступило одно из трёх несовместных событий: либо $A_1\ \overline{A_2}\ \overline{A_3}$, либо $\overline{A_1}\ A_2\ \overline{A_3}$, либо $\overline{A_1}\ \overline{A_2}\ A_3$. По правилу сложения вероятностей

$P(A)=P(A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3})+P(\overline{A_1}A_2\overline{A_3})+P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3)$. События A_1, A_2, A_3 - независимые, следовательно, независимы и события A_1, $\overline{A_2}$, $\overline{A_3}$. По правилу умножения вероятностей для независимых событий

$P(A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3})=P(A)\cdot P(\overline{A_2})\cdot P(\overline{A_3})=0,9\cdot 0,3\cdot 0,2=0,054$.

Аналогично

$P(\overline{A_1}A_2\overline{A_3})=P(\overline{A_1})\cdot P(A_2)\cdot P(\overline{A_3})=0,1\cdot 0,7\cdot 0,2=0,014$,

$P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3)=P(\overline{A_1})\cdot P(\overline{A_2})\cdot P(A_3)=0,1\cdot 0,3\cdot 0,8=0,024$.

Тогда $P(A)=0,054+0,014+0,024=0,092$.

б) Событие Б={студент ответил на все вопросы}. Наступление события Б означает, что одновременно появились независимые события A_1, A_2, A_3, т. е. $P(Б)=P(A_1A_2A_3)$. По правилу умножения вероятностей для независимых событий

$P(A_1A_2A_3)=P(A_1)\cdot P(A_2)\cdot P(A_3)=0,9\cdot 0,7\cdot 0,8=0,504$; $P(Б)=0,504$.

в) Событие В ={ студент ответил хотя бы на один вопрос }. Это означает, что был дан ответ на любой один вопрос, или на любые два вопроса, или на все три вопроса. Событие $\overline{B}$ = {студент не ответил ни на один вопрос}. События В и $\overline{B}$ противоположны, поэтому $\mathrm{P}(\mathrm{B}) = 1 - \mathrm{P}(\overline{\mathrm{B}})$. Событие $\overline{B}$ означает, что одновременно появились независимые события $\overline{A_1}, \overline{A_2}$ и $\overline{A_3}$, т. е. $\mathrm{P}(\overline{\mathrm{B}}) = \mathrm{P}(\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3})$. По правилу умножения вероятностей для независимых событий $P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}) = P(\overline{A_1}) \cdot P(\overline{A_2}) \cdot P(\overline{A_3}) = 0{,}1 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}2 = 0{,}006$.

Итак, $\mathrm{P}(\mathrm{B}) = 1 - 0{,}006 = 0{,}994$.

г) Событие Г={студент ответил по крайней мере на два вопроса}. Это означает, что дан ответ на любые два вопроса или на все три вопроса. Появление события Г означает, что наступило одно из четырёх несовместных событий: либо $A_1 A_2 \overline{A_3}$, либо $A_1 \overline{A_2} A_3$, либо $\overline{A_1} A_2 A_3$, либо $A_1 A_2 A_3$. По правилу сложения вероятностей несовместных событий

$$P(A) = P(A_1 A_2 \overline{A_3}) + P(A_1 \overline{A_2} A_3) + P(\overline{A_1} A_2 A_3) + P(A_1 A_2 A_3).$$

События A_1, A_2, A_3 - независимые, следовательно, независимы события $A_1,\ A_2$ *и* $\overline{A_3}$. По правилу умножения вероятностей независимых событий

$$P(A_1 A_2 \overline{A_3}) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(\overline{A_3}) = 0{,}9 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}2 = 0{,}126.$$

Аналогично получаем $P(A_1 \overline{A_2} A_3) = P(A_1) \cdot P(\overline{A_2}) \cdot P(A_3) = 0{,}9 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}8 = 0{,}216$,

$$P(\overline{A_1} A_2 A_3) = P(\overline{A_1}) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) = 0{,}1 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}8 = 0{,}056,$$

$$P(A_1 A_2 A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) = 0{,}9 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}8 = 0{,}504.$$

Окончательно имеем $P(\Gamma) = 0{,}126 + 0{,}216 + 0{,}056 + 0{,}504 = 0{,}902$.

д) Событие Д={ студент ответил на два вопроса }. Появление события Д означает, что наступило одно из трёх несовместных событий: либо $A_1 A_2 \overline{A_3}$, либо $A_1 \overline{A_2} A_3$, либо $\overline{A_1} A_2 A_3$. Далее, используя решение задачи **г)**, имеем $P(D) = 0{,}126 + 0{,}216 + 0{,}056 = 0{,}398.$

Тема 3. Формула полной вероятности. Формулы Бейеса

1. Формула полной вероятности

Пусть событие *A* может наступить лишь при появлении одного из множества попарно несовместных событий (гипотез) $H_1, H_2, \ldots, H_n$. Тогда вероятность события *A* вычисляется по *формуле полной вероятности*

$$P(A)=P(H_1)\cdot P_{H_1}(A)+P(H_2)\cdot P_{H_2}(A)+\ldots+P(H_n)\cdot P_{H_n}(A)=\sum_{i=1}^{n}P(H_i)\cdot P_{H_i}(A).$$

События $H_1, H_2, \ldots, H_n$ называются *гипотезами по отношению к событию A.*

2. Формулы Бейеса

Если событие А уже произошло, то вероятности гипотез (*априорные вероятности*) могут быть переоценены (*апостериорные вероятности)* по *формулам Бейеса*

$$P_A(H_i)=\frac{P(H_i)\cdot P_{H_i}(A)}{P(A)}=\frac{P(H_i)\cdot P_{H_i}(A)}{\sum\limits_{i=1}^{n}P(H_i)\cdot P_{H_i}(A)}\quad(i=1,2,\ldots n).$$

Пример 5. (Варианты 2, 4, 6, 8)

В ателье имеются 5 плейеров, выпущенных заводом B, 10 плейеров – заводом C, 15 плейеров – заводом D. Вероятность того, что плейеры, выпущенные заводами B, C, D, выдержат гарантийный срок службы, соответственно равны 0,8, 0,85 и 0,9. Найти вероятность того, что взятый наудачу плейер выдержит гарантийный срок службы.

Решение:

Событие *A* = {плейер выдержит гарантийный срок службы},

Гипотеза H_1 = {плейер выпущен заводом B},

Гипотеза H_2 = {плейер выпущен заводом C},

Гипотеза H_3 = {плейер выпущен заводом D}.

$$P(H_1)=\frac{5}{30}=\frac{1}{6};\; P(\mathrm{H}_2)=\frac{10}{30}=\frac{1}{3};\; P(\mathrm{H}_3)=\frac{15}{30}=\frac{1}{2};$$

$P_{H_1}(A)$=0,8; $P_{H_2}(A)$=0,85; $P_{H_3}(A)$=0,9.

По формуле полной вероятности $P(A)=P(H_1)\cdot P_{H_1}(A)+P(H_2)\cdot P_{H_2}(A)+$

$$+P(H_3)\cdot P_{H_3}(A)=\frac{1}{6}\cdot 0{,}8+\frac{1}{3}\cdot 0{,}85+\frac{1}{2}\cdot 0{,}9\approx 0{,}867\cdot$$

Пример 6. (Варианты 1, 3, 5, 7, 9, 10)

Литьё в болванках поступает из двух заготовительных цехов: 70% из первого цеха, 30% из второго цеха. Литьё первого цеха имеет 10% брака, второго – 20% брака. Взятая наудачу болванка оказалась без дефекта. Какова вероятность её изготовления первым цехом?

Решение:

Событие A ={болванка без дефекта}.

Гипотеза H_1 – болванка изготовлена первым цехом,

Гипотеза H_2 – болванка изготовлена вторым цехом,

Литьё первого цеха имеет 10% брака, следовательно, 90% болванок, изготовленных первым цехом, не имеют дефекта и $P_{H_1}(A)$=0,9. Литьё второго цеха имеет 20% брака, следовательно, 80% болванок, изготовленных вторым цехом, не имеют дефекта и $P_{H_2}(A)$=0,8.

Необходимо найти $P_A(H_1)$.

По формуле Бейеса

$$P_A(H_1)=\frac{P(H_1)\cdot P_{H_1}(A)}{P(A)}=\frac{P(H_1)\cdot P_{H_1}(A)}{P(H_1)\cdot P_{H_1}(A)+P(H_2)P_{H_2}(A)}=$$

$$=\frac{0{,}7\cdot 0{,}9}{0{,}7\cdot 0{,}9+0{,}3\cdot 0{,}8}=\frac{0{,}63}{0{,}63+0{,}24}=\frac{0{,}63}{0{,}87}\approx 0{,}724\,.$$

Тема 4. Повторение независимых испытаний.

1. *Формула Бернулли*

Вероятность того, что в серии из n независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность появления события A равна p $(0<p<1)$, это событие наступит ровно k раз (безразлично в какой последовательности), равна

$$P_n(k)=C_n^k p^k q^{n-k},$$

где $C_n^k=\frac{n!}{k!(n-k)!}$ – число сочетаний из n по k (см. выше), $q=1-p$ – вероятность противоположного события $\overline{A}$.

В различных задачах нас могут интересовать следующие вероятности:

– вероятность того, что в n испытаниях событие A наступит менее m раз

$$P_n(k<m)=P_n(0)+P_n(1)+...+P_n(m-1);$$

– вероятность того, что в n испытаниях событие A наступит более m раз

$$P_n(k>m)=P_n(m+1)+P_n(m+2)+...+P_n(n);$$

– вероятность того, что в n испытаниях событие A наступит не менее m раз

$$P_n(k\ge m)=P_n(m)+P_n(m+1)+...+P_n(n);$$

– вероятность того, что в n испытаниях событие A наступит не более m раз

$$P_n(k\le m)=P_n(0)+P_n(1)+...+P_n(m).$$

– вероятность того, что в n испытаниях событие А наступит не менее k_1 и не более k_2 раз

$$P_n(k_1\le k\le k_2)=P_n(k_1)+...+P_n(k_2).$$

Все эти вероятности могут быть вычислены по формуле Бернулли, однако, на практике ввиду вычислительных сложностей это возможно лишь при небольших n и поэтому используются приближенные формулы.

2. Приближенные формулы Муавра- Лапласа

2.1. Локальная теорема Лапласа

Если число испытаний n велико, а вероятность p не очень мала, то

$$P_n(k)\approx\frac{1}{\sqrt{npq}}\,\varphi(x),$$

где $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$, $x=\frac{k-np}{\sqrt{npq}}$.

Значения функции $\varphi(x)$ приведены в приложении (таблица 1), при $x > 5$ полагают $\varphi(x) \approx 0$, для отрицательных значений x пользуются тем, что функция $\varphi(x)$ четная, и, следовательно, $\varphi(-x) = \varphi(x)$.

2.2. Интегральная теорема Лапласа

Вероятность того, что событие А появится в n испытаниях не менее k_1 и не более k_2 раз находится по формуле

$$P_n(k_1 \le k \le k_2) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1),$$

где $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-(z^2/2)}\, dz = \int_0^x \varphi(x)\, dz$, $x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}$, $x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}$.

Значения функции Лапласа $\Phi(x)$ приведены в приложении (таблица 2), при $x > 5$ полагают $\Phi(x) \approx 0{,}5$, для отрицательных значений *x* пользуются тем, что функция $\Phi(x)$ нечетная, и, следовательно, $\Phi(-x) = -\Phi(x)$.

3. Приближенная формула Пуассона

Если число испытаний *n* велико, а вероятность *p* появления события в каждом испытании очень мала, то

$$P_n(k) \approx \frac{(np)^k\ e^{-np}}{k!}.$$

Обозначив , $\lambda = np$ – среднее число успехов в серии испытаний, получим

$$P_n(k) \approx p(k;\lambda) = \frac{\lambda^k\ e^{-\lambda}}{k!}.$$

Значение $p(k;\lambda)$ по заданным *k* и λ можно определить по приложению (таблица 3).

4. Наивероятнейшее число успехов

Число k_0 называется *наивероятнейшим*, если вероятность $P_n(k_0)$ того, что событие *A* наступит в *n* испытаниях ровно k_0 раз, является наибольшей из всех вероятностей $P_n(k)$, $k = 0, 1, \dots, n$.

Наивероятнейшее число k_0 определяется из двойного неравенства

$$np - q \le k_0 \le np + p,$$

причем:

а) если число $np-q$ – нецелое, то существует единственное k_0;

б) если число $np-q$ – целое, то наивероятнейших числа два, а именно: $k_0'=np-q$ и $k_0''=np+p=k_0'+1$;

в) если np – целое, то $k_0=np$.

Пример 7. (Варианты 1, 7)

В семье пять детей. Найти вероятность того, что среди этих детей: а) ровно два мальчика; б) не более двух мальчиков; в) более двух мальчиков; г) не менее двух и не более трех мальчиков. Вероятность рождения мальчика принять равной 0,51.

Решение:

Число испытаний n=5 невелико, поэтому вероятности можно вычислить непосредственно по формуле Бернулли.

а) Вероятность того, что среди пяти детей ровно два мальчика, равна

$P_5(2)=C_5^2p^2q^{5-2}$, где $C_5^2=\frac{5!}{2!(5-2)!}=10$, $p=0{,}51,\ q=1-p=0{,}49$.

$P_5(2)=10\cdot 0{,}51^2\cdot 0{,}49^3\approx 0{,}31$.

б) Вероятность того, что среди пяти детей не более двух мальчиков, равна

$P_5(0\le k\le 2)=P_5(0)+P_5(1)+P_5(2)$.

$$P_5(0)=C_5^0p^0q^5=\frac{5!}{0!(5-0)!}\cdot q^5=q^5=0{,}49^5\approx 0{,}028.$$

$$P_5(1)=C_5^1p^1q^4=\frac{5!}{0!(5-0)!}\cdot p^4\cdot q^4=5\cdot 0{,}51\cdot 0{,}49^4\approx 0{,}147$$

$P_5(2)\approx 0{,}31$ (см. а)).

$P_5(0\le k\le 2)=P_5(0)+P_5(1)+P_5(2)=0{,}028+0{,}147+0{,}31\approx 0{,}485$

в) Событие {среди пяти детей более двух мальчиков} противоположно событию {среди пяти детей не более двух мальчиков}, поэтому его вероятность равна $P_5(3\le k\le 5)=1-P_5(0\le k\le 2)=1-0{,}485=0{,}515$.

г) Вероятность того, что среди пяти детей не менее двух и не более трёх мальчиков, равна $P_5(2 \le k \le 3) = P_5(2) + P_5(3)$, $P_5(2) = 0{,}31$ (см. а)).

$$P_5(3) = C_5^3 p^3 q^{5-3} = \frac{5!}{3!(5-3)!} \cdot 0{,}51^3 \cdot 0{,}49^2 \approx 0{,}31; \quad P_5(2) + P_5(3) = 0{,}62.$$

Пример 8. (Варианты 2, 9)

Сколько надо произвести независимых испытаний с вероятностью появления события в каждом испытании, равной 0,4, чтобы наивероятнейшее число появлений события в этих испытаниях было равно 25?

Решение:

По условию $k_0=25$; $p=0{,}4$; $q=0{,}6$. Воспользуемся двойным неравенством $np-q \le k_0 \le np+p$. Подставляя данные задачи, получим систему неравенств для определения неизвестного числа n: $0{,}4n-0{,}6 \le 25$, $0{,}4n+0{,}4 \ge 25$. Из первого неравенства системы найдем $n \le 25{,}6/0{,}4=64$. Из второго неравенства системы имеем $n \ge 24{,}6/0{,}4=61{,}5$. Итак, искомое число испытаний должно быть 62,63 или 64.

Пример 9. (Варианты 4, 6, 8, 10)

Вероятность появления события А в каждом из 2400 независимых испытаний постоянна и равна 0,6. Найти вероятность того, что событие *A* наступит: а) равно 1400 раз; б) от 1400 до 1800 раз; в) не менее 1400 раз.

Решение:

Число испытаний n=2400 велико; вероятность p=0,6 появления события *A* немала; $q=1-p=0{,}4$; $npq=2400 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}4=1440 \cdot 0{,}4 = 576 \ge 20$, поэтому воспользуемся локальной и интегральной формулами Лапласа.

а) Имеем: $n=2400$, $p=0{,}6$, $q=0{,}4$, $k=1400$, $np=1440$, $npq=576$, $x = \frac{k-np}{\sqrt{npq}} = \frac{1400-1440}{\sqrt{576}} = \frac{-40}{24} \approx -1{,}67$. Функция $\varphi(x)$ четная, поэтому $\varphi(-1{,}67) = \varphi(1{,}67)$. По таблице 1 приложения $\varphi(1{,}67) \approx 0{,}09893$. По локальной приближенной формуле Лапласа $P_n(k)=\frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x)$ получим

$P_{2400}(1400)\approx\frac{1}{24}\varphi(1{,}67)\approx\frac{0{,}09893}{24}\approx 0{,}0041\cdot$

б) Имеем: *n=2400, p=0,6, q=0,4,* k_1*=1400,* k_2 *=1800, np=1440,* $\sqrt{\mathrm{npq}}$ *=24,*

$x_1=\frac{k_1-np}{\sqrt{npq}}\approx -1{,}67$, $x_2=\frac{k_2-np}{\sqrt{npq}}=\frac{1800-1440}{24}=\frac{360}{24}=15$. Функция $\Phi(x)$

нечетная, поэтому $\Phi(-1{,}67)=-\Phi(1{,}67)$. По таблице 2 приложения находим $\Phi(1{,}67)\approx 0{,}45254$, $\Phi(15)\approx 0{,}5$ (т. к. при $x>5$ полагают $\Phi(x)\approx 0{,}5$).

По интегральной приближенной формуле Лапласа $P_n(k_1\le k\le k_2)=\Phi(x_2)-\Phi(x_1)$ имеем $P_{2400}(1400\le k\le 1800)\approx\Phi(15)-\Phi(-1{,}67)$ $=\Phi(15)+\Phi(1{,}67)\approx$0,5+0,45254= 0,95254.

в) Требование, чтобы событие появлялось не менее 1400 раз, означает, что максимально допустимое число появлений события *A* равно числу испытаний, т.е. k_2*=2400.* В остальном решение задачи аналогично пункту б).

Пример 10. (Варианты 3, 5)

Тираж книги 100 000 экземпляров. Вероятность того, что она сброшюрована неправильно, равна 0,00001. Найти вероятность того, что тираж содержит ровно пять бракованных книг.

Решение:

События, состоящие в том, что книги бракованные, независимы. По условию число испытаний *n*=100 000 весьма велико, а вероятность *p*=0,00001 очень мала, $\lambda=np=1\in(0{,}1;10)$. Следовательно, можно использовать приближенную формулу Пуассона $P_n(k)\approx\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$. По таблице 3 приложения для известных λ=1 и *k*=5 находим $P_{100\,000}(5)\approx 0{,}00307$.

Приложение

Таблица 1. Значения локальной функции Лапласа $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	3989	3989	3988	39986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	0,3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	0,3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	0,3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	0,3683	3668	3653	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	0,3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	0,3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	0,3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	0,2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	0,2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	0,2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	0,2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	0,1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	0,1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	0,1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	0,1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	0,1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0,0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0,0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0,0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0,0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0,0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0,0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0,0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0,0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0,0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0,0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0,0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0,0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0,0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	0,0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0,0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0,0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0,0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0,0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0,0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0,0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0,0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0,0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0,0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

4,0	0,0001338		0000589		0000249		0000101		0000040		
5,0	0,0000015										

Таблица 2. *Значения интегральной функции Лапласа* $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$.

x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)
0,00	0,0000	0,50	0,1915	1,00	0,3413	1,50	0,4332	2,00	0,4772	3,00	0,49865
0,01	0,0040	0,51	0,1950	1,01	0,3438	1,51	0,4345	2,02	0,4783	3,20	0,49931
0,02	0,0080	0,52	0,1985	1,02	0,3461	1,52	0,4357	2,04	0,4793	3,40	0,49966
0,03	0,0120	0,53	0,2019	1,03	0,3485	1,53	0,4370	2,06	0,4803	3,60	0,499841
0,04	0,0160	0,54	0,2054	1,04	0,3508	1,54	0,4382	2,08	0,4812	3,80	0,499928
0,05	0,0199	0,55	0,2088	1,05	0,3531	1,55	0,4394	2,10	0,4821	4,00	0,499968
0,06	0,0239	0,56	0,2123	1,06	0,3554	1,56	0,4406	2,12	0,4830	4,50	0,499997
0,07	0,0279	0,57	0,2157	1,07	0,3577	1,57	0,4418	2,14	0,4838	5,00	0,499997
0,08	0,0319	0,58	0,2190	1,08	0,3599	1,58	0,4429	2,16	0,4846		
0,09	0,0359	0,59	0,2224	1,09	0,3621	1,59	0,4441	2,18	0,4854		
0,10	0,0398	0,60	0,2257	1,10	0,3643	1,60	0,4452	2,20	0,4861		
0,11	0,0438	0,61	0,2291	1,11	0,3665	1,61	0,4463	2,22	0,4868		
0,12	0,0478	0,62	0,2324	1,12	0,3686	1,62	0,4474	2,24	0,4875		
0,13	0,0517	0,63	0,2357	1,13	0,3708	1,63	0,4484	2,26	0,4881		
0,14	0,0557	0,64	0,2389	1,14	0,3729	1,64	0,4495	2,28	0,4887		
0,15	0,0596	0,65	0,2422	1,15	0,3749	1,65	0,4505	2,30	0,4893		
0,16	0,0636	0,66	0,2454	1,16	0,3770	1,66	0,4515	2,32	0,4898		
0,17	0,0675	0,67	0,2486	1,17	0,3790	1,67	0,4525	2,34	0,4904		
0,18	0,0714	0,68	0,2517	1,18	0,3810	1,68	0,4535	2,36	0,4909		
0,19	0,0753	0,69	0,2549	1,19	0,3830	1,69	0,4545	2,38	0,4913		
0,20	0,0793	0,70	0,2580	1,20	0,3849	1,70	0,4554	2,40	0,4918		
0,21	0,0832	0,71	0,2611	1,21	0,3869	1,71	0,4564	2,42	0,4922		
0,22	0,0871	0,72	0,2642	1,22	0,3883	1,72	0,4573	2,44	0,4927		
0,23	0,0910	0,73	0,2673	1,23	0,3907	1,73	0,4582	2,46	0,4931		
0,24	0,0948	0,74	0,2703	1,24	0,3925	1,74	0,4591	2,48	0,4934		
0,25	0,0987	0,75	0,2734	1,25	0,3944	1,75	0,4599	2,50	0,4938		
0,2	0,1026	0,7	0,2764	1,2	0,3962	1,7	0,4608	2,5	0,4941		

6		6		6		6		2			
0,27	0,1064	0,77	0,2794	1,27	0,3980	1,77	0,4616	2,54	0,4945		
0,28	0,1103	0,78	0,2823	1,28	0,3997	1,78	0,4625	2,56	0,4948		
0,29	0,1141	0,79	0,2852	1,29	0,4015	1,79	0,4633	2,58	0,4951		
0,30	0,1179	0,80	0,2881	1,30	0,4032	1,80	0,4641	2,60	0,4953		
0,31	0,1217	0,81	0,2910	1,31	0,4049	1,81	0,4649	2,62	0,4956		
0,32	0,1255	0,82	0,2939	1,32	0,4066	1,82	0,4656	2,64	0,4959		
0,33	0,1293	0,83	0,2967	1,33	0,4082	1,83	0,4664	2,66	0,4961		
0,34	0,1331	0,84	0,2995	1,34	0,4099	1,84	0,4671	2,68	0,4963		
0,35	0,1368	0,85	0,3023	1,35	0,4115	1,85	0,4678	2,70	0,4965		
0,36	0,1406	0,86	0,3051	1,36	0,4131	1,86	0,4686	2,72	0,4967		
0,37	0,1443	0,87	0,3078	1,37	0,4147	1,87	0,4693	2,74	0,4969		
0,38	0,1480	0,88	0,3106	1,38	0,4162	1,88	0,4699	2,76	0,4971		
0,39	0,1517	0,89	0,3133	1,39	0,4177	1,89	0,4706	2,78	0,4973		
0,40	0,1554	0,90	0,3159	1,40	0,4192	1,90	0,4713	2,80	0,4974		
0,41	0,1591	0,91	0,3186	1,41	0,4207	1,91	0,4719	2,82	0,4976		
0,42	0,1628	0,92	0,3212	1,42	0,4222	1,92	0,4726	2,84	0,4977		
0,43	0,1664	0,93	0,3238	1,43	0,4236	1,93	0,4732	2,86	0,4979		
0,44	0,1700	0,94	0,3264	1,44	0,4251	1,94	0,4738	2,88	0,4980		
0,45	0,1736	0,95	0,3289	1,45	0,4265	1,95	0,4744	2,90	0,4981		
0,46	0,1772	0,96	0,3315	1,46	0,4279	1,96	0,4750	2,92	0,4982		
0,47	0,1808	0,97	0,3340	1,47	0,4292	1,97	0,4756	2,94	0,4984		
0,48	0,1844	0,98	0,3365	1,48	0,4306	1,98	0,4761	2,96	0,4985		
0,49	0,1879	0,99	0,3389	1,49	0,4319	1,99	0,4767	2,98	0,4986		

Таблица 3. Значения вероятностей распределения Пуассона

$$p(k, \lambda) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

k \ λ	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
0	0,904837	0,818731	0,740818	0,670320	0,606531	0,548812	0,496585	0,449329	0,406570
2	0,090484	0,163746	0,222245	0,268128	0,303265	0,329287	0,347610	0,359463	0,365913
3	0,004524	0,016375	0,033337	0,053626	0,075816	0,098786	0,121663	0,143785	0,164661
4	0,000151	0,001091	0,003334	0,007150	0,012636	0,019757	0,028388	0,038343	0,049398
5	0,000004	0,000055	0,000250	0,000715	0,001580	0,002964	0,004968	0,007669	0,011115
6		0,000002	0,000015	0,000057	0,000158	0,000356	0,000695	0,001227	0,002001
7			0,000001	0,000004	0,000013	0,000035	0,000081	0,000164	0,000300
8					0,000001	0,000003	0,000008	0,000019	0,000039
								0,000002	0,000004

k \ λ	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0	6,0	7,0	8,0	9,0
0	0,367879	0,135335	0,049787	0,018316	0,006738	0,002479	0,000912	0,000335	0,000123
1	0,367879	0,270671	0,149361	0,073263	0,033690	0,014873	0,006383	0,002684	0,001111
2	0,183940	0,270671	0,224042	0,146525	0,084224	0,044618	0,022341	0,010735	0,004998
3	0,061313	0,180447	0,224042	0,195367	0,140374	0,089235	0,052129	0,028626	0,014994
4	0,015328	0,090224	0,168031	0,195367	0,175467	0,133853	0,091226	0,057252	0,033737
5	0,003066	0,036089	0,100819	0,156293	0,175467	0,160623	0,127717	0,091604	0,060727
6	0,000511	0,012030	0,050409	0,104194	0,146223	0,160623	0,149003	0,122138	0,091090
7	0,000073	0,003437	0,021604	0,059540	0,104445	0,137677	0,149003	0,139587	0,117116
8	0,000009	0,000859	0,008101	0,029770	0,065278	0,103258	0,130377	0,139587	0,131756
9	0,000001	0,000191	0,002701	0,013231	0,036266	0,068838	0,101405	0,124007	0,131756
10		0,000038	0,000810	0,005292	0,018133	0,041303	0,070983	0,099262	0,118580
11		0,000007	0,000221	0,001925	0,008242	0,022529	0,045171	0,072190	0,097020
12		0,000001	0,000055	0,000642	0,003434	0,011262	0,026350	0,048127	0,072765
13			0,000013	0,000197	0,001321	0,005199	0,014188	0,029616	0,050376
14			0,000003	0,000056	0,000472	0,002228	0,007094	0,016924	0,032384
15			0,000001	0,000015	0,000157	0,000891	0,003311	0,009026	0,019431
16				0,000004	0,000049	0,000334	0,001448	0,004513	0,010930
17				0,000001	0,000014	0,000118	0,000596	0,002124	0,005786
18					0,000004	0,000039	0,000232	0,000944	0,002893
19					0,000001	0,000012	0,000085	0,000397	0,001370
20						0,000004	0,000030	0,000159	0,000617
21						0,000001	0,000010	0,000061	0,000264
22							0,000003	0,000022	0,000108
23							0,000001	0,000008	0,000042
24								0,000003	0,000016
25								0,000001	0,000006
26									0,000002
27									0,000001