МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ В ПРИМЕРАХ И ЗАДАЧАХ

ЧАСТЬ 2

НОВОСИБИРСК
2007

УДК 517 (076.1)
М 34

Рецензенты:

д-р физ.-мат. наук, проф. *К.Н. Пономарёв*,
д-р техн. наук, проф. *Г.М. Шумский*

Коллектив авторов:

В.Я. Долгих, Г.Б. Корабельникова,
Э.Б. Шварц, Г.В. Недогибченко

М 34 **Математический анализ в примерах и задачах :** учеб. пособие. Часть 2 / В.Я. Долгих, Г.Б. Корабельникова, Э.Б. Шварц, Г.В. Недогибченко; под ред. В.Н. Максименко : – 2-е изд., доп. и перераб. – Новосибирск : Изд-во НГТУ, 2007. – 208 с. – («Учебники НГТУ»).

ISBN 978-5-7782-0829-2

Настоящее пособие включает в себя теоретические сведения, задачи и упражнения по следующим разделам курса высшей математики: предел и непрерывность, дифференциальное и интегральное исчисления функций нескольких действительных переменных, их приложения к задачам геометрии и механики, дифференциальные уравнения, ряды.

Типовые задачи даны с подробными решениями. Приведены задачи для самостоятельного решения. Все задачи снабжены ответами.

УДК 517 (076.1)

ISBN 978-5-7782-0829-2

ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

$\Rightarrow$	– знак логического следования
$\Leftrightarrow$	– знак равносильности (эквивалентности)
$\in$	– знак принадлежности
$\to$	– знак соответствия
$:=$	– равенство по определению
$\forall$	– квантор общности
$\exists$	– квантор существования
$\exists!$	– «существует точно один»
$\{a,b,c,\ldots\}$	– множество, состоящее из элементов $a,b,c,\ldots$
$\varnothing$	– пустое множество
$A\bigcup B$	– объединение множеств
$A\bigcap B$	– пересечение множеств
$A\setminus B$	– разность множеств
$\overline{A},\ U\setminus A$	– дополнение множества A до универсального множества U
$A\subseteq B$	– множество A является подмножеством множества B
$A\subset B$	– множество A является собственным подмножеством множества B
$\{x\vert P(x)\}$	– множество элементов x, удовлетворяющих условию $P(x)$
$f:X\to Y$	– функция, отображающая множество X в (на) множество Y
$f^{-1}:Y\to X$	– функция, обратная к функции f, отображающая множество Y в (на) множество X
$D(f)$	– область определения функции f
$E(f)$	– множество значений функции f
$f\circ g$	– композиция функций f и g, т.е. сложная функция, составленная из функций f и g
$[a,b]$	– замкнутый промежуток (отрезок, сегмент) с началом a и концом b
(a,b)	– открытый промежуток, интервал
$[a,b),(a,b]$	– полуоткрытый отрезок

$\langle a,b \rangle$ – промежуток (любой из вышеперечисленных)

$O(a,\varepsilon):=\{\, x \mid \; : \; |x-a|<\varepsilon \,\}$ – «ε» – окрестность точки a

$O^{\circ}(a,\varepsilon):=\{\, x \mid \; : \; 0<|x-a|<\varepsilon \,\}$ – проколотая «ε» – окрестность точки a

$\{\, u_n \}$ – последовательность с «n»-м членом u_n

$N \; :=\{1,\, 2,\, \ldots,\, n,\, \ldots\}$ – множество натуральных чисел

$Z:=\{\ldots -n,\ldots,-1,\; 0,\; 1,\ldots,\; n,\ldots\}$ – множество целых чисел

R – множество действительных чисел

R_+ – множество положительных действительных чисел

R_o – множество неотрицательных действительных чисел

R_- – множество отрицательных действительных чисел

C – множество комплексных чисел

R^n – «n» – мерное арифметическое пространство

$k=\overline{1,n}$ – «k» принимает все целые значения от 1 до n.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Основой математической подготовки инженера является общий курс высшей математики. Опыт показывает, что успешному усвоению этого курса, помимо работы с учебниками и конспектами лекций, способствует использование различного рода вспомогательных изданий – справочников и методических справочных пособий, отражающих объем и структуру материала, изучаемого в конкретном вузе.

Настоящее учебное пособие состоит из трех частей. Предлагаемая читателю вторая часть пособия по курсу математического анализа разработана на кафедре инженерной математики НГТУ и включает в себя главы с девятой по четырнадцатую. Она содержит 767 задач по разделам: предел и непрерывность, дифференциальное и интегральное исчисление функций нескольких действительных переменных, их приложения к задачам геометрии и механики; дифференциальные уравнения, ряды.

Пособие имеет следующую структуру: каждый параграф содержит формулировки основных определений и теорем; задачи и упражнения с подробными решениями; набор задач и упражнений для самостоятельного решения с ответами. Такая структура книги делает ее удобной для самостоятельного овладения предметом при минимальной помощи со стороны преподавателя. Начало разобранных задач обозначено символом ∇, а завершение решения задач – символом #. В некоторых случаях для наиболее употребительных определений и теорем дается вторая (краткая) их запись с помощью кванторов и логических символов. В конце каждой книги приведен список литературы, использованной авторами при подготовке материала и предлагаемой студентам для изучения данного раздела.

Настоящее пособие может быть использовано студентами всех факультетов НГТУ и других технических вузов, а также преподавателями при подготовке и проведении практических занятий.

Приведенное количество задач не только удовлетворит потребности студентов в практическом закреплении знаний по соответствующему разделу курса, но и даст возможность преподавателю разнообразить выбор задач в зависимости от уровня подготовки студентов. Ряд предлагаемых задач и упражнений может быть использован преподавателем для проведения контрольных работ.

Для наглядности часть задач иллюстрируется рисунками.

ОГЛАВЛЕНИЕ

УЧЕБНОЕ ИЗДАНИЕ

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ В ПРИМЕРАХ И ЗАДАЧАХ

Часть 2

Учебное пособие

Редактор *И. Л. Кескевич*
Технический редактор *Н.В. Гаврилова*

Художник *А. В. Волошина*
Компьютерная верстка *С. Н. Кондратенко*

Лицензия ИД № 04303 от 20.03.01

Подписано в печать 17.06.2007 г.
Формат 70 × 108/16. Бумага офсетная.
Уч.-изд. л. 11,75. Печ. л. 12,5. Тираж 1000 экз. Заказ №

Отпечатано в типографии ООО «Сибвузиздат».
630099, г. Новосибирск, ул. Каменская, 52

ГЛАВА 9

ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

9.1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ, ОПРЕДЕЛЕНИЯ

1°. $R^2=\{(x,\ y)\}$ $(R^3=\{(x,\ y,\ z)\})$ – множество всех упорядоченных пар чисел $(x,\ y)$ (троек чисел $(x,\ y,\ z)$). $R^n=\{(x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n)\}$ – множество всех упорядоченных наборов n чисел $(x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n)$.

2°. *Функция* f n переменных сопоставляет по определенному правилу каждому набору n чисел $(x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n)$ из *области определения* $D\subset R^{\text{n}}$ единственное значение u из *области значений* $E\subset R$, что записывается в виде $f:D\to E$ или $u=f(x_1,\ ...,\ x_n),\ (x_1,\ ...,\ x_n)\in D.$ В дальнейшем будем рассматривать функции двух (трех) переменных $z=f(x,\ y)$, $(x,\ y)\in D\subset R^2$ $(u=f(x,\ y,\ z),\ (x,\ y,\ z)\in D\subset R^3)$.

3°. Если $(x,\ y)$ (или $(x,\ y,\ z)$) – декартовы координаты точки плоскости Oxy (или пространства $Oxyz$), то D – часть плоскости или вся плоскость (часть пространства или все пространство).

4°. *Проколотая* ε *– окрестность точки* $M_0(x_1^0,\ x_2^0,\ ...,\ x_n^0)$ (обозначается $\overset{\circ}{U}(M_0,\varepsilon)$) – множество всех точек $M(x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n)$, не совпадающих с точкой M_0, расстояние до которых от точки M_0 меньше ε: $0<\rho(M,\ M_0)<\varepsilon$. Так, проколотая ε – окрестность точки $M_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$ – множество точек $M(x, y, z)$, удовлетворяющих условию $0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}<\varepsilon$ – шар радиуса ε без границы с выколотым центром M_0. ($\overset{\circ}{U}(M_0,\varepsilon)$ иногда называют *выколотой окрестностью точки* M_0).

5°. Назовем точку *внутренней точкой области*, если она принадлежит этой области вместе со всеми точками какой-нибудь своей проколотой окрестности.

6°. Множество (область) S из R^n называется окрестностью точки M, если M является внутренней точкой S, т.е. M входит в S вместе со своей проколотой окрестностью.

7°. Любая окрестность *граничной точки области* содержит точки, принадлежащие области, и точки, не принадлежащие области. Сами граничные точки могут принадлежать области, а могут не принадлежать.

8°. Область называется *замкнутой*, если она содержит все свои граничные точки.

Пример 1. Найти и изобразить область определения функций:

а) $z=\sqrt{1-x^2}+\sqrt{y^2-1}$; б) $z=\sqrt{x^2-4y}\ /\ \ln(1-x^2-y^2)$.

∇ а) Функция определена, если x и y удовлетворяют системе неравенств (которую последовательно решаем) $\begin{cases}1-x^2\ge 0,\\ y^2-1\ge 0;\end{cases}$ $\begin{cases}x^2\le 1,\\ y^2\ge 1;\end{cases}$ $\begin{cases}|x|\le 1,\\ |y|\ge 1.\end{cases}$ Следовательно, область определения – множество точек $D=\{(x,\ y)|\ -1\le x\le 1,\ -\infty<y\le -1\}\cup\{(x,\ y)|\ -1\le x\le 1,\ 1\le y<\infty\}$. Область определения изображена на рис. 9.1.

б) Функция определена, если x и y удовлетворяют системе неравенств $\begin{cases}x^2-4y\ge 0,\\ 1-x^2-y^2>0,\\ 1-x^2-y^2\ne 1.\end{cases}$ Область определения получается пересечением множеств: $y\le x^2\ /\ 4$ – множество точек «под» параболой $y=x^2\ /\ 4$, включая саму параболу; $x^2+y^2<1$ – внутренность круга радиуса 1 с центром в точке $O(0;\ 0)$; $x^2+y^2\ne 0$ – вся плоскость Oxy, исключая точку $O(0;\ 0)$. Итак, $D=\{(x,\ y)|\ y\le x^2\ /\ 4,\quad x^2+y^2<1,$ $(x\ne 0)\cap(y\ne 0)\}$ (рис. 9.2). (Пунктирная линия, проведенная рядом со сплошной линией, означает, что точки сплошной линии не принадлежат области.)

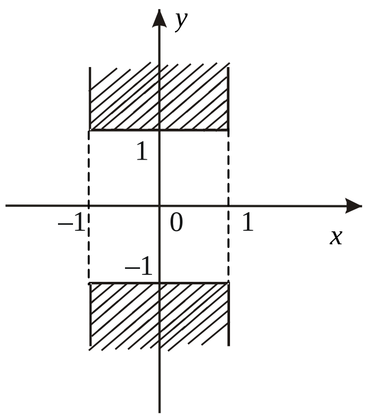


Рис. 9.1

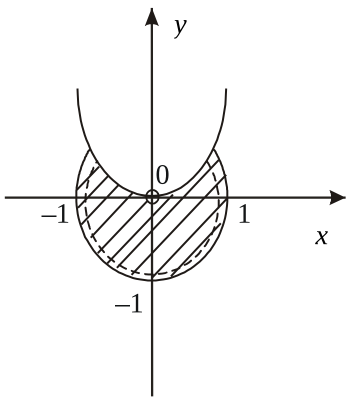


Рис. 9.2

Задачи для самостоятельного решения

Найти области определения следующих функций:

1. $z=\sqrt{1-x^2/a^2-y^2/b^2}$. **2.** $z=\ln(y^2-4x+8)$.

3. $z=1/\sqrt{x+y}+1/\sqrt{x-y}$. **4.** $z=\arcsin((y-1)/x)$.

5. $z=\sqrt{x-\sqrt{y}}$. **6.** $z=\operatorname{ctg}\pi(x+y)$.

7. $z=\ln x-\ln\sin y$.

8. $u=\sqrt{R^2-x^2-y^2-z^2}+1/\sqrt{x^2+y^2+z^2-r^2}$, $R>r$.

9.2. ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ

Пусть функция $f(M)=f(x_1, x_2, ..., x_n)$ определена в некоторой окрестности D точки M_0, кроме, может быть, самой точки M_0.

1°. Число A называется *пределом* функции $f(M)$ при стремлении точки $M(x_1, x_2, ...x_n)$ к точке $M_0(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$ (или, другими словами, при $x_i\to x_i^0, i=1, 2, ..., n)$, если для любого сколь угодно малого положительного числа ε найдется такая проколотая δ-окрестность точки M_0, что для любой точки M из этой окрестности выполняется $|f(M)-A|<\varepsilon$ и обозначается $\lim\limits_{M\to M_0} f(M)=A$ (говорят, что при $M\to M_0$ функция f стремится к A вдоль множества D). Этот предел *не должен зависеть* от способа («пути») стремления M к M_0. Используя логические символы, $A\overset{df}{=}\lim\limits_{M\to M_0} f(M) \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists\ \delta(\varepsilon)>0$

$\forall M\ \ (M\in\overset{\circ}{U}(M_0, \delta)\ \Rightarrow |f(M)-A|<\varepsilon)$.

Для функции двух переменных $f(x, y)$

$$\lim_{M\to M_0} f(M)=\lim_{\substack{x\to x_0,\\ y\to y_0}} f(x, y)=A \overset{df}{\Leftrightarrow} \forall\varepsilon>0\ \exists\ \delta(\varepsilon)>0$$

$$\forall(x, y)\ \ (0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta\ \Rightarrow |f(x, y)-A|<\varepsilon).$$

2°. Функция $f(M)$ называется *бесконечно малой функцией* (б.м.ф.) при стремлении точки M к точке M_0 вдоль D, если

$$\lim_{M\to M_0} f(M)=0 \overset{df}{\Leftrightarrow} \forall\varepsilon>0\ \exists\ \delta(\varepsilon)>0\quad \forall M\ \ (M\in\overset{\circ}{U}(M_0, \delta)\Rightarrow |f(M)|<\varepsilon).$$

3°. Функция $f(M)$ называется *бесконечно большой* при $M\to M_0$ вдоль области D, если для любого сколь угодно большого числа N существует такое положительное число δ, что для всех точек

$M \in \overset{\circ}{U}(M_0, \delta)$ выполняется условие $|f(M)| > N$. В этом случае пишут $\lim\limits_{M\to M_0} f(M) = +\infty$ (или $\lim\limits_{M\to M_0} f(M) = -\infty$).

4°. Практически, при вычислении $\lim\limits_{M\to M_0} f(M)$ удобно задать проходящую через точки M и M_0 линию в параметрической (или иной) форме, сведя тем самым задачу к вычислению предела функции одной переменной по известным правилам и теоремам. Иногда при вычислении $\lim\limits_{M(x,y)\to M(x_0,y_0)} f(x, y)$ удобно от координат x, y перейти к полярным координатам ρ, φ по формулам $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$.

Пример 2. Вычислить пределы:

$$\text{а) } \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{2xy}{x^2+y^2}, \qquad \text{б) } \lim_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}} (x^2+y^2)e^{-(x+y)}.$$

∇ а) Не нарушая общности, будем считать, что точка $M(x, y)$ из окрестности точки $M_0(0, 0)$ стремится к точке M_0 по прямой $y = kx$ (проходящей через точки M_0 и M). Тогда из $x\to 0$ следует $y\to 0$ и $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{2xy}{x^2+y^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x\cdot kx}{x^2+k^2x^2} = \dfrac{2k}{1+k^2}$. Пределы получаются разными при различных значениях k и не существует числа A, к которому значения $f(x, y) = \dfrac{2xy}{(x^2+y^2)}$ становились бы сколь угодно близки, как только точка $M(x, y)$ оказывается в достаточной близости от точки $M_0(0, 0)$. Предел данной функции при $M\to M_0(0, 0)$ не существует.

б) $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}} (x^2+y^2)e^{-(x+y)} = \Big|$ находим предел вдоль луча $y = kx$ ($k > 0$, $x\in[0; +\infty)$) при $x\to\infty \Big| = \lim\limits_{x\to\infty} x^2(1+k^2)e^{-x(1+k)} = (1+k^2)\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2}{e^{(1+k)x}} = \left(\dfrac{\infty}{\infty}\right) =$

$= \Big|$ применим правило Лопиталя два раза $\Big| =$

$$= (1+k^2)\lim_{x\to\infty} \frac{(x^2)'}{\left(e^{(1+k)x}\right)'} = \frac{2(1+k^2)}{(1+k)} \lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^{(1+k)x}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) =$$

$$= \frac{2(1+k^2)}{(1+k)^2} \lim_{x\to\infty} \frac{1}{e^{(1+k)x}} = 0 \ \forall k > 0$$ – предел существует и равен нулю. #

5°. Наряду с рассмотренным пределом функции в точке при одновременном стремлении координат $x_i (i = 0,1,...,n)$ точки M

к предельным значениям x_i^0 (координатам точки M_0) для функции многих переменных существует понятие повторного предела, связанное с повторным переходом к пределу по различным координатам. В частности, для функции двух переменных $f(x,y)$ можно рассматривать два повторных предела в точке (x_0,y_0):

$\lim\limits_{x\to x_0}(\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y))$ и $\lim\limits_{y\to y_0}(\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y))$.

Например, для функции $f(x,y)=\dfrac{x-y+x^2+y^2}{x+y}$ имеем

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\frac{x-y+x^2+y^2}{x+y}\right)=\lim_{x\to 0}(1+x)=1,$$

$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\frac{x-y+x^2+y^2}{x+y}\right)=\lim_{y\to 0}(-1+y)=-1.$$

Отсюда следует, что изменять порядок следования предельных переходов по разным переменным, вообще говоря, нельзя.

Из одного лишь существования предела функции в точке не следует существование повторных пределов в этой точке и, наоборот, из существования повторных пределов не следует существование предела в соответствующей точке. Так, в примере 2а) не существует предела функции в точке (0;0), но существуют оба повторных предела в этой точке:

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0}\frac{2xy}{x^2+y^2}=\lim_{x\to 0}0=0,\qquad \lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0}\frac{2xy}{x^2+y^2}=\lim_{y\to 0}0=0.$$

Теорема 9 (о связи между пределом функции в точке и повторными пределами). Пусть существует предел $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=A$ и при любом фиксированном y из некоторой окрестности точки (x_0,y_0) существует $\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)=\varphi(y)$. Тогда существует повторный предел $\lim\limits_{y\to y_0}\varphi(y)$ и $\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)=A$.

Задачи для самостоятельного решения

Вычислить пределы функций, полагая, что независимые переменные одновременно стремятся к своим предельным значениям.

9. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}{x^2+y^2}$. **10.** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2}$. **11.** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{e^{-1/(x^2+y^2)}}{x^4+y^4}$.

12. Найти 1) $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f$, 2) $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f$, 3) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f$, если а) $f=\dfrac{x^3-y}{x^3+y}$, б) $f=\dfrac{x^2y+xy^2}{x^2-xy+y^2}$, в) $f=x+y\sin\dfrac{1}{x}$,

г) $f=\dfrac{y}{x}\operatorname{tg}\dfrac{x}{x+y}$.

13. Найти 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\lim\limits_{y\to\infty} f$, 2) $\lim\limits_{y\to\infty}\lim\limits_{x\to\infty} f$, 3) $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}} f$, если

а) $f=\dfrac{x^3+y^2}{x^3+y^3}$, б) $f=\sin\dfrac{\pi y^2}{x^2+3y^2}$, в) $f=(x^2+y^2)^2e^{-x^2-y^2}$.

9.3. НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ

1°. Функция $f(M)$ называется *непрерывной в точке* $M_0(x_1^0, ..., x_n^0)$, если выполнены условия: 1) $f(M)$ определена в точке M_0; 2) существует $\lim\limits_{M\to M_0} f(M)$; 3) $\lim\limits_{M\to M_0} f(M)=f(M_0)$.

2°. Функция $f(M)$ называется *непрерывной в области* U, если она непрерывна в каждой точке области U.

3°. Если в точке M_0 нарушено хотя бы одно из условий 1) – 3) непрерывности функции в точке, то M_0 называется *точкой разрыва* функции $f(M)$. Точки разрыва могут быть изолированными, образовывать линии разрыва, поверхности разрыва и т.д.

4°. Если функция $f(x,y)$ непрерывна в точке (x_0,y_0) и функции $x=\varphi(u,v)$ и $y=\psi(u,v)$ непрерывны в точке (u_0,v_0), причем $\varphi(u_0,v_0)=x_0$, $\psi(u_0,v_0)=y_0$, то и комбинация функций (или сложная функция) $f(\varphi(u,v),\psi(u,v))$ также непрерывна в точке (u_0,v_0).

Теорема 9.1. Пусть функция f определена и непрерывна в ограниченной и замкнутой области D. Тогда: 1) она ограничена в D; 2) она принимает, по крайней мере в одной точке области D, наименьшее и, по крайней мере в одной точке, наибольшее значения; 3) в односвязной области D функция принимает каждое значение, заключенное между наибольшим и наименьшим значениями.

Пример 3. Найти точки разрыва функций:

а) $z=1/\ln(2-x^2-y^2)$; б) $u=1/(x^2+y^2-z^2)$.

∇ а) Область существования функции $\ln(2-x^2-y^2)$ есть множество точек плоскости Oxy, координаты которых удовлетворяют условию $2-x^2-y^2>0$ или $x^2+y^2<2$ – внутренность круга радиуса $\sqrt{2}$ с центром в точке O (0; 0). Функция $1/\ln(2-x^2-y^2)$ не определена в точках, в которых знаменатель обращается в нуль, т.е. $\ln(2-x^2-y^2)=0$, отсюда $2-x^2-y^2=1$ или $x^2+y^2=1$. Таким образом, функция $z(x, y)$ разрывна на окружности $x^2+y^2=1$.

б) Функция $u(x, y, z)$ не определена в точках, в которых знаменатель обращается в нуль. Поэтому в пространстве $Oxyz$ точки разрыва функции образуют поверхность $x^2+y^2-z^2=0$ – конус. #

Задачи для самостоятельного решения

Найти точки разрыва функций двух переменных:

14. $z=1/((x-1)^2+(y+1)^2)$. **15.** $z=1/\sin x\sin y$.

16. $z=(x+y)/(x^3+y^3)$.

Найти точки разрыва функций трех переменных:

17. $u=1/xyz$. **18.** $u=1\Big/\left(\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}-1\right)$.

19*. Исследовать непрерывность функции при $x=0$, $y=0$:

1) $f(x, y)=x^2y^2/(x^2+y^2)$, $f(0, 0)=0$.

2) $f(x, y)=xy/(x^2+y^2)$, $f(0, 0)=0$.

3) $f(x, y)=\dfrac{x^3y^3}{x^2+y^2}$, $f(0, 0)=0$.

9.4. ЧАСТНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ И ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТЬ ФУНКЦИИ

1°. Пусть $M(x_1,\ldots,x_k,\ldots,x_n)$ – произвольная фиксированная точка из области определения D функции $u=f(x_1, ..., x_n)$ и точка $N(x_1, ..., x_k+\Delta x_k, ..., x_n)\in D$. Если существует предел

$$\lim_{N\to M}\frac{f(N)-f(M)}{|MN|}=\lim_{\Delta x_k\to 0}\frac{f(x_1, ..., x_k+\Delta x_k, ..., x_n)-f(x_1, ..., x_k, ..., x_n)}{\Delta x_k},$$

то он называется *частной производной первого порядка* данной функции по переменной x_k в точке M и обозначается $\dfrac{\partial u}{\partial x_k}$ или $\dfrac{\partial u}{\partial x_k}(M)$, $f'_{x_k}(M)$, или $f'_{x_k}(x_1, ..., x_n)$.

Частные производные вычисляются по правилам дифференцирования функции одной переменной, при этом все переменные, кроме x_k, рассматриваются как постоянные.

2°. *Частными производными второго порядка* функции $u=f(x_1, ..., x_n)$ по соответствующим переменным называются частные производные от ее частных производных первого порядка, они обозначаются:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} = \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right) = f''_{x_k x_k}(x_1, \ldots, x_k, \ldots x_n) = f''_{x_k^2}(M),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_l} = \frac{\partial}{\partial x_l}\left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right) = f''_{x_k x_l}(M) \text{ и т.п.}$$

Аналогично определяются частные производные порядка выше второго.

Теорема 9.2. Если смешанные производные $f''_{x_k x_l}$ и $f''_{x_l x_k}$ непрерывны, то они совпадают: $f''_{x_k x_l} = f''_{x_l x_k}$.

Таким образом, результат многократного дифференцирования функции по различным переменным не зависит от порядка дифференцирования при условии, что возникающие при этом «смешанные» частные производные непрерывны.

Пример 4. Найти частные производные первого и второго порядков от функции $z = \ln(x^2 - y^2)$.

∇ Считая последовательно постоянной y, затем x и применяя правило дифференцирования сложной функции, получим:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{(x^2 - y^2)}(x^2 - y^2)'_x = \frac{2x}{x^2 - y^2}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{(x^2 - y^2)}(x^2 - y^2)'_y = -\frac{2y}{x^2 - y^2}.$$

Дифференцируя вторично, получаем:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{2x}{x^2 - y^2}\right) = 2\,\frac{(x^2 - y^2) - x \cdot 2x}{(x^2 - y^2)^2} = -2\,\frac{x^2 + y^2}{(x^2 - y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{2x}{x^2 - y^2}\right) = 2x\left(-\frac{(-2y)}{(x^2 - y^2)^2}\right) = \frac{4xy}{(x^2 - y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{2y}{x^2 - y^2}\right) = -2y\left(-\frac{2x}{(x^2 - y^2)^2}\right) = \frac{4xy}{(x^2 - y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{2y}{x^2 - y^2}\right) = -2\,\frac{(x^2 - y^2) - y(-2y)}{(x^2 - y^2)^2} = -2\,\frac{x^2 + y^2}{(x^2 - y^2)^2}.\#$$

Задачи для самостоятельного решения

Найти частные производные 1-го и 2-го порядков от заданных функций.

20. $z = x^5 + y^5 - 5x^3y^3$. **21.** $z = xy + y / x$. **22.** а) $z = xe^{-xy}$.

б) $z = (\cos y^2) / x$, в) $z = y^x$.

23. Найти $f'_x(3; 2)$, $f'_y(3; 2)$, $f''_{xx}(3; 2)$, $f''_{xy}(3; 2)$, $f''_{yy}(3; 2)$,

если $f(x, y) = x^3y + xy^2 - 2x + 3y - 1$.

24. Вычислить частные производные второго порядка функции $f(x, y)$ в заданной точке:

1) $f = \ln(x^2 + y)$, $(0;1)$. 2) $f = y\sin(y/x)$, $(2;\pi)$.

3) $f = \operatorname{arctg}(x/y)$, $(1;1)$. 4) $f = (xy)^{x+y}$, $(1;1)$.

25. Вычислить частные производные второго порядка функции $f(x, y, z)$ в заданной точке:

1) $f = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$, $(1;1;1)$. 2) $f = x^{y^z}$, $(e;1;1)$.

9.5. ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТЬ ФУНКЦИИ. ДИФФЕРЕНЦИАЛ ФУНКЦИИ

1°. *Полным приращением* функции $f(x_1, ..., x_n)$ в точке $M(x_1, ..., x_n)$, соответствующим приращениям аргументов $\Delta x_1, \Delta x_2, ..., \Delta x_n$, называется разность

$$\Delta f(x_1, ..., x_n) = f(x_1 + \Delta x_1, ..., x_n + \Delta x_n) - f(x_1, ..., x_n). \qquad (9.1)$$

2°.Функция f называется *дифференцируемой* в точке M, если существуют такие числа $A_1, A_2, ..., A_n$, что всюду в окрестности точки M полное приращение функции можно представить в виде

$$\Delta f(x_1, x_2, ..., x_n) = A_1\Delta x_1 + A_2\Delta x_2 + ... + A_n\Delta x_n + o(\rho),$$

где $\rho = \sqrt{(\Delta x_1)^2 + (\Delta x_2)^2 + ... + (\Delta x_n)^2}$.

Теорема 9.3. (Необходимое условие дифференцируемости функции.) Если функция f дифференцируема во внутренней точке $M(x_1, x_2, ..., x_n) \in D(f)$, то существуют частные производные $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(M_i)$, $i = 1, 2, ..., n$.

Теорема 9.4. (Достаточное условие дифференцируемости функции.) Если частные производные $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$, $i = 1, 2, ..., n$ существуют и непрерывны во внутренней точке $M(x_1, x_2, ..., x_n) \in D(f)$, то функция дифференцируема в M. Для дифференцируемой в точке M функции f полное приращение

$$\Delta f(M) = f'_{x_1}(M)\Delta x_1 + ... + f'_{x_n}(M)\Delta x_n + O(\rho). \qquad (9.2)$$

3°. *Дифференциалом df первого порядка* функции $f(x_1, ..., x_n)$ в точке $M(x_1, x_2 ..., x_n)$ называется главная часть полного приращения (9.2), линейная относительно $\Delta x_1, ..., \Delta x_n$:

$$df(M) = f'_{x_1}(M)\Delta x_1 + ... + f'_{x_n}(M)\Delta x_n. \qquad (9.3)$$

Подставив в (9.2) $f(x_1, ..., x_n) = x_k$, $k = 1, 2, ..., n$, получим $\dfrac{\partial f}{\partial x_l} = \begin{cases} 0, \text{ если } l \neq k, \\ 1, \text{ если } l = k, \end{cases}$ $l = 1,2,\ldots,n$ и $df(x_1, ..., x_n) = \Delta x_k$ или $dx_k = \Delta x_k$, $k = 1, 2, ..., n$. Тогда дифференциал функции f выражается через дифференциалы независимых переменных:

$$df(M) = f'_{x_1}(M)dx_1 + ... + f'_{x_n}(M)dx_n. \qquad (9.4)$$

Функции u и v нескольких переменных подчиняются обычным правилам дифференцирования:

$$d(u+v) = du + dv, \quad d(uv) = vdu + udv,$$
$$d(u / v) = (vdu - udv) / v^2. \qquad (9.5)$$

4°. Если $f(x_1, ..., x_n)$ дважды дифференцируема в точке M, то в этой точке существуют все частные производные второго порядка от f и *дифференциалом 2-го порядка* $d^2 f$ функции $f(x_1, ..., x_n)$ называется дифференциал от ее дифференциала 1-го порядка, рассматриваемого как функция переменных $x_1, ..., x_n$ при фиксированных (т.е. постоянных) $dx_1, ..., dx_n : d^2 f = d(d f)$.

Вообще, если функция f дифференцируема m раз в точке M, то *дифференциал m-го порядка функции f*:

$$d^m f = d(d^{m-1} f), \; m = 2, 3, ... \; . \qquad (9.6)$$

Пример 5. Найти полное приращение и дифференциал функции $f(x, y) = xy^2$ в точке (x, y).

∇ По формуле (9.1) $\Delta f(x, y) = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) = (x+\Delta x)(y+\Delta y)^2 - xy^2 = y^2 \cdot \Delta x + 2xy \cdot \Delta y + x(\Delta y)^2 + 2y\Delta x \Delta y + \Delta x(\Delta y)^2$.

Дифференциал df есть главная часть полного приращения, линейная относительно Δx и Δy: $df(x, y) = y^2 \Delta x + 2xy\Delta y$. #

Пример 6. Найти дифференциал функции $f(x, y, z) = x^2 y^3 / z^4$.

Первый способ. По формуле (9.4):

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2xy^3}{z^4}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{3x^2 y^2}{z^4}, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = -\frac{4x^2 y^3}{z^5},$$

$$df(x, y, z) = \frac{2xy^3}{z^4} dx + 3\frac{3x^2 y^2}{z^4} dy - \frac{4x^2 y^3}{z^5} dz = .$$
$$= xy^2 (2yzdx + 3xzdy - 4xydz) / z^5.$$

Второй способ. Применяем правила дифференцирования (9.5):

$$df(x, y, z) = d\left(x^2y^3\frac{1}{z^4}\right) = \frac{1}{z^4}d(x^2y^3) + x^2y^3d\left(\frac{1}{z^4}\right) =$$
$$= (y^3 2xdx + x^2 3y^2 dy)\,/\,z^4 +$$
$$+x^2y^3(-4dz\,/\,z^5) = xy^2(2yzdx + 3xzdy - 4xydz)\,/\,z^5\,.\ \#$$

Пример 7. Найти дифференциалы 1-го, 2-го и 3-го порядков для функции $f(x, y)$.

∇ По формуле (9.4): $df = f'_x dx + f'_y dy$. По формуле (9.6) при $m = 2$ и $m = 3$, считая dx и dy постоянными, последовательно находим (смешанные частные производные не зависят от порядка дифференцирования):

$$d^2 f = d(df) = d(f'_x dx + f'_y dy) = (f'_x dx + f'_y dy)'_x dx + (f'_x dx + f'_y dy)'_y dy =$$
$$= f''_{xx}(dx)^2 + 2f''_{xy}dxdy + f''_{yy}(dy)^2;$$
$$d^3 f = d(d^2 f) = (f''_{xx}(dx)^2 + 2f''_{xy}dxdy + f''_{yy}(dy)^2)'_x dx + (f''_{xx}(dx)^2 +$$
$$+2f''_{xy}dxdy + f''_{yy}(dy)^2)'_y dy = f'''_{xxx}(dx)^3 + 3f'''_{xxy}(dx)^2dy +$$
$$+3f'''_{xyy}dx(dy)^2 + f'''_{yyy}(dy)^3\ .\#$$

Задачи для самостоятельного решения

Найти полное приращение и дифференциал функции z:

26. а) $z = x^2 - xy + y^2$, если x изменяется от 2 до 2,1, а y – от 1 до 1,2.

б) $z = \lg(x^2 + y^2)$, если x изменяется от 2 до 2,1, а y – от 1 до 0,9.

Найти дифференциал функций:

27. $z = \ln(y + \sqrt{x^2 + y^2})$. **28.** $z = \mathrm{tg}(y^2/x)$. **29.** $z = \ln\cos(x/y)$.

30. Найти $df(1; 2; 1)$, если $f(x, y, z) = z/(x^2 + y^2)$.

Найти дифференциалы 1-го и 2-го порядков.

31. $z = x^3 + 3x^2y - y^3$. **32.** $z = y/x - x/y$. **33.** $z = \sqrt{x^2 + 2xy}$.

34. $z = (x + y)e^{xy}$. **35.** $u = xy + yz + zx$. **36.** $u = e^{xyz}$.

9.6. ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТЬ СЛОЖНЫХ И НЕЯВНЫХ ФУНКЦИЙ

9.6.1. СЛОЖНЫЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ И НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

1°**.** Пусть $u=f(x_1, ..., x_n)$ и, в свою очередь, $x_1=\varphi_1(t), .., x_n = =\varphi_n(t)$.

Теорема 9.5. Если функции $\varphi_1(t), ..., \varphi_n(t)$ дифференцируемы в точке $M(x_1, ..., x_n)=M\left(\varphi_1(t), ..., \varphi_n(t)\right)$, то для производной сложной функции одной переменной $u=f\left(\varphi_1(t), ..., \varphi_n(t)\right)$ справедлива формула

$$u'(t)=f'_{x_1}(M)\varphi'_1(t)+...+f'_{x_n}(M)\varphi'_n(t)$$

или

$$\frac{du}{dt}=\frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt}+\frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{dx_3}{dt}+...+\frac{\partial u}{\partial x_n}\frac{dx_n}{dt}. \tag{9.7}$$

В частности, если t совпадает, например, с переменной x_1, то $x_2=\varphi_2(x_1), ..., x_n=\varphi_n(x_1)$ и «полная» производная функции u по x_1 равна

$$\frac{du}{dx_1}=\frac{\partial u}{\partial x_1}+\frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dx_1}+...+\frac{\partial u}{\partial x_n}\frac{dx_n}{dx_1}. \tag{9.8}$$

2°**.** Пусть $u=f(x_1, ..., x_n)$ и, в свою очередь, $x_1=\varphi_1(t_1, ..., t_m)$, $x_n=\varphi_n(t_1, ..., t_{m)}$.

Теорема 9.6. Если функции $\varphi_1, ..., \varphi_n$ дифференцируемы в точке $N(t_1, ..., t_m)$, а функция f дифференцируема в точке $M(x_1, ..., x_n)=M\left(\varphi_1(N), ..., \varphi_n(N)\right)$, то сложная функция m переменных $u=f\left(\varphi_1(t_1, ..., t_m), ..., \varphi_n(t_1, ..., t_m)\right)$ дифференцируема в точке N и справедливы формулы:

$$\frac{\partial u}{\partial t_l}=\frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_l}+\frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial t_l}+...+\frac{\partial u}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial t_l} \quad (l=1, 2, ..., m), \tag{9.9}$$

при этом частные производные функции u по x_k $(k=1, 2, ..., n)$ вычислены в точке M, а частные производные функций x_k по t_l $(l = 1, 2,\ldots, m)$ вычислены в точке N.

Выражение для дифференциала 1-го порядка сохраняет вид (9.4) (*свойство инвариантности формы первого дифференциала*).

Пример 8. Найти $\frac{du}{dt}$, если $u=xyz$, где $x=t^2+1,\ y=\ln t,\ z=\operatorname{tg} t$.

∇ По формуле (9.7) имеем $\frac{du}{dt}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{dz}{dt}=$

$=yz\cdot 2t+xz\cdot(1/t)+xy\cdot\sec^2 t=$

$=2t\ln t\operatorname{tg} t+(t^2+1)\operatorname{tg} t/t+(t^2+1)\ln t\sec^2 t$. #

Пример 9. Найти производную функции $u(t)=t^t$.

∇ *Первый способ* – применить логарифмическое дифференцирование, как делалось для функции одной переменной.

Второй способ. Функция $u(t)$ есть результат образования сложной функции при подстановке в функцию $f(x,y)=x^y$ вместо x и y двух одинаковых функций переменой t: $x=\varphi(t)=t$, $y=\psi(t)=t$. Тогда по формуле (9.7): $u'(t)=f'_x(x,y)\varphi'(t)+f'_y(x,y)\,\psi'(t)$ получаем $\left(t^t\right)'=\left(x^y\right)'_x\cdot 1+\left(x^y\right)'_y\cdot 1=yx^{y-1}+x^y\ln x=tt^{t-1}+t^t\ln t=$ $=t^t(1+\ln t)$.#

Пример 10. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{dz}{dx}$, если $z=y^x$, где $y=\sin 2x$.

∇ Имеем $\frac{\partial z}{\partial x}=y^x\ln y$. По формуле (9.8) получим $\frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dx}==y^x\ln x+2xy^{x-1}\cos 2x$.#

Пример 11. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, dz, если $z=f(u,v)$, где $u=\ln(x^2-y^2)$, $v=xy^2$.

∇ $z=f(\ln(x^2-y^2),\,xy^2)$ – сложная функция от независимых переменных x и y. Тогда по формулам (9.9) получим:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=f'_u\frac{2x}{x^2-y^2}+f'_v y^2;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}=f'_u\left(-\frac{2y}{x^2-y^2}\right)+f'_v\,2xy;$$

$$dz=\frac{\partial z}{\partial u}du+\frac{\partial z}{\partial v}dv=f'_u du+f'_v dv,$$

$$du=u'_x dx+u'_y dy=\frac{2x}{x^2-y^2}dx-\frac{2y}{x^2-y^2}dy,$$

$$dv=v'_x dx+v'_y dy=y^2dx+2xydy,$$

$$dz=f'_u\left(\frac{2x}{x^2-y^2}dx-\frac{2y}{x^2-y^2}dy\right)+f'_v(y^2dx+2xydy)=$$

$$=\left(\frac{2x}{x^2-y^2}f'_u+y^2f'_v\right)dx+\left(-\frac{2y}{x^2-y^2}f'_u+2xyf'_v\right)dy.\#$$

9.6.2. НЕЯВНЫЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ И НЕСКОЛЬКИХ НЕЗАВИСИМЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

1°. Пусть дифференцируемая в точке x_0 функция $y(x)$ задана неявно уравнением $F(x, y) = 0$ и $y = y(x)$ – решение этого уравнения. Если функция F дифференцируема, то производная функции $y = y(x)$ определяется формулой

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0} = -\frac{F'_x(x_0, y_0)}{F'_y(x_0, y_0)} \tag{9.10}$$

при условии, что $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$, где $y_0 = y(x_0)$, $F(x_0, y_0) \equiv 0$.

2°. Пусть дифференцируемая в точке $M^0(x_1^0, ..., x_n^0)$ функция $u(x_1, ..., x_n)$ задана неявно уравнением $F(x_1, x_2, ..., x_n, u) = 0$ и $u = u(x_1, ..., x_n)$ – решение этого уравнения.

Если F дифференцируема, то частные производные функции $u = u(x_1, ..., x_n)$ в точке M^0 определяются по формулам

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x_k}\right|_{M=M^0} = -\frac{F'_{x_k}(M^0, u^0)}{F'_u(M^0, u^0)} \quad (k = 1, 2, ..., n) \tag{9.11}$$

при условии, что $F'_u(M^0, u^0) \neq 0$, где $u^0 = u(M^0)$, $F(M^0, u^0) \equiv 0$.

Пример 12. Найти $y'(0)$, если $y = 1 - xe^y$.

∇ $F(x, y) \equiv y + xe^y - 1 = 0$ и по формуле (9.10) получаем $y'(x) = -\dfrac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)} = = -\dfrac{e^y}{1 + xe^y}$. В нашем случае $x_0 = 0$. Непосредственной подстановкой убедимся, что точка $N(x_0, y_0) = N(0; 1)$ принадлежит графику функции, т.е. $F(x_0, y_0) = F(0; 1) = (x + xe^y - 1)\Big|_{\substack{x=0\\y=1}} \equiv 0$.

Поэтому $y'(0) = -\dfrac{e^1}{1 + 0 \cdot e^1} = -e$. #

Пример 13. Найти $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}$, если $x^3 + 2y^3 + z^3 - 3xyz - 2y + 3 = 0$.

∇Левую часть данного уравнения обозначим $F(x, y, z)$. По формуле (9.11) получим:

$$\frac{\partial x}{\partial y} = -\frac{F'_x(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)} = -\frac{3x^2 - 3yz}{3z^2 - 3xy} = \frac{x^2 - yz}{xy - z^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)} = -\frac{6y^2 - 3xz - 2}{3(z^2 - xy)}. \#$$

Задачи для самостоятельного решения

37. Найти $\dfrac{dz}{dt}$, если $z = e^{2x-3y}$, где $x = \operatorname{tg} t$, $y = t^2 - 1$.

38. Найти $\dfrac{dz}{dt}$, если $z = x^y$, где $x = \ln t$, $y = \sin t$.

39. Найти $\dfrac{du}{dt}$, если $u = yz/x$, где $x = e^t$, $y = \ln t$, $z = t^2 - 1$.

40. Найти $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{dz}{dx}$, если $z = \ln(e^x + e^y)$, где $y = x + x^3/3$.

41. Найти $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{dz}{dx}$, если $z = \operatorname{arctg} \dfrac{x+1}{y}$, где $y = e^{(x+1)^2}$.

42. Найти z'_x, z'_y, если $z = u^2 \ln v$, где $u = y/x$, $v = x^2 + y^2$.

43. Найти dz, если $z = u^2 v - v^2 u$, где $u = x \sin y$, $v = y \cos x$.

44. Найти z'_x, z'_y, если $z = f(u, v)$, где $u = 2y/(x+y)$, $v = x^2 - 3y$.

45. Найти dz, если $z = f(u, v)$, где $u = \sin(x/y)$, $v = \sqrt{x/y}$.

46 . Найти $\dfrac{dy}{dx}$, если:

а) $x^2 e^{2y} - y^2 e^{2x} = 0$, б) $y \sin x - \cos(x - y) = 0$.

47. Найти $\dfrac{dy}{dx}$, $\dfrac{d^2 y}{dx^2}$, если:

а) $x + y = e^{x-y}$, б) $x - y + \operatorname{arctg} y = 0$.

48. Найти z'_x и z'_y в точке (1; –2; 2), если $z^3 - 4xz + y^2 - 4 = 0$.

49. Найти z'_x и z'_y, если:

а) $z \ln(x + z) - xy/z = 0$, б) $F(x + y + z,\ x^2 + y^2 + z^2) = 0$.

Рекомендация. Ввести $u = x + y + z$, $v = x^2 + y^2 + z^2$.

9.7. ПРИЛОЖЕНИЯ ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ И ДИФФЕРЕНЦИАЛА

9.7.1. ПРИЛОЖЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛА К ПРИБЛИЖЕННЫМ ВЫЧИСЛЕНИЯМ

Для дифференцируемой функции $f(x_1, ..., x_n)$ при достаточно малом $\rho=\sqrt{(\Delta x_1)^2+...+(\Delta x_n)^2}$ из формул (9.1) – (9.3) следует $\Delta f \approx df$ или, что то же самое,

$$f(x_1+\Delta x_1, ..., x_n+\Delta x_n) \approx f(x_1, ..., x_n)+df(x_1, ..., x_n). \qquad (9.12)$$

Пример 14. Вычислить приближенно $\sqrt{(4,05)^2+(3,07)^2}$.

∇ Искомое число будем рассматривать как значение функции $f(x, y)=\sqrt{x^2+y^2}$ при $x=x_0+\Delta x$ и $y=y_0+\Delta y$, если $x_0=4,\ y_0=3,\ \Delta x=0,05,\ \Delta y=0,07$. Точка $M(4; 3)$ выбрана из соображений “близости” ее к точке $N(4,05;\ 3,07)$ и простоты вычисления значений функции f и ее частных производных в точке M. По формуле (9.12) имеем

$$f(x_0+\Delta x,\ y_0+\Delta y) \approx f(x_0, y_0)+f'_x(x_0, y_0)\Delta x+f'_y(x_0, y_0)\Delta y.$$

Находим $f(x_0, y_0)=\sqrt{x^2+y^2}\Big|_{M(4,3)}=5$,

$$f'_x(x_0, y_0)=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\Bigg|_{M(4,3)}=\frac{4}{5}, \qquad f'_y(x_0, y_0)=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\Bigg|_{M(4,3)}=\frac{3}{5}.$$

Следовательно, $\sqrt{(4,05)^2+(3,07)^2} \approx 5+(4\cdot 0,05+3\cdot 0,07)/5=$ $=5+0,08=5,08.$ #

9.7.2. КАСАТЕЛЬНАЯ ПЛОСКОСТЬ И НОРМАЛЬ К ПОВЕРХНОСТИ

1°. *Касательной плоскостью* к поверхности в ее точке M_0 (*точка касания*) называется плоскость, содержащая в себе все касательные к кривым, проведенным на поверхности через эту точку. Уравнение касательной плоскости в точке касания $M_0(x_0, y_0, z_0)$ имеет вид:

а) к поверхности $F(x, y, z) = 0$:

$$F'_x(M_0)(x-x_0)+F'_y(M_0)(y-y_0)+F'_z(M_0)(z-z_0)=0, \qquad (9.13)$$

б) к поверхности $z=f(x, y)$:

$$z-z_0=f'_x(x_0, y_0)(x-x_0)+f'_y(x_0, y_0)(y-y_0).$$

2°. *Нормалью* к поверхности называется прямая, перпендикулярная к касательной плоскости и проходящая через точку касания. Параметрические уравнения нормали в точке касания $M_0(x_0, y_0, z_0)$ имеют вид:

а) к поверхности $F(x, y, z) = 0$:

$$x = x_0 + F'_x(M_0)t,\ y = y_0 + F'_y(M_0)t,\ z = z_0 + F'_z(M_0)t\,; \qquad (9.14)$$

б) к поверхности $z = f(x, y)$:

$$x = x_0 + f'_x(x_0, y_0)t, \qquad y = y_0 + f'_y(x_0, y_0)t, \qquad z = z_0 - t\,.$$

Пример 15. Найти уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $x^2 + y^2 + z^2 - 8x + 4y - 6z - 20 = 0$ в точке $M(2; 4; 6)$.

∇ Обозначив через $F(x, y, z)$ левую часть уравнения поверхности, найдем $F'_x(x, y, z) = 2x - 8$, $F'_y(x, y, z) = 2y + 4$, $F'_z(x, y, z) = 2z - 6$, $F'_x(2; 4; 6) = -4$, $F'_y(2; 4; 6) = 12$, $F'_z(2; 4; 6) = 6$. По формуле (9.13) имеем уравнение касательной плоскости $-4(x-2) + 12(y-4) + 6(z-6) = 0$ или $2x - 6y - 3z + 38 = 0$. По формулам (9.14) находим уравнения нормали в параметрической форме $x = 2 - 4t,\ y = 4 + 12t,\ z = 6 + 6t$, отсюда можно получить канонические уравнения нормали $\dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y-4}{-6} = \dfrac{z-6}{-3}$. #

9.7.3. ЭКСТРЕМУМ ФУНКЦИИ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

Пусть $M_0(x_0, y_0)$ – внутренняя точка области определения функции $f(x, y)$. Точка M_0 называется точкой *минимума* (*максимума*) функции f, если существует такая окрестность $\mathrm{V}(M_0)$ точки M_0, что для любой точки $M(x, y) \in \mathrm{V}(M_0)$ выполняется $f(M) \ge f(M_0)$ $\big(f(M) \le f(M_0)\big)$.

Точка M_0 называется точкой *экстремума* функции f, если она является точкой минимума или точкой максимума этой функции.

Теорема 9.7. (Необходимое условие экстремума.) Если $M_0(x_0, y_0)$ – точка экстремума функции, то каждая частная производная $f'_x(M_0)$ и $f'_y(M_0)$ либо равна нулю, либо не существует.

Точка M_0 называется *критической* точкой функции f, если в ней выполняются необходимые условия экстремума функции f.

Теорема 9.8. (Достаточные условия экстремума.) Пусть: а) M_0 – критическая точка функции f; б) существуют и непрерывны производные $f'_x,\ f'_y,\ f''_{xx},\ f''_{xy},\ f''_{yy}$ в точках $M_0(x_0, y_0)$ и $M(x, y) \in \mathrm{V}(M_0)$;

в) $\Delta = f''_{xx}(M_0) f''_{yy}(M_0) - \left(f''_{xy}(M_0) \right)^2$. Тогда: 1) если $\Delta > 0$ и $f''_{xx}(M_0) > 0$ $\left(f''_{yy}(M_0) > 0 \right)$, то M_0 – точка минимума функции f; 2) если $\Delta > 0$ и $f''_{xx}(M_0) < 0$ $\left(f''_{yy}(M_0) < 0 \right)$, то M_0 – точка максимума функции f; 3) если $\Delta < 0$, то M_0 не является точкой экстремума; 4) если $\Delta = 0$, то требуется дополнительное исследование.

Отметим, что в случае $\Delta < 0$ существуют такие две прямые, проходящие через точку M_0, что при движении точки M по первой из этих прямых значения функции $f(M)$ сначала уменьшаются, затем возрастают. При движении точки M по другой прямой значения функции сначала возрастают, в точке M_0 достигают максимума, затем уменьшаются. В этом случае M_0 называют *седловой точкой*.

Пример 16. Исследовать на экстремум функцию $z = x^3 + y^3 - 3xy$.

∇ Из необходимого условия экстремума функции (теорема 9.7) имеем систему $\begin{cases} z'_x = 3x^2 - 3y = 0, \\ z'_y = 3y^2 - 3x = 0, \end{cases}$ решая которую получаем критические точки $M_1(0;\,0)$, $M_2(1;\,1)$. Определим характер критических точек по достаточным условиям экстремума (теорема 9.8). Находим $z''_{xx}(x,\,y) = 6x$, $z''_{xy}(x,\,y) = -3$, $z''_{yy}(x,\,y) = 6y$. В точке $M_1(0;\,0)$: $z''_{xx}(M_1) = 0$, $z''_{xy}(M_1) = -3$, $z''_{yy}(M_1) = 0$, $\Delta = z_{xx} z_{yy} - (z_{xy})^2 \Big|_{M_1(0;0)} =$ $= -9 < 0$. Следовательно, $M_1(0;\,0)$ – седловая точка. В точке $M_2(1;\,1)$: $z''_{xx}(M_2) = 6$, $z''_{xy}(M_2) = -3$, $z''_{yy}(M_2) = 6$, $\Delta = 6 \cdot 6 - (-3)^2 = 27 > 0$, поэтому $M_2(1;\,1)$ – точка минимума функции z; $z_{\min} = z(M_2) = -1$. #

9.7.4. НАИБОЛЬШЕЕ И НАИМЕНЬШЕЕ ЗНАЧЕНИЯ ФУНКЦИИ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ В ЗАМКНУТОЙ ОБЛАСТИ

В разделе 9.3 была сформулирована теорема Вейерштрасса (теорема 9.1), согласно которой всякая функция $f(x,\,y)$, непрерывная в замкнутой области U, ограниченной ломаной $\Gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \ldots \cup \gamma_m$, достигает в этой области своих наибольшего – наименьшего значений, для отыскания которых пользуемся следующим алгоритмом.

1. Находим критические точки, принадлежащие U.

2. На каждом звене γ_k ломаной Γ сводим функцию f к функции f_k одной переменной и выделяем на γ_k критические точки функции f_k.

3. Список точек, полученный в пунктах 1 и 2 дополняем вершинами ломаной Г.

4. Вычисляем значения функции в точках полученного списка и выбираем среди них наибольшее и наименьшее, которые и будут искомыми.

Пример 17. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x, y) = x^2 + 4xy + 5y^2 - 13x$ в области D, заданной неравенствами $y^2 \le x \le 4$.

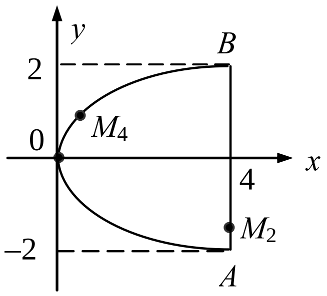


Рис. 9.3

∇ Область D ограничена частью AOB параболы $x = y^2$ и отрезком AB прямой $x = 4$ (рис. 9.3).

1. Находим критические точки из необходимого условия экстремума функции: $\begin{cases} f'_x = 2x + 4y - 13 = 0, \\ f'_y = 4x + 10y = 0. \end{cases}$ Решение системы: $x = 32{,}5$, $y = -13$. Найденная критическая точка $M_1(32,5; -13)$ не принадлежит D.

2. Исследуем функцию на границе. На отрезке $AB : \{x = 4, y \in [-2; 2]\}$ функция $f(x, y)$ сводится к функции одной переменной $f_1(y) = f(4, y) = 5y^2 + 16y - 36,\ \ y \in [-2; 2]$. Находим критические точки функции $f_1(y): f_1'(y) = 10y + 16 = 0,\ \ y_{1\text{кр}} = -1{,}6$; точка $M_2(4; -1,6) \in AB$.

На линии $AOB : \left\{x = y^2,\ y \in [-2; 2]\right\}$ функция $f(x, y)$ сводится к функции $f_2(y) = f(y^2, y) = y^4 + 4y^3 - 8y^2$, $y \in [-2; 2]$. Находим критические точки функции $f_2(y): f_2'(y) = 4y^3 + 12y^2 - 16y = 0$, $y(y^2 + 3y - 4) = 0$, $(y_{2\text{кр}} = 0) \in [-2; 2]$, $(y_{3\text{кр}} = 1) \in [-2; 2]$, $(y_{4\text{кр}} = -4) \notin [-2, 2]$; точки $M_3(0; 0)$, $M_4(1; 1)$ принадлежат линии AOB (точка M_3 совпадает с точкой $O(0; 0)$).

3. Вершины ломаной в точках $A(4; -2)$ и $B(4; 2)$.

4. Вычисляем значения функции f в точках $M_2 - M_4$, A, $B : f(M_2) = -48,8$, $f(M_3) = 0$, $f(M_4) = -3$, $f(A) = -48$, $f(B) = 16$. Итак, $f_{\text{наиб}} = f(4; 2) = 16$, $f_{\text{наим}} = f(4; -1,6) = -48,8$. #

9.7.5. ФОРМУЛА ТЕЙЛОРА ДЛЯ ФУНКЦИИ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

Если функция $f(x, y)$ дифференцируема $n + 1$ раз в некоторой окрестности $U(M_0)$ точки $M_0(x_0, y_0)$, то для всякой точки

$M(x, y) \in U(M_0)$ справедлива *формула Тейлора*

$$f(M) = f(M_0) + \frac{1}{1!} df(M_0) + \frac{1}{2!} d^2 f(M_0) + \ldots + \frac{1}{n!} d^n f(M_0) + R_n(\Delta x, \Delta y)$$

или, записав несколько членов в развернутом виде,

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + \frac{1}{1!}(f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y) +$$

$$+\frac{1}{2!}\left(f''_{xx}(x_0, y_0)(\Delta x)^2 + 2f''_{xy}(x_0, y_0)\Delta x\Delta y + f''_{yy}(x_0, y_0)(\Delta y)^2 \right) +$$

$$+\frac{1}{3!}\left(f'''_{xxx}(x_0, y_0)(\Delta x)^3 + 3f'''_{xxy}(x_0, y_0)(\Delta x)^2\Delta x + \right.$$

$$\left. +3f'''_{xyy}(x_0, y_0)\Delta x(\Delta y)^2 + f'''_{yyy}(x_0, y_0)(\Delta y)^3 \right) + \ldots + R_n(\Delta x, \Delta y). \quad (9.15)$$

Здесь $\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = y - y_0$, $R_n(\Delta x, \Delta y)$ – остаточный член в формуле Тейлора порядка *n*. При этом $R_n(\Delta x, \Delta y) = \alpha_n(\Delta x, \Delta y)\left((\Delta x)^2 + (\Delta y)^2\right)^{n/2}$, где α_n – бесконечно малая функция при $\Delta x \to 0$ и $\Delta y \to 0$, вид которой зависит от функции f и точки $M(x, y)$. *В форме Пеано* $R_n(\Delta x, \Delta y) = o(\rho^n)$, где $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$. При $x_0 = y_0 = 0$ формула (9.15) называется *формулой Маклорена.*

Пример 18. Функцию $f(x, y) = x^3 - 5x^2 - xy + y^2 + 10x + 5y - 4$ разложить по формуле Тейлора в окрестности точки (2; –1).

∇ Имеем $f(2; -1) = 2$. Вычислим последовательно частные производные данной функции:

$$f'_x(x, y) = 3x^2 - 10x - y + 10, \quad f'_y(x, y) = -x + 2y + 5,$$

$$f''_{xx}(x, y) = 6x - 10, \quad f''_{xy}(x, y) = -1, \quad f''_{yy}(x, y) = 2, \quad f'''_{xxx}(x, y) = 6.$$

Все последующие производные тождественно равны нулю. Значения производных в точке (2; –1): $f'_x(2; -1) = 3$, $f'_y(2; -1) = 1$, $f''_{xx}(2; -1) = 2$, $f''_{xy}(2; -1) = -1$, $f''_{yy}(2; -1) = 2$, $f'''_{xxx}(2; -1) = 6$. По формуле (9.15) получаем искомое разложение

$$f(x, y) = 2 + 3(x-2) + (y+1) + (x-2)^2 - (x-2)(y+1) + (y+1)^2 + (x-2)^3 .\#$$

Пример 19. Функцию $f(x, y) = \operatorname{arctg}(y/x)$ разложить по формуле Тейлора в окрестности точки (1; 1) до членов второго порядка включительно.

∇ Имеем $f(1; 1) = \operatorname{arctg} 1 = \pi/4$. В соответствии с формулой (9.15) вычислим производные 1-го и 2-го порядков данной функции и их значения в точке (1; 1).

$$f'_x = -y/(x^2+y^2),\ \ f'_y = x/(x^2+y^2),\ \ f''_{xx} = 2xy/(x^2+y^2)^2,$$

$$f''_{xy} = 2(y^2-x^2)/(x^2+y^2)^2,\quad f''_y = -2xy/(x^2+y^2)^2,\quad f'_x(1;\,1) = -1/2,$$

$$f'_y(1;\,1) = 1/2,\quad f''_{xx}(1;\,1) = 1/2,\ \ f''_{xy}(1;\,1) = 0,\quad f''_{yy}(1;\,1) = -1/2.$$

По формуле (9.15) имеем

$$\operatorname{arctg}(y/x) = \pi/4-(x-1)/2+(y-1)/2+(x-1)^2/4-(y-1)^2/4+o(\rho^2),$$

где $\rho = \sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}$. #

Задачи для самостоятельного решения

Вычислить приближенно:

50. $(2,01)^{3,03}$. **51.** $\sqrt{(1,02)^3+(1,97)^3}$. **52.** $\sin 28^\circ;\ \cos 61^\circ$.

53. $\ln(\sqrt[3]{1,03}+\sqrt[4]{0,98}-1)$.

54. Цилиндрический стакан имеет внутренние размеры: радиус основания R = 2,5 м, высоту H = 4 м и толщину стенок l = 1 дм. Найти приближенно объем материала, затраченного на изготовление стакана.

55. В усеченном конусе радиусы оснований R = 20 см, r = 10 см, высота h = 30 см. Как приближенно изменится объем конуса, если R увеличить на 2 мм, r – на 3 мм и h уменьшить на 1 мм?

56. Найти уравнения касательной плоскости и нормали к следующим поверхностям в указанных точках:

а) $z = \sin x \cos y$ в точке $(\pi/4;\ \pi/4;\ 1/2)$;

б) $z = e^{x\cos y}$ в точке $(1;\ \pi;\ 1/e)$;

в) $x(y+z)(xy-z)+8=0$ в точке (2; 1; 3);

г) $2^{x/z}+2^{y/z}=8$ в точке (2; 2; 1);

д) $z^2+4z+x^2=0$ в точках пересечения с осью Oz.

57. Найти углы, которые образует нормаль к поверхности $z = \operatorname{arctg}(x/y)$ в точке $(1;\,1;\,\pi/4)$ с осями координат.

Найти экстремумы функций двух переменных:

58. $z = x^2+xy+y^2-3x-6y$.

59. $z = xy^2(1-x-y)\quad (x>0,\ y>0)$.

60. $z = xy+50/x+20/y\quad (x>0,\ y>0)$.

61. $z = x^3+3xy^2-15x-12y$.

62. $z = (2x^2+y^2)e^{-(x^2+y^2)}$.

63. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2+y^2-xy-x-y$ в области $x \ge 0,\ y \ge 0,\ x+y \le 3$.

64. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = xy$ в области $x^2 + y^2 \le 1$.

65. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = e^{-(x^2+y^2)}(2x^2 + 3y^2)$ в круге $x^2 + y^2 \le 4$.

66. Определить длины сторон прямоугольного параллелепипеда наибольшего объема, вписанного в прямой круговой конус с радиусом основания R и высотой H.

67. Определить наружные размеры закрытого ящика с заданной толщиной стенок δ и внутренней емкостью V так, чтобы на его изготовление было затрачено наименьшее количество материала.

68. Функцию $f(x, y) = x^3 - 2y^3 + 3xy$ разложить по формуле Тейлора в окрестности точки (2; 1).

69. Разложить по формуле Маклорена до членов 3-го порядка включительно функцию $f(x, y) = e^y \cos x$.

70. Разложить по формуле Тейлора в окрестности точки (1; 1) до членов 3-го порядка включительно функцию $f(x,y) = y/x$.

71. Разложить по формуле Тейлора в окрестности точки (1; 1) до членов 2-го порядка включительно неявную функцию $z(x, y)$, определяемую уравнением $z^3 + 3yz - 4x = 0$, если $z(1; 1) = 1$.

ОТВЕТЫ К ЗАДАЧАМ ГЛАВЫ 9

1. $x^2 / a^2 + y^2 / b^2 \le 1$. **2.** $y^2 > 4x - 8$. **3.** $x + y > 0,\ x - y > 0$ – внутренняя часть правого вертикального угла, образованного биссектрисами координатных углов. **4.** $1 - x \le y \le 1 + x$ $(x > 0)$, $1 + x \le y < 1 - x$ $(x < 0)$ (при $x = 0$ функция не определена).

5. $x \ge 0,\ y \ge 0,\ x^2 \ge y$. **6.** Вся плоскость за исключением прямых $x + y = n$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. **7.** $x > 0$; $2\pi n < y < 2(n+1)\pi$ (n – целое число). **8.** Часть пространства, заключенная между сферами $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ и $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, включая поверхность внешней сферы и исключая поверхность внутренней сферы.

9. 0. **10.** 0. **11.** 0. **12**. а) 1) 1, 2) –1, 3) не существует; б) 1) 0, 2) 0, 3) не существует; в) 1) 0, 2) не существует, 3) 0; г) 1) 0, 2) 1, 3) не существует; **13**. а) 1) 0, 2) 1, 3) 0; б) 1) $\sqrt{3}/2$, 2) 0, 3) не существует; в) 1) 0, 2) 0, 3) 0. **14.** (1; –1). **15.** Линии разрыва – прямые $x = k\pi$ и $y = m\pi$, где $k, m \in Z$. **16**. $O(0; 0)$ – точка бесконечного разрыва; точки прямой $x + y = 0$ $(x \ne 0)$ – устранимые точки разрыва. **17.** Поверхности разрыва – координатные плоскости $x = 0,\ y = 0,\ z = 0$. **18**. Поверхность разрыва – эллипсоид $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$.

19. 1) непрерывна; 2) разрывна; непрерывна по x и y в отдельности; 3) непрерывна. Перейти к полярным координатам.

20. $z'_x = 5x^4 - 15x^2y^3$, $z'_y = 5y^4 - 15x^3y^2$, $z''_{xx} = 20x^3 - 30xy^3$, $z''_{xy} = -45x^2y^2$, $z''_{yy} = 20y^3 - 30x^3y$. **21**. $z'_x = y - y/x^2$, $z'_y = x + 1/x$, $z''_{xx} = 2y/x^3$, $z''_{xy} = 1 - 1/x^2$, $z''_{yy} = 0$.

22. а) $z'_x = (1-xy)e^{-xy}$, $z'_y = -x^2e^{-xy}$, $z''_{xx} = y(xy-2)e^{-xy}$, $z''_{xy} = x(xy-2)e^{-xy}$, $z''_{yy} = x^3e^{-xy}$;

б) $z'_x = -(\cos y^2)/x^2$, $z'_y = -2(y\sin y^2)/x$, $z''_{xx} = 2(\cos y^2)/x^3$, $z''_{xy} = 2(y\sin y^2)/x^2$, $z''_{yy} = -(2\sin y^2 + 4y^2\cos y^2)/x$;

в) $z'_x = y^x \ln y$, $z'_y = xy^{x-1}$, $z''_{xx} = y^x \ln^2 y$, $z''_{xy} = y^{x-1}(x\ln y + 1)$, $z''_{yy} = x(x-1)y^{x-2}$.

23. $f'_x(3;\,2) = 56$, $f'_y(3;\,2) = 42$, $f''_{xx}(3;\,2) = 36$, $f''_{xy}(3;\,2) = 31$, $f''_{yy}(3;\,2) = 6$.

24. 1) $f''_{xx} = 2$, $f''_{xy} = 0$, $f''_{yy} = -1$. 2) $f''_{xx} = -\pi^3/16$, $f''_{xy} = \pi^2/8$, $f''_{yy} = -\pi/4$. 3) $f''_{xx} = -1/2$, $f''_{xy} = 0$, $f''_{yy} = 1/2$. 4) $f''_{xx} = f''_{yy} = 4$, $f''_{xy} = 6$.

25. $f''_{xx} = f''_{yy} = f''_{zz} = 2/9$, $f''_{xy} = f''_{xz} = f''_{yz} = -4/9$

2) $f''_{xx} = f''_{zz} = f''_{xy} = 0$, $f''_{yy} = f''_{yz} = e$, $f''_{xy} = 2$.

26. а) $\Delta = 0{,}33$, $dz = 0{,}3$; б) $\Delta z = 0{,}0187$, $dz = 0{,}0174$.

27. $dz = (x^2+y^2)^{-1/2}(y+\sqrt{x^2+y^2})^{-1}xdx + (x^2+y^2)^{-1/2}dy$.

28. $dz = x^{-2}\cos^{-2}(y^2/x)y(2xdy - ydx).$

29. $dz = y^{-2}\mathrm{tg}(x/y)(xdy - ydx)$.

30. $df(1;\ 2;\ 1) = \big(5dz - 2(dx+2dy)\big)/25$.

31. $dz = 3x(x+2y)dx + 3(x^2 - y^2)dy,$

$d^2z = 6\Big(\big(x+y\big)\big(dx\big)^2 + 2xdxdy - y(dy)^2\Big).$

32. $dz = (1/x^2 + 1/y^2)(xdy - ydx),$

$d^2z = 2\Big(y(dx)^2/x^3 + (1/y^2 - 1/x^2)dxdy - x(dy)^2/y^2\Big).$

33. $dz = (x^2+2xy)^{-1/2}((x+y)dx + xdy)$,

$d^2z = (x^2+2xy)^{-3/2}\left(-y^2(dx)^2 + 2xydxdy - x^2(dy)^2\right).$

34. $dz = e^{xy}\left((y^2+xy+1)dx+(x^2+xy+1)dy\right)$,

$d^2z = e^{xy}\left(y(y^2+xy+2)(dx)^2+\right.$

$\left.+2(x+y)(xy+2)dxdy+x(x^2+xy+2)(dy)^2\right)$.

35. $du=(y+z)dx+(x+z)dy+(x+y)dz$, $d^2u=2(dxdy+dydz+dxdz)$.

36. $du=e^{xyz}(yzdx+zxdy+xydz)$,

$d^2u=e^{xyz}\left((yzdx+xzdy+xydz)^2+2(zdxdy+xdydz+ydzdx)\right)$.

37. $z'(t)=e^{2x-3y}\left(2\sec^2 t-6t\right)$.

38. $dz/dt=x^y\left(y/tx+(\ln x)\cos t\right)$.

39. $dz/dt=\left(x(z+2yt^2)-yzte^t\right)/tx^2$.

40. $z'_x=e^x/(e^x+e^y)$, $dz/dx=\left(e^x+e^y(x^2+1)\right)/(e^x+e^y)$.

41. $z'_x=y/\left(y^2+(x+1)^2\right)$, $dz/dx=y\left(1-2(x+1)^2\right)/\left(y^2+(x+1)^2\right)$.

42. $z'_x=2u\left(ux/v-(y\ln v)/x^2\right)$, $z'_y=2u\left((\ln v)/x+uy/v\right)$.

43. $dz=\left((2uv-v^2)\sin y-(u^2-2uv)y\sin x\right)dx+$

$+\left((2uv-v^2)x\cos y+(u^2-2uv)\cos x\right)dy$.

44. $z'_x=2xf'_v(u,v)-2yf'_u(u,v)/(x+y)^2$,

$z'_y=2xf'_u(u,v)/(x+y)^2-3f'_v(u,v)$.

45. $dz=y^{-2}(\cos(x/y)f'_u(u,v)+\sqrt{y/x}\,f'_v(u,v)/2)(ydx-xdy)$.

46. а) $y'=(y^2e^{2x}-xe^{2y})/(x^2e^{2y}-ye^{2x})$;

б) $y'=(y\cos x+\sin(x-y))/(\sin(x-y)-\sin x)$.

47. а) $y'=(x+y-1)/(x+y+1)$, $y''=4(x+y)/(x+y+1)^2$;

б) $y'=(1+y^2)/y^2$, $y''=2(1+y^2)/y^5$.

48. $z'_x=1$, $z'_y=1/2$. **49.** а) $z'_x=\left(yz(z+x)-z^3\right)/\left(z^3+2xy(x+z)\right)$,

$z'_y=xz(x+z)/\left(z^3+2xy(x+z)\right)$;

б) $z'_x=-\left(F'_u(u,v)+2xF'_v(u,v)\right)/\left(F'_u(u,v)+2zF'_v(u,v)\right)$,

$z'_y=-\left(F'_u(u,v)+2yF'_v(u,v)\right)/\left(F'_u(u,v)+2zF'_v(u,v)\right)$.

50. 8,29. **51.** 2,95. **52.** 0,227. **53.** 0,005. **54.** 8,2 м^3.

55. Увеличится на 617,5 см^3.

56. а) $x-y-2z+1=0$; $x=\pi/4+t$, $y=\pi/4-t$, $z=1/2-2t$;

б) $x+ez-2=0$; $x=1+t$, $y=\pi$, $z=et+1/e$;

в) $2x+7y-5z+4=0$; $x=2+2t$, $y=1+7t$, $z=3-5t$;

г) $x+y-4z=0$; $x=2+t$, $y=2+t$, $z=1-4t$;

д) в точке (0; 0; 0): $z=0$; $x=0$, $y=0$, $z=t$. В точке (0; 0; –4):

$z=-4$; $x=0$, $y=0$, $z=-4+t$.

57. $\cos\alpha=1/\sqrt{6}$, $\cos\beta=-1/\sqrt{6}$, $\cos\gamma=-2/\sqrt{6}$.

58. $z_{\min}=-9$ при $x=0$, $y=3$. **59.** $z_{\max}=1/64$ при $x=1/4$, $y=1/2$.

60. $z_{\min}=30$ при $x=5$, $y=2$. **61.** $z_{\min}=-28$ при $x=2$, $y=1$;
$z_{\max}=28$ при $x=-2$, $y=1$. В критических точках (1; 2), (–1; –2) экстремумов нет. **62.** $z_{\min}=0$ при $x=y=0$; $z_{\max}=2e^{-1}$ при $x=\pm1$, $y=0$. В критических точках (0; ±1) экстремумов нет.

63. $z_{\text{наиб}}=6$ в точках (3; 0) и (0; 3); $z_{\text{наим}}=-1$ в точке (1; 1).

64. $z_{\text{наиб}}=1/2$ в точках $(1/\sqrt{2};\ 1/\sqrt{2})$ и $(-1/\sqrt{2};\ -1/\sqrt{2})$;
$z_{\text{наим}}=-1/2$ в точках $(1/\sqrt{2};-1/\sqrt{2})$ и $(-1/\sqrt{2};\ 1/\sqrt{2})$.

65. $z_{\text{наим}}=0$ в точке (0; 0); $z_{\text{наиб}}=3/e$ в точках (0; 1) и (0; -1).

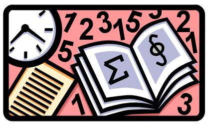
66. $2\sqrt{2}R/3,\ 2\sqrt{2}R/3,\ H/3$. **67.** $x=y=z=\sqrt[3]{V}+2\delta$.

68. $f(x,\ y)=12+15(x-2)+6(x-2)^2+3(x-2)(y-1)-6(y-1)^2+$
$+(x-2)^3-2(y-1)^3$.

69. $f(x,y)=1+y+(y^2-x^2)/2!+(y^3-3x^2y)/3!+o(\rho^2)$,
где $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$.

70. $f(x,\ y)=1-(x-1)+(y-1)+(x-1)^2-(x-1)(y-1)-(x-1)^3+$
$+(x-1)^2(y-1)+o(\rho^3)$, где $\rho=\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}$.

71. $z=1+2(x-1)/3+(y-1)/2-2(x-1)^2/9-(y-1)^2/8+o(\rho^2)$,
где $\rho=\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}$.



Г Л А В А 10

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

10.1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Обыкновенным дифференциальным уравнением (ДУ) называется равенство, содержащее независимую действительную переменную x, неизвестную действительную функцию $y = y(x)$ и ее производные $y', y'',..., y^{(n)}$:

$$F(x, y, y', y'',..., y^{(n)}) = 0; \tag{10.1}$$

функция F – известная действительная функция от n+2 переменных. Уравнение (10.1) называется уравнением в общем виде.

Порядком уравнения называется порядок старшей производной, входящей в уравнение.

Уравнение, разрешенное относительно старшей входящей в него производной

$$y^{(n)} = f(x, y, y',..., y^{(n-1)}), \tag{10.2}$$

называется уравнением n-го порядка *в нормальной форме.*

Решением уравнения (10.1) [или (10.2)] на интервале (a,b) называется функция $y = \varphi(x)$, обращающая это уравнение в тождество при $x \in (a,b)$. График решения на плоскости Оxy называется *интегральной кривой.*

Процесс нахождения решений называется *интегрированием* уравнения.

З а м е ч а н и е. Если искомая функция есть функция нескольких независимых переменных, дифференциальное уравнение называется уравнением в частных производных. Здесь рассматриваются только обыкновенные дифференциальные уравнения.

10.2. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Отметим следующие формы записи уравнения первого порядка:

$$F(x, y, y') = 0 \tag{10.3}$$

– уравнение первого порядка в общем виде;

$$y' = f(x, y) \qquad (10.4)$$

– в нормальной форме;

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \qquad (10.5)$$

– в дифференциальной форме.

Уравнение (10.4) может быть записано в форме (10.5) и наоборот, посредством применения формулы $y' = \dfrac{dy}{dx}$.

Ниже излагаются методы решения уравнений (10.4) и (10.5). Наряду с уравнением (10.4) рассматривается «перевернутое» уравнение

$$x' = \frac{1}{f(x, y)} \quad . \qquad (10.4')$$

Под *областью определения* D *уравнения* (10.4) понимают объединение областей определения функций f и $\dfrac{1}{f}$; под областью определения уравнения (10.5) понимают пересечение областей определения функций M и N; D есть подмножество плоскости Oxy.

Пример. Область определения уравнения $y' = x^{-1}$ содержит прямую $x = 0$ (перевернутое уравнение: $x' = x$), D есть вся плоскость Oxy.

Геометрический смысл уравнения (10.4) заключается в задании в каждой точке области определения направления касательной к интегральной кривой. Дифференциальное уравнение (10.4) задает на области определения D *поле направлений*. В точках, где $\dfrac{1}{f(x,y)} = 0$, т.е. $y' = \infty$, заданное направление перпендикулярно оси Ox.

Задачей Коши для дифференциального уравнения I порядка называют задачу нахождения решения $y = \varphi(x)$, удовлетворяющего начальному условию $y(x_0) = y_0$. Геометрически это означает, что ищется интегральная кривая, проходящая через заданную точку $M_0(x_0, y_0)$ области определения уравнения.

Теорема существования и единственности решения задачи Коши. Пусть в (10.4) функция $f(x, y)$ и ее частная производная $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ непрерывны в области D плоскости Oxy, содержащей точку $M_0(x_0, y_0)$. При этих условиях задача Коши $\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ имеет решение и притом единственное на некотором интервале $(x_0 - h, x_0 + h)$.

З а м е ч а н и е 1. Имеются и другие достаточные условия существования решения и его единственности.

Пусть в области D плоскости Oxy выполнены условия теоремы существования и единственности решения задачи Коши.

Функция

$$y = \varphi(x,\ C)\,, \tag{10.6}$$

определенная в некоторой области изменения переменных x и C и имеющая непрерывную частную производную по x, называется *общим решением* уравнения (10.4) в области D, если:1) $\forall C = \text{const}$ $y = \varphi(x, C)$ – решение уравнения на интервале оси Ox, для точек которого $(x; \varphi(x, C)) \in D$; 2) какие бы начальные условия $y(x_0) = y_0$ ни задать, $(x_0, y_0) \in D, \exists C$ такое, что эти начальные условия будут удовлетворены функцией вида $y = \varphi(x, C)$ (другими словами, уравнение $y_0 = \varphi(x_0,\ C)$ разрешимо относительно C).

З а м е ч а н и е 2. Если общее решение уравнения (10.4) задано в неявном виде

$$\varphi(x,\ y,\ C) = 0\,, \tag{10.7}$$

то оно называется *общим интегралом* этого уравнения в области D.

Можно сказать, что общий интеграл при различных C определяет в области D те же кривые, что и дифференциальное уравнение (т.е. интегральные кривые).

Переменную C, входящую в общее решение или в общий интеграл уравнения, называют *произвольной постоянной.*

Решение, в каждой точке которого сохраняется единственность решения задачи Коши, называется *частным решением*. Решения, получаемые из общего решения, – частные до выхода их на границу области D.

Решение, в каждой точке которого нарушается единственность решения задачи Коши, называется *особым решением*. График особого решения может проходить по границе области D, в которой выполняются условия существования и единственности решения.

Особое решение обычно можно обнаружить в процессе построения общего решения данного дифференциального уравнения. Это те интегральные кривые, которые могут быть утеряны при преобразовании данного уравнения в процессе решения.

З а м е ч а н и е 3. Кроме указанных выше решений дифференциальное уравнение может иметь решения, которые не являются ни частными, ни особыми. Например, такими решениями будут решения, склеенные из «отрезков» частных и особых решений.

З а м е ч а н и е 4. Если общее решение (общий интеграл) представлено в виде неопределенных интегралов от элементарных функций, то говорят, что уравнение решено в квадратурах.

Пример. Показать, что функция $y = Cx^3$ является решением дифференциального уравнения $xy' - 3y = 0$ на интервале $(-\infty, \infty)$.

Найти частное решение, удовлетворяющее условию $y(1)=1$ (найти интегральную кривую, проходящую через точку $M_0(1;\ 1)$).

∇ Производная $y'=3Cx^2$. Подставляя y и y' в уравнение, получаем тождество $3Cx^3-3Cx^3\equiv 0$. Это означает, что функция $y=Cx^3$ является решением данного уравнения. Положив в нем $x=1,\ y=1$, найдем значение параметра C: $1=C\cdot 1^3 \Rightarrow C=1$. Подставив $C = 1$ в решение, получим частное решение $y=x^3$: интегральной кривой, проходящей через точку $M_0(1;\ 1)$ является кубическая парабола $y=x^3$. #

10.3. УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА В НОРМАЛЬНОЙ ИЛИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ФОРМАХ, РЕШАЕМЫЕ В КВАДРАТУРАХ

10.3.1. УРАВНЕНИЯ С РАЗДЕЛЯЮЩИМИСЯ ПЕРЕМЕННЫМИ

Уравнение (10.4) или (10.5) называется *уравнением с разделяющимися переменными*, если функция $f(x,y)$ или коэффициенты $M(x,y)$, $N(x,y)$ могут быть разложены на множители, каждый из которых зависит только от одной переменной: $f(x,y)=f_1(x)\cdot f_2(y)$ или $M(x,y)=M_1(x)\cdot M_2(y)$, $N(x,y)=N_1(x)\cdot N_2(y)$. Путем деления на $f_2(y)$ и на $M_2(y)N_1(x)$ эти уравнения приводятся соответственно к виду

$$f_1(x)dx=\frac{1}{f_2(y)}dy,\quad \frac{M_1(x)}{N_1(x)}dx=-\frac{N_2(y)}{M_2(y)}dy \tag{10.8}$$

– *к уравнениям с разделенными переменными*. При этом уравнения (10.4) и (10.5) имеют также решения $y=y_0$ и $x=x_0$, если y_0, x_0 – корни знаменателей $f_2(y)$ или $M_2(y)$, $N_1(x)$.

Теорема. Общим интегралом дифференциального уравнения с разделенными переменными

$$X(x)dx+Y(y)dy=0 \tag{10.9}$$

является

$$\int X(x)dx+\int Y(y)dy=C, \tag{10.10}$$

или

$$\int_{x_0}^{x} X(x)dx+\int_{y_0}^{y} Y(y)dy=C. \tag{10.11}$$

Особых решений нет.

Пример 1. Решить уравнение $x^2y^2y'+1=y$.

∇ Приводим уравнение к виду (10.8). Имеем: $x^2y^2\dfrac{dy}{dx}=y-1$; $x^2y^2dy=(y-1)dx$. Делим обе части уравнения на $x^2(y-1)$: $\dfrac{y^2}{y-1}dy=$ $=\dfrac{dx}{x^2}$ – приходим к уравнению с разделенными переменными. Интегрируем обе части уравнения [применяем формулу (10.10)]: $\displaystyle\int\frac{y^2}{y-1}dy=\int\frac{dx}{x^2}+C$; $\dfrac{y^2}{2}+y+\ln|y-1|=-\dfrac{1}{x}+C$. При делении на $x^2(y-1)$ могли быть потеряны решения $x=0$ и $y=1$. Очевидно, $y=1$– решение уравнения (частное), а $x=0$ – нет. #

З а м е ч а н и е. Уравнение вида $y'=f(ax+by+c)$ приводится к уравнению с разделяющимися переменными подстановкой $z=ax+by+c$ (при этом $z'=a+by'$).

Пример 2. Найти частное решение уравнения $(1+e^x)yy'=e^x$, удовлетворяющее начальному условию $y(0)=1$.

∇ Имеем $(1+e^x)y\dfrac{dy}{dx}=e^x$. Разделяя переменные, получаем $ydy=\dfrac{e^xdx}{1+e^x}$. Интегрируя, находим общий интеграл $\dfrac{y^2}{2}=\ln(1+e^x)+C$. Полагая в нем $x=0$, $y=1$, будем иметь $\dfrac{1}{2}=\ln 2+C$, откуда $C=1/2-\ln 2$. Подставляя в общий интеграл найденное значение C, получаем частное решение: $y^2=1+\ln\left(\dfrac{1+e^x}{2}\right)^2$, откуда $y=\pm\sqrt{1+\ln\left(\dfrac{1+e^x}{2}\right)^2}$. Из начального условия следует, что $y>0$, $(y(0)=1>0)$, поэтому перед корнем берем знак плюс; искомое частное решение: $y=\sqrt{1+\ln\left((1+e^x)/2\right)^2}$. #

Пример 3. Проинтегрировать уравнение $2y\sqrt{by-y^2}dx-$ $-(b^2+x^2)dy=0$ и выделить интегральную кривую, проходящую через точку (0; b).

∇ Разделяем переменные в уравнении и интегрируем:

$$\frac{2dx}{b^2+x^2}-\frac{dy}{y\sqrt{by-y^2}}=0\quad\left(y\sqrt{by-y^2}=0?\right),\quad \operatorname{arctg}\frac{x}{b}+\sqrt{\frac{b-y}{y}}=C\quad(*).$$

Далее из $y\sqrt{by-y^2}=0$ находим решения уравнения: $y=0$, $y=b$.

Первое из этих решений частное, второе – особое, так как для любого x_0 через точку (x_0, b), кроме решения $y = b$, проходит также решение, получаемое из общего интеграла при $C = \operatorname{arctg}\dfrac{x_0}{b}$. Полагая в общем интеграле (∗) $x = 0,\ y = b$, находим $C = 0$, так что через заданную точку проходит интегральная кривая $\operatorname{arctg}\dfrac{x}{b} + \sqrt{\dfrac{b-y}{y}} = 0$ и, кроме того, $y = b$. #

10.3.2. ОДНОРОДНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ПРИВОДЯЩИЕСЯ К НИМ

1°. Однородные уравнения

Уравнения (10.4) или (10.5) называются *однородными*, если $f(x, y)$ есть однородная функция нулевого измерения:

$$f(tx, ty) = f(x, y), \tag{10.12}$$

или функции $M(x, y)$ и $N(x, y)$ являются однородными одного измерения:

$$M(tx, ty) = t^m M(x, y), \quad N(tx, ty) = t^m N(x, y). \tag{10.13}$$

Однородное уравнение (10.4) всегда можно представить в виде

$$y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right). \tag{10.14}$$

Любой из подстановок: $y = u(x)x$ или $x = t(y)y$ – однородное уравнение сводится к уравнению с разделяющимися переменными. Например, вводя новую искомую функцию $u = \dfrac{y}{x}$ (т.е. $y = ux$, $y' = u'x + u$), сведем (10.14) к уравнению

$$x\frac{du}{dx} = \varphi(u) - u, \tag{10.15}$$

в котором переменные разделяются. Если $u = u_0$ есть корень уравнения $\varphi(u) - u = 0$, то уравнение (10.14) будет также иметь решение $y = u_0 x$ (прямая, проходящая через начало координат).

З а м е ч а н и е. При решении однородных уравнений не обязательно приводить их к виду (10.14). Можно сразу выполнять подстановку $y = ux$ (или $x = ty$).

Пример 1. Решить уравнение $xy' = \sqrt{x^2 - y^2} + y$.

∇ Имеем однородное уравнение (заменяя в уравнении x и y на tx, ty, приходим к исходному уравнению: $tx\,y' = \sqrt{(tx)^2 - (ty)^2} + ty \Rightarrow xy' =$

$=\sqrt{x^2-y^2}+y$; иначе, уравнение приводится к виду $y'=\sqrt{1-\left(\dfrac{y}{x}\right)^2}+$ $+\dfrac{y}{x}$ $\left(y'=\varphi\left(\dfrac{y}{x}\right)\right)$. Положим $y=ux$, тогда $y'=u'x+u$, подставим в уравнение, получим: $x\dfrac{du}{dx}=\sqrt{1-u^2}$. Разделим переменные: $\dfrac{du}{\sqrt{1-u^2}}=\dfrac{dx}{x}$. Отсюда интегрированием функций находим $\arcsin u=\ln|x|+\ln C$ или $\arcsin u=\ln|xC|$. Подставляя $u=\dfrac{y}{x}$, после преобразования получаем общее решение $y=x\cdot\sin\ln|Cx|$. При разделении переменных обе части уравнения делили на произведение $x\sqrt{1-u^2}$, поэтому могли потерять решения, которые обращают в нуль это произведение. Положим $\sqrt{1-u^2}=0$ ($x\neq 0$ – см. область определения уравнения). Из этого уравнения находим $y=\pm x$. Проверка показывает, что и $y=x$ и $y=-x$ – решения данного уравнения (особые, так как через каждую точку $(x_0,\pm x_0)$ проходит также решение, получаемое из общего решения при $C=\dfrac{e^{\pm\pi/2}}{x_0}$; графики особых решений лежат на границе области определения. #

Пример 2. Проинтегрировать уравнение $(x^2+2xy-y^2)dx+$ $+(y^2+2xy-x^2)dy=0$ и выделить интегральную кривую, проходящую через точки: а) (2; 2); б) (1; –1); в) (0; 0).

∇ Записав уравнение в форме (10.4) и (10.4′), заметим, что условия теоремы существования и единственности решения не выполнены лишь в точке (0,0), принадлежащей, однако, области определения уравнения. Положим $y=ux$. Тогда $dy=xdu+udx$, так что $(x^2+2ux^2-u^2x^2)dx+(u^2x^2+2x^2u-x^2)(xdu+udx)=0$. Разделим переменные: $\dfrac{dx}{x}+\dfrac{u^2+2u-1}{(u^2+1)(u+1)}du=0$ ($u+1=0$?, $x=0$ не является решением уравнения). Интегрируя, получаем $\ln|x|-\ln|u+1|+$ $+\ln(u^2+1)=\ln|C_1|$ или $\dfrac{x(u^2+1)}{u+1}=C$ $(C=\pm C_1)$. Заменив здесь u на $\dfrac{y}{x}$, получим общий интеграл уравнения в виде $\dfrac{x^2+y^2}{x+y}=C$. Это есть семейство окружностей $x^2+y^2=C(x+y)$, проходящих через начало координат, с центрами на прямой $y = x$, из которых нужно исключить начало координат; это частные решения. Полупрямые $x + y = 0$ $(x \neq 0)$, определяемые равенством $u + 1 = 0$, также соответствуют частным решениям уравнения. Решим поставленную задачу Коши: а) полагая в $x^2 + y^2 = C(x + y)$ $x = 2,\ y = 2$, находим $C = 2$, так что искомое решение: $x^2 + y^2 = 2(x + y)$. Решение $x + y = 0$ не проходит через точку (2, 2); б) ни одна из окружностей $x^2 + y^2 = C(x + y)$ не проходит через точку (1; –1), зато полупрямая $y = -x$ $(0 < x < +\infty)$ проходит через эту точку и дает искомое решение; в) через точку (0,0) проходят все вышеуказанные решения, продолженные по непрерывности. Решение задачи Коши не единственно.#

2°. Уравнения, приводящиеся к однородным. Дифференциальные уравнения вида

$$y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right) \tag{10.16}$$

в случае $\dfrac{a_2}{a_1} \neq \dfrac{b_2}{b_1}$ приводятся к однородным уравнениям с помощью замены переменных $x = u + m,\ y = v + n$, где m и n находятся из системы уравнений $a_1m + b_1n + c_1 = 0,\ a_2m + b_2n + c_2 = 0$.

Если в уравнении (10.16) $\dfrac{a_2}{a_1} = \dfrac{b_2}{b_1} = \lambda$ и, следовательно, $a_2x + b_2y = \lambda(a_1x + b_1y)$, то оно примет вид

$$y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{\lambda(a_1x + b_1y) + c_2}\right) = \varphi(a_1x + b_1y).$$

Подстановкой $u = a_1x + b_1y$ это уравнение преобразуется к уравнению с разделяющимися переменными (см. замечание в п. 10.3.1).

Пример 3. Решить уравнение $(x + y - 2)dx + (x - y + 4)dy = 0$.

∇ Система $m + n - 2 = 0;\ m - n + 4 = 0$ имеет единственное решение $m = -1,\ n = 3$. Замена $x = u - 1,\ y = v + 3$ приводит уравнение к виду $(u + v)du + (u - v)dv = 0$ – это однородное уравнение. Полагаем $v = tu$, получим $(u + ut)du + (u - ut)(udt + tdu)$, откуда $(1 + 2t - t^2)du + {}$ $+ u(1 - t)dt = 0$. Разделяем переменные: $\dfrac{du}{u} + \dfrac{(1-t)dt}{1 + 2t - t^2} = 0$. Интегрируя, находим $\ln|u| + \dfrac{1}{2}\ln\left|1 + 2t - t^2\right| = \ln C$, или $u^2(1 + 2t - t^2) = C$. Возвращаясь к «старым переменным» x и y, получаем

$$(x+1)^2\left[1+2\frac{y-3}{x+1}-\frac{(y-3)^2}{(x+1)^2}\right]=C_1$$

или

$$x^2+2xy-y^2-4x+8y=C \ \ (C=C_1+14)\,.\ \#$$

Пример 4. Решить уравнение $(x+y+1)dx+(2x+2y-1)dy=0$.

∇ Система $m+n+1=0,\ 2m+2n-1=0$ несовместна. Для интегрирования уравнения применяем подстановку $u=x+y,\ dy=du-dx$. Уравнение примет вид $(2-u)dx+(2u-1)du=0$ – уравнение с разделяющимися переменными. Разделяя переменные, получаем: $dx-\dfrac{2u-1}{u-2}du=0$, откуда $x-2u-3\ln|u-2|=C$. Возвращаясь к переменным x, y, получаем общий интеграл данного уравнения: $x+2y+3\ln|x+y-2|=C$. #

10.3.3. ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА. УРАВНЕНИЕ БЕРНУЛЛИ

1°. Линейные уравнения. *Линейным дифференциальным уравнением* называется линейное относительно неизвестной функции и ее производной уравнение:

$$y'+p(x)y=f(x)\,, \tag{10.17}$$

где $p(x)$ и $f(x)$ – заданные непрерывные функции от $x\in(a,b)$. Через каждую точку (x_0,y_0) полосы $a<x<b$, $|y|<+\infty$ проходит одна и только одна интегральная кривая уравнения (10.17), определенная во всем интервале (a,b). Всякое решение линейного уравнения есть частное, так что особых решений оно не имеет.

Если $f(x)\equiv 0$, то уравнение (10.17) называется *линейным однородным*:

$$y'+p(x)y=0\,. \tag{10.18}$$

Оно является уравнением с разделяющимися переменными и имеет общее решение

$$y=Ce^{-\int p(x)dx}\,. \tag{10.19}$$

Все решения линейного однородного уравнения (10.18) содержатся в формуле (10.19) его общего решения. Общее решение *неоднородного линейного уравнения* (10.17) может быть найдено несколькими способами; здесь рассмотрим два из них.

А. *Метод подстановки (метод Бернулли).* Положим $y(x)=u(x)v(x)$. Тогда уравнение (10.17) приводится к виду

$$u'v+uv'+p(x)uv=f(x)\,. \tag{10.20}$$

Выберем функции $u(x)$ и $v(x)$ так, чтобы сумма $uv' + puv$ обратилась в ноль. Так как $u(x)$ не равна тождественно нулю [$y = 0$ не является решением уравнения (10.17)], то должно быть

$$v' + pv = 0 \qquad (10.21)$$

– для определения функции $v(x)$ получили уравнение с разделяющимися переменными. Выбрав какое-либо частное решение $v(x)$, подставим его в (10.20); для определения функции $u(x)$ получим уравнение с разделяющимися переменными

$$u'v(x) = f(x). \qquad (10.22)$$

Решая уравнение (10.22), найдем его общее решение $u = u(x, c)$. Перемножая найденные функции $v(x)$ и $u(x, c)$, получаем общее решение уравнения (10.17):

$$y(x) = v(x)u(x, c).$$

Пример 1. Решить уравнение $x(x-1)y' + y = x^2(2x-1)$. Выделить частное решение, проходящее через точку $M_0(2; 4)$.

∇ Ищем общее решение уравнения в виде $y = uv$. Подставляя $y = uv$ и $y' = u'v + uv'$ в уравнение, получим: $x(x-1)(u'v + uv') + uv = x^2(2x-1)$, или

$$x(x-1)vu' + [x(x-1)v' + v]u = x^2(2x-1). \qquad (*)$$

Функцию $v = v(x)$ найдем из условия $x(x-1)v' + v = 0$: $x(x-1)\dfrac{dv}{dx} = -v$, $\dfrac{dv}{v} = -\dfrac{dx}{x(x-1)}$.

Интегрируем уравнение $\left(\dfrac{1}{x(x-1)} = \dfrac{x-(x-1)}{x(x-1)} = \dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{x}\right)$:

$\ln|v| = -\ln|x-1| + \ln|x| + \ln C$. Возьмем частное решение $v = \dfrac{x}{x-1}$.

Подставляя его в (*), получаем уравнение $u' = 2x - 1$, из которого интегрированием находим функцию $u(x)$: $u(x) = x^2 - x + C$. Общее решение исходного уравнения $y = [y = uv] = \dfrac{Cx}{x-1} + x^2$.

Чтобы выделить нужную интегральную кривую, подставим в найденное решение $x = 2$, $y = 4$: $4 = C\dfrac{2}{2-1} + 2^2$, откуда $C = 0$; решением поставленной задачи Коши служит парабола $y = x^2$. #

Пример 2. Решить уравнение $y' = \dfrac{y^2}{2xy+3}$.

∇ Перепишем уравнение в виде $\dfrac{dx}{dy} - \dfrac{2}{y}x = \dfrac{3}{y^2}$ – оно линейно относительно x и $\dfrac{dx}{dy}$. Решим его методом подстановки. Полагаем $x = uv$, тогда $x' = u'v + uv'$ и после подстановки x и x' в уравнение, оно приводится к виду: $u'v + u\left(v' - \dfrac{2v}{y}\right) = \dfrac{3}{y^2}$ (*). Функцию $v = v(y)$ определяем из уравнения $\dfrac{dv}{dy} - \dfrac{2v}{y} = 0$. Из его общего решения $v = y^2 + C$ выберем, например, частное решение $v = y^2$ и подставим его в (*); получим $\dfrac{du}{dy}y^2 = \dfrac{3}{y^2}$ или $\dfrac{du}{dy} = \dfrac{3}{y^4}$. Общее решение этого уравнения: $u(y, C) = C - \dfrac{1}{y^3}$. Перемножая $v(y)$ и $u(y, C)$, получим общее решение данного уравнения $x = Cy^2 - \dfrac{1}{y}$. #

Б. *Метод вариации произвольной постоянной* (*метод Лагранжа*). По этому методу решение уравнения (10.17) ищут в виде (10.19), т.е. в том же виде, в котором найдено решение соответствующего ему однородного уравнения (10.18), считая в этой записи C некоторой подлежащей определению функцией переменной x: $C = C(x)$. Для определения $C(x)$ составляют уравнение

$$C'(x)e^{-\int p(x)dx} = f(x) \qquad (10.23)$$

– уравнение с разделяющимися переменными.

Пример 3. Проинтегрировать уравнение $y' + 2xy = 2xe^{-x^2}$.

∇ 1. Решим соответствующее исходному неоднородному уравнению однородное линейное уравнение: $y' + 2xy = 0$. Это уравнение с разделяющимися переменными. Его общее решение имеет вид: $y = Ce^{-x^2}$. 2. Ищем общее решение линейного неоднородного уравнения в виде $y = C(x)e^{-x^2}$, где $C = C(x)$ – подлежащая определению неизвестная функция от x. Подставляя $y_1 = e^{-\int p(x)dx} = e^{-x^2}$ в (10.23), для определения $C(x)$ получаем уравнение $C' = 2x$, откуда $C(x) = x^2 + C$. Итак, общее решение неоднородного уравнения $y = \dfrac{x^2 + C}{e^{x^2}}$. #

2°. Уравнение Бернулли. *Уравнением Бернулли* называется уравнение

$$y' + p(x)y = f(x)y^n, \qquad (10.24)$$

где $n \neq 0; 1$ (при n = 0 имеем линейное, а при n = 1 – уравнение с разделяющимися переменными). Интегрируется уравнение Бернулли как и линейное.

Замечание. При $n > 1$ уравнение Бернулли имеет решение $y = 0$.

Пример. Проинтегрировать уравнение $y' - 2xy = 2x^3y^2$ и найти интегральную кривую, проходящую через точку $M_0(0; 1)$.

∇ Заметим, что это уравнение имеет решение $y = 0$. Полагаем далее, $y = uv$. Подставляя $y = uv$ и $y' = u'v + uv'$ в уравнение, получаем: $u'v + u(v' - 2xv) = 2x^3u^2v^2$ (*). Из $v' - 2xv = 0$ по разделении переменных: $\dfrac{dv}{v} = 2xdx$ находим $v = Ce^{x^2}$. Возьмем $v = e^{x^2}$ и подставим в (*); получим уравнение $u' = 2x^3e^{x^2}u^2$. Проинтегрируем его $\dfrac{du}{u^2} = 2x^3e^{x^2}dx$, $-\dfrac{1}{u} = \int x^2e^{x^2}dx^2 - C$, $-\dfrac{1}{u} = e^{x^2}(x^2 - 1) - C$ и $-\dfrac{1}{y} = x^2 - 1 - Ce^{-x^2}$. Следовательно, общим решением уравнения будет $y = \dfrac{1}{Ce^{-x^2} + 1 - x^2}$. Решение y = 0 – частное решение. Через точку (0; 1) проходит кривая $y = \dfrac{1}{1 - x^2}$. #

10.3.4. УРАВНЕНИЯ В ПОЛНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛАХ. ИНТЕГРИРУЮЩИЙ МНОЖИТЕЛЬ

1°. Уравнения в полных дифференциалах. Уравнение (10.5) называется *уравнением в полных дифференциалах*, если его левая часть есть полный дифференциал некоторой (однозначной) функции $u = u(x, y)$:

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy. \qquad (10.25)$$

С учетом (10.25) уравнение в полных дифференциалах может быть переписано в виде

$$du = 0, \qquad (10.26)$$

так что его общий интеграл имеет вид

$$u(x, y) = C. \qquad (10.27)$$

Теорема, приведенная ниже, позволяет установить, является ли уравнение (10.5) уравнением (10.26) – уравнением в полных дифференциалах.

Теорема. Пусть функции $M(x, y)$ и $N(x, y)$ определены и непрерывны в некоторой односвязной области D и имеют в ней непрерывные частные производные соответственно по y и по x. Тогда для того чтобы уравнение (10.5) было уравнением в полных дифференциалах, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось тождество

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} . \tag{10.28}$$

При выполнении условия (10.28) общий интеграл можно записать в виде

$$\int_{x_0}^{x} M(x, y)dx + \int_{y_0}^{y} N(x_0, y)dy = C , \tag{10.29}$$

или

$$\int_{x_0}^{x} M(x, y_0)dx + \int_{y_0}^{y} N(x, y)dy = C , \tag{10.30}$$

где нижние пределы x_0, y_0 можно выбирать произвольно, лишь бы точка $(x_0, y_0) \in D$. Особых решений уравнение в полных дифференциалах не имеет.

Пример 1. Проинтегрировать уравнение $(\sin xy + xy \cos xy)dx +$ $+ x^2 \cos xydy = 0$.

∇ Проверим выполнение условия (10.28) – является ли оно уравнением в полных дифференциалах? Имеем:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(\sin xy + xy \cos xy) = 2x \cos xy - x^2 y \sin xy;$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x^2 \cos xy) = 2x \cos xy - x^2 y \sin xy ,$$

так что $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x}$ – имеем уравнение в полных дифференциалах.

Общее решение определим по формуле (10.30), взяв за начальную точку $M_0(0, 0)$: $\int_0^x (\sin x \cdot 0 + x \cdot 0 \cos x \cdot 0)dx + \int_0^y x^2 \cos xydy = C$; отсюда $x \sin xy = C$ есть общий интеграл данного дифференциального уравнения. #

Укажем другой способ нахождения общего интеграла уравнения в полных дифференциалах.

Функция $u(x, y)$ в (10.27) должна удовлетворять системе уравнений

$$\frac{\partial u}{\partial x} = M(x, y), \quad \frac{\partial u}{\partial y} = N(x, y). \tag{10.31}$$

Интегрируя частным образом по x первое из уравнений (10.31), получаем

$$u(x, y) = \int M(x, y)dx + \varphi(y), \tag{10.32}$$

где $\varphi(y)$ – произвольная (дифференцируемая) функция y. Выберем ее так, чтобы функция (10.32) была решением и второго из уравнений (10.31). Дифференцируя (10.32) по y и полагая $\frac{\partial u}{\partial y} = N$, для нахождения $\varphi(y)$ получаем дифференциальное уравнение вида $\varphi'(y) = \omega(y)$, интегрируя которое, найдем функцию $u(x, y)$.

Пример 2. Найти общий интеграл уравнения в полных дифференциалах:

$$\left[\frac{1}{x} - \frac{y^2}{(x-y)^2}\right]dx + \left[\frac{x^2}{(x-y)^2} - \frac{1}{y}\right]dy = 0.$$

∇ Интегрируя по x коэффициент при dx, получим

$$u(x, y) = \int\left[\frac{1}{x} - \frac{y^2}{(x-y)^2}\right]dx + \varphi(y) \quad \text{или} \quad u(x, y) = \ln|x| + \frac{y^2}{x-y} + \varphi(y).$$

Дифференцируя по y и приравнивая коэффициенту при dy, находим $\frac{2xy - y^2}{(x-y)^2} + \varphi'(y) = \frac{x^2}{(x-y)^2} - \frac{1}{y}$, откуда $\varphi'(y) = 1 - \frac{1}{y}$, а тогда $\varphi(y) = y - \ln|y|$. Определив функцию $u(x, y)$ и полагая $u = C$, найдем общий интеграл: $\ln\frac{x}{y} + \frac{xy}{x-y} = C$. #

2°. Интегрирующий множитель. Функция $\mu = \mu(x, y)$ называется *интегрирующим множителем*, если уравнение

$$\mu(Mdx + Ndy) = 0 \tag{10.33}$$

есть уравнение в полных дифференциалах. Интегрирующий множитель можно найти из уравнения с частными производными:

$$N\frac{\partial \mu}{\partial x} - M\frac{\partial \mu}{\partial y} = \mu\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right). \tag{10.34}$$

Уравнение (10.33) имеет интегрирующий множитель, зависящий только от x, если

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} \equiv \psi(x). \tag{10.35}$$

В этом случае $\mu=\mu(x)$ есть решение уравнения

$$\frac{d\ \ln\mu}{dx}=\frac{\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}}{N}: \tag{10.36}$$

$\mu=e^{\int\psi(x)dx}$. Уравнение (10.33) имеет интегрирующий множитель, зависящий только от y, если

$$\frac{\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}}{-M}\equiv\varphi(y). \tag{10.37}$$

Множитель $\mu=\mu(y)$ ищется из уравнения

$$\frac{d\ \ln\mu}{dy}=\frac{\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}}{-M}: \tag{10.38}$$

$\mu=e^{\int\varphi(y)dy}$.

Пример 3. Решить уравнение $(1-x^2y)dx+x^2(y-x)dy=0$.

∇ Условие (10.28) для уравнения не выполняется, оно не является уравнением в полных дифференциалах. Проверим, не имеет ли оно интегрирующего множителя, зависящего только от x. Имеем

$$\frac{\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}}{N}=\frac{-x^2-2xy+3x^2}{x^2(y-x)}=-\frac{2}{x}\equiv\psi(x),$$

т. е условие (10.35) выполнено. Поэтому [из (10.36)] $\mu=e^{-\int\frac{2}{x}dx}=\dfrac{1}{x^2}$.

Умножая обе части исходного уравнения на x^{-2}, получаем $\left(\dfrac{1}{x^2}-y\right)dx+(y-x)dy=0-$ уравнение в полных дифференциалах.

По формуле (10.30) найдем общий интеграл: $\displaystyle\int_1^x\frac{dx}{x^2}+\int_0^y(y-x)dy=C$,

или $-\dfrac{1}{x}-xy+\dfrac{y^2}{2}=C$. #

Пример 4. Решить уравнение $2xy\ln ydx+(x^2+y^2\sqrt{y^2+1})dy=0$.

∇ Здесь $M=2xy\ln y,\ N=x^2+y^2\sqrt{y^2+1}$; условие (10.28) не выполнено. Имеем:

$$\frac{\dfrac{\partial N}{\partial x}-\dfrac{\partial M}{\partial y}}{M}=\frac{2x-2x(\ln y+1)}{2xy\ln y}=-\frac{1}{y}\equiv\varphi(y),$$

следовательно, по (10.38), $\dfrac{d\ln\mu}{dy}=-\dfrac{1}{y}$, $\mu=\dfrac{1}{y}$. Уравнение $\dfrac{2xy\ln y dx}{y}+\dfrac{x^2+y^2\sqrt{y^2+1}}{y}dy=0$ является уравнением в полных дифференциалах, общее решение которого (опустим подробности) $x^2\ln y+\dfrac{1}{3}(y^2+1)^{3/2}=C$. #

Задачи для самостоятельного решения

В задачах 1–11 решить уравнения с разделяющимися переменными и приводящиеся к ним и для каждого из них построить несколько интегральных кривых. Найти также решения, удовлетворяющие начальным условиям (в тех задачах, где указаны начальные условия).

1. $(xy^2+x)dx+(y-x^2y)dy=0$. **2.** $xy'+y=y^2$; $y(1)=0,5$.

3. $2e^x\,\mathrm{tg}\,ydx+(1+e^x)\sec^2 ydy=0$.

4. $(xy^2+x)dy+(x^2y-y)dx=0$, $y(1)=1$.

5. $e^y(y'+1)=1$; **6.** $(1+y^2)(e^{2x}dx-e^ydy)-(1+y)dy=0$.

7. $dx-\sqrt{1-x^2}dy=0$, $y(1)=\pi/2$.

8. $y'=y\cos x$, $y(0)=1$. **9.** $y+xy'=a(1+xy)$, $y(1/a)=-a$.

10. $y'=\sin(x-y)$. **11.** $(x+y)^2y'=a^2$.

Проинтегрировать однородные уравнения:

12. $x(x+2y)dx+(x^2-y^2)dy=0$. **13.** $(x^2+y^2)dx-2xydy=0$.

14. $y'=\dfrac{x+2y}{-x}$. **15.** $\dfrac{dx}{2x^2-2xy+2y^2}=\dfrac{dy}{y^2-4xy}$.

16. $(x^2+xy)y'=x\sqrt{x^2-y^2}+xy+y^2$.

Проинтегрировать следующие уравнения и выделить интегральную кривую, проходящую через заданную точку $M_0(x_0,y_0)$, выяснив предварительно вопрос о существовании и единственности этой интегральной кривой:

17. $(y+\sqrt{x^2+y^2})dx-xdy=0$; $M_0(1;0)$. **18.** $y'=\dfrac{y}{x}\ln\dfrac{y}{x}$; $M_0(1;1)$.

19. $y'=\dfrac{y^2-2xy-x^2}{y^2+2xy-x^2}$; $M_0(1;-1)$. **20.** $xdy-(x+y)dx=0$; $M_0(0;0)$.

Следующие уравнения соответствующей подстановкой свести к однородным и проинтегрировать их.

21. $(2x-y+1)dx+(2y-x-1)dy=0$. **22.** $(x-y)dx+(2y-x+1)dy=0$.

23. $(x+y+1)dx+(2x+2y-1)dy=0$. **24.** $(x-y+2)dx+(y-x+3)dy=0$.

25. $y'=2\left(\dfrac{y+2}{x+y-1}\right)^2$.

Проинтегрировать линейные уравнения; решить, где указано, задачу Коши.

26. $y'-y\sin x=\sin x\cdot\cos x$. **27.** $(1+x^2)y'-2xy=(1+x^2)^2$.

28. $y'+2y=e^{-x}$. **29.** $x^2+xy'=y,\ y(1)=0$. **30.** $y'+y\,\mathrm{tg}\,x=\dfrac{1}{\cos x}$.

31. $y'\cos x-y\sin x=2x,\ y(0)=0$. **32.** $y'-y\,\mathrm{tg}x=\dfrac{1}{\cos^3 x},\ y(0)=0$.

33. $y'+\dfrac{3}{x}y=\dfrac{2}{x^3},\ y(1)=1$. **34.** $y'=\dfrac{2y}{x+1}+e^x(x+1)^2$.

35. . $y'=\dfrac{y}{x+y^3}$. **36.** $y'=2y+e^x-x,\ y(0)=1/4$.

37. $(1-x^2)y'+xy=1,\ y(0)=1$. **38.** $(y^2-6x)y'+2y=0$.

39. $(x-2xy-y^2)y'+y^2=0$.

Проинтегрировать уравнения Бернулли; решить, где указано, задачу Коши.

40. $xy'+y=y^2\ln x,\ y(1)=1$. **41.** $y'+2xy=2x^3y^3$.

42. $y'+4xy=2xe^{-x^2}\sqrt{y}$. **43.** $y'=y(y^3\cos x+\mathrm{tg}\,x)$.

44. $3dy=-(1+3y^3)y\sin x dx,\ y(\pi/2)=1$.

45. $ydx+\left(x-\dfrac{1}{2}x^3y\right)dy=0,\ y(1/2)=1$.

46. $y'-9x^2y=(x^5+x^2)y^{2/3},\ y(0)=0$.

47. $y'-y=xy^2,\ y(0)=0$. **48.** $xy'+y=xy^2,\ y(0)=0$.

49. $y'=\dfrac{2x}{x^2\cos y+a\sin 2y}$.

В задачах 50–58 проверить, что данные уравнения являются уравнениями в полных дифференциалах, и проинтегрировать их.

50. $2xydx+(x^2-y^2)dy=0$. **51.** $(2-9xy^2)xdx+(4y^2-6x^3)ydy=0$.

52. $e^{-y}dx-(2y+xe^{-y})dy=0$. **53.** $\dfrac{y}{x}dx+(y^3+\ln x)dy=0$.

54. $\dfrac{3x^2+y^2}{y^2}dx-\dfrac{2x^3+5y}{y^3}dy=0$. **55.** $2x(1+\sqrt{x^2-y})dx=\sqrt{x^2-y}dy$.

56. $1+y^2 \sin 2x = y'(2y\cos^2 x)$. **57.** $-3x^2dx+2ydy=3x^2\ln y dx+\dfrac{x^3}{y}dy$.

58. $\left(\dfrac{x}{\sin y}+2\right)dx=\dfrac{(x^2+1)\cos y}{1-\cos 2y}dy$.

Проинтегрировать следующие уравнения, для которых интегрирующий множитель $\mu=\mu(x)$ или $\mu=\mu(y)$:

59. $(2y+xy^3)dx+(x+x^2y^2)dy=0$. **60.** $ydx-(x+y^2)dy=0$.

61. $2xydx-(x^2+y)dy=0$. **62.** $(2x^2y+2y+5)dx+(2x^3+2x)dy=0$.

63. $(x^4\ln x-2xy^3)dx+3x^2y^2dy=0$.

64. $(x+\sin x+\sin y)dx+\cos y dy=0$.

65. $(2xy^2-3y^3)dx+(7-3xy^2)dy=0$.

10.4. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ И ФИЗИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ, ПРИВОДЯЩИЕ К РЕШЕНИЮ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

1°. Геометрические задачи. В задачах геометрии, в которых требуется найти уравнение кривой по заданному свойству ее касательной, нормали или площади криволинейной трапеции, используются геометрическое истолкование производной – угловой коэффициент касательной – и интеграла с переменным верхним пределом – площадь криволинейной трапеции с подвижной границей $x=\text{const}$, а также общие формулы для определения длин отрезка t касательной и отрезка n нормали от точки кривой, в которой они проведены, до пересечения их с осью Ox и длин подкасательной S_t и поднормали S_n – проекций этих отрезков на ось Ox:

$$t=\left|\frac{y}{y'}\sqrt{1+y'^2}\right|,\ n=\left|y\sqrt{1+y'^2}\right|,\ S_t=\left|\frac{y}{y'}\right|,\ S_n=|yy'|. \quad (10.39)$$

Пример 1. Найти уравнение кривой, проходящей через начало координат, если в каждой ее точке $M(x, y)$ подкасательная S_t в k раз меньше поднормали S_n.

∇ Пусть $y=f(x)$ – уравнение искомой кривой. Используя выражения подкасательной и поднормали из (10.39), получаем дифференциальное уравнение $|yy'|=k\left|\dfrac{y}{y'}\right|$ или $(y')^2=k$. Интегрируя это уравнение и учитывая начальное условие $y(0)=0$, получаем искомые уравнения: $y=\pm\sqrt{k}x$ (две прямые). #

Пример 2. Найти уравнение кривой, проходящей через точку (1; 1), если для любого отрезка [1; x] площадь криволинейной трапеции, ограниченной соответствующей дугой этой кривой, в два раза больше произведения координат точки $M(x, y)$ кривой $(x>0,\ y>0)$.

∇ По условию задачи, $\int\limits_1^x y(t)dt = 2x\cdot y(x)$. Дифференцируя это равенство по x, получаем дифференциальное уравнение $y=2(y+xy')$, или $y'=-\dfrac{y}{2x}$. Интегрируя его, с учетом начального условия $y(1)=1$, получаем уравнение искомой кривой: $y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$. #

2°. Задачи с физическим содержанием. При составлении дифференциальных уравнений первого порядка в физических задачах используют метод дифференциалов, по которому приближенные соотношения между малыми приращениями величин заменяются соотношениями между их дифференциалами. В конкретных задачах используется тот или иной физический закон (некоторые из них приведены ниже при формулировании условий задач), а также физическое истолкование производной как скорости протекания физического процесса.

Пример 3. В резервуаре первоначально содержится A кг вещества, растворенного в B литрах воды. Затем в резервуар начинает равномерно поступать вода со скоростью M литров в минуту и одновременно начинает вытекать раствор со скоростью N литров в минуту ($M > N$), причем однородность раствора достигается путем перемешивания. Найти массу вещества в резервуаре через T минут после начала процесса.

∇ Обозначим через $x(t)$ массу вещества в резервуаре через t минут после начала процесса и через $x+\Delta x$ – в момент $t+\Delta t$. Заметим, что $\Delta x<0$ при $\Delta t>0$, т.е. раствор обедняется.

Пусть $V(t)$ – объем смеси в момент $t: V(t)=B+Mt-Nt$. Концентрация вещества в момент t равняется, очевидно, x/V. За бесконечно малый промежуток времени $[t,\ t+\Delta t]$ масса вещества изменяется на бесконечно малую величину Δx (так как процесс непрерывен), для которой справедливо приближенное равенство

$$\Delta x \approx -\frac{x}{V}N\Delta t = -\frac{Nx}{B+(M-N)t}\Delta t. \qquad (10.40)$$

Заменяя в (10.40) приращения Δx и Δt дифференциалами dx и dt, получаем дифференциальное уравнение $dx=-\dfrac{Nx}{B-(M-N)t}dt$ –

уравнение с разделяющимися переменными. Интегрируя и считая $M > N$, запишем общее решение: $x(t) = C[B + (M - N)t]^{-\frac{N}{M-N}}$. Используя начальное условие: $x(0) = A$, находим частное решение: $x(t) = A\left[\dfrac{B}{B + (M - N)t}\right]^{\frac{N}{M-N}}$. Решение задачи получается из него при $t = T$. #

Замечание. Случай $M = N$ требует отдельного рассмотрения.

Задачи для самостоятельного решения

66. Найти уравнение кривой, проходящей через точку $(\sqrt{2};\ 0)$, если сумма длин ее касательной и подкасательной равна произведению координат точки касания.

67. Найти уравнение кривой, проходящей через точку $(1;\ 2)$, если ее подкасательная вдвое больше абсциссы точки касания.

68. Найти уравнение кривой, проходящей через точку $(1/2;\ -1)$, если длина отрезка полуоси абсцисс, отсекаемого ее касательной, равна квадрату абсциссы точки касания.

69. Найти уравнения кривых, у которых длина отрезка нормали постоянна и равна a.

70. Найти уравнения кривых, у которых поднормаль имеет постоянную длину a.

71. Найти уравнение кривой, проходящей через точку (0; 2), если площадь криволинейной трапеции, ограниченной дугой этой кривой, в два раза больше длины соответствующей дуги.

72. Найти уравнение кривой, проходящей через точку (1; 1/2), если для любого отрезка $[1;\ x]$ площадь криволинейной трапеции, ограниченной соответствующей дугой этой кривой, равна отношению абсциссы x концевой точки к ординате.

73. Найти уравнение кривой, проходящей через точку (0; 3), если подкасательная в любой точке равна сумме абсциссы точки касания и расстояния от начала координат до точки касания (ограничиться рассмотрением случая $y\ /\ y' > 0$).

74. Найти уравнение кривой, проходящей через точку (1; 0), если длина отрезка оси абсцисс, отсекаемого ее нормалью, на 2 ед. больше абсциссы точки касания.

75. Найти уравнение кривой, проходящей через начало координат, если для любого отрезка $[a,\ x]$ площадь криволинейной трапеции, ограниченной соответствующей дугой этой кривой, равна кубу ординаты концевой точки дуги.

76. Найти уравнение кривой, проходящей через точку с полярными координатами $\rho = 2,\ \varphi = 0$, если угол α между ее касательной и радиусом-вектором точки касания есть постоянная величина: $\operatorname{tg} \alpha = a$.

77. Найти уравнение кривой, проходящей через точку (1; 1), если длина отрезка оси абсцисс, отсекаемого любой ее касательной, равна длине этой касательной.

78. Найти уравнение кривой, проходящей через точку (3; 1), если длина отрезка, отсекаемого любой ее касательной на оси ординат, равна поднормали.

79. Найти уравнение кривой, проходящей через начало координат, если середина отрезка ее нормали от любой точки кривой до оси *Ox* лежит на параболе $x = 2y^2$.

80. Найти уравнение кривой, проходящей через точку (1; 0), если площадь трапеции, образованной касательной, осями координат и ординатой точки касания, постоянна и равна 3/2.

81. Найти уравнение кривой, проходящей через точку (0; 1), если площадь треугольника, образуемого осью абсцисс, касательной и радиусом-вектором точки касания, постоянна и равна 1.

82. Найти уравнение кривой, проходящей через точку (1; 2), если произведение абсциссы точки касания на абсциссу точки пересечения нормали с осью *Ox* равно удвоенному квадрату расстояния от начала координат до точки касания.

83. Найти уравнение кривой, проходящей через точку с полярными координатами $\rho = \pi,\ \varphi = \pi/2$, если площадь сектора, ограниченного этой кривой, полярной осью и переменным полярным радиусом, в шесть раз меньше куба полярного радиуса.

84. Скорость охлаждения тела пропорциональна разности температур тела и окружающей его среды (закон Ньютона). Найти зависимость температуры T от времени t, если тело, нагретое до T_0 градусов, внесено в помещение, температура которого постоянна и равна a градусам.

85. Через сколько времени температура тела, нагретого до 100 °C, понизится до 25 °C, если температура помещения равна 20 °C и за первые 10 мин тело охладилось до 60 °C?

86. Замедляющее действие трения на диск, вращающийся в жидкости, пропорционально угловой скорости вращения. Найти зависимость этой угловой скорости от времени, если известно, что диск, начавший вращаться со скоростью 5 об/с, по истечении двух минут вращается со скоростью 3 об/с. Через сколько времени он будет иметь угловую скорость 1 об/мин ?

87. Скорость распада радия пропорциональна наличному его количеству. В течение года из каждого грамма радия распадается 0,44 мг. Через сколько лет распадется половина имеющегося количества радия?

88. Скорость истечения воды из сосуда через малое отверстие определяется формулой $v = 0,6\sqrt{2gh}$, где h – высота уровня воды над отверстием, g – ускорение свободного падения (принять g = 10 м/с^2). За какое время вытечет вся вода из цилиндрического бака с диаметром $2R = 1$ м и высотой H = 1,5 м через отверстие в дне диаметром $2r = 0,05$ м ?

89. Количество света, поглощаемого при прохождении через тонкий слой воды, пропорционально количеству падающего света и толщине слоя. Зная, что при прохождении слоя воды толщиной 2 м поглощается 1/3 первоначального светового потока, найти, какая часть его дойдет до глубины 12 м.

90. Лодка замедляет свое движение под действием сопротивления воды, которое пропорционально скорости лодки. Начальная скорость лодки равна 1,5 м/с, скорость ее через 4 с – 1 м/с. Когда скорость уменьшится до 1 см/с ? Какой путь пройдет лодка до остановки ?

91. Пуля, двигаясь со скоростью $V_0 = 400$ км/с, пробивает стену толщиной h = 20 см и вылетает, имея скорость 100 м/с. Полагая силу сопротивления стены пропорциональной квадрату скорости движения пули, найти время прохождения пули через стену.

92. В баке находится 100 л раствора, содержащего 10 кг соли. В бак вливается вода со скоростью 5 л/мин и смесь вытекает из него с той же скоростью. Однородность раствора достигается путем перемешивания. Сколько соли останется в баке через час?

93. Некоторое вещество преобразуется в другое вещество со скоростью, пропорциональной массе непреобразованного вещества. Если масса первого есть 31,4 г по истечении одного часа и 9,7 г по истечении трех часов, то определить: а) массу вещества в начале процесса; б) через сколько времени после начала процесса останется лишь 1 % первоначальной массы исходного вещества ?

94. В помещении цеха вместимостью 10800 м^3 воздух содержит 0,12 % углекислоты. Вентиляторы доставляют свежий воздух, содержащий 0,04 % углекислоты, со скоростью 1500 м/мин. Предполагая, что углекислота распределяется по помещению равномерно в каждый момент времени, найти объемную долю углекислоты через 10 мин после начала работы вентиляторов.

95. Сила тока i в цепи с сопротивлением R, самоиндукцией L и напряжением u удовлетворяет уравнению $L\dfrac{di}{dt} + Ri = u$. Найти силу тока i в момент времени t, если $u = E\sin\omega t$ и $i = 0$ при $t = 0$ (L, R, E, ω – постоянные).

10.5. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

10.5.1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ. ЗАДАЧА КОШИ

Задачей Коши для дифференциального уравнения (10.1) или (10.2) называется задача определения решения $y=\varphi(x)$, удовлетворяющего заданным начальным условиям:

$$y(x_0)=y_0,\ y'(x_0)=y_0',\ \dots\ y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)}. \tag{10.41}$$

Общим решением уравнений (10.1) или (10.2) в области D переменных $(x,y,y',\dots,y^{(n-1)})$, в каждой точке которой имеет место существование и единственность решения, называется такая функция $y=\varphi(x,\,C_1,\,\dots,C_n)$, которая при любых допустимых значениях параметров $C_1,\,C_2,\,\dots,\,C_n$ является решением этого уравнения на интервале оси Ox, для которого точки $(x,\varphi,\varphi',\dots,\varphi^{(n+1)})\in D$, и для которой при рассмотрении любой задачи Коши с условиями (10.41) $\exists\ (C_1,\,\dots,\,C_n)$, определяемые из системы уравнений:

$$\begin{cases} \varphi(x_0,\,C_1,\,\dots,\,C_n)=y_0; \\ \varphi'(x_0,\,C_1,\,\dots,\,C_n)=y_0'; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \varphi^{(n-1)}(x_0,\,C_1,\,\dots,\,C_n)=y_0^{(n-1)}. \end{cases} \tag{10.42}$$

Уравнение

$$\Phi(x,\,y,\,C_1,\,\dots,\,C_n)=0, \tag{10.43}$$

определяющее общее решение как неявную функцию, называется *общим интегралом* дифференциального уравнения.

Теорема существования и единственности решения задачи Коши [(10.2); (10.41)]. Если дифференциальное уравнение (10.2) таково, что функция $f(x,\,y,\,y',\,\dots,\,y^{(n-1)})$ в некоторой области D изменения своих аргументов непрерывна и имеет непрерывные частные производные $\dfrac{\partial f}{\partial y},\,\dfrac{\partial f}{\partial y'},\,\dots,\,\dfrac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}}$, то для любой точки $(x_0,\,y_0,\,y_0',\,\dots,\,y_0^{(n-1)})\in D$ существует такой интервал $x_0-h<x<x_0+h$, на котором существует и притом единственное решение этого уравнения, удовлетворяющее начальным условиям (10.41).

Решение уравнения (10.2) называется *частным решением*, если в каждой точке его сохраняется единственность решения задачи Коши.

З а м е ч а н и е. Если $y=\varphi(x,\,C_1,\,\dots,\,C_n)$ есть общее решение уравнения (10.2) в области D, то всякое решение, содержащееся в этой формуле при конкретных допустимых числовых значениях произвольных постоянных $C_1,\,\dots,\,C_n$, является частным решением.

Решение уравнения называется *особым*, если в каждой точке его нарушается единственность решения задачи Коши.

В случае уравнения второго порядка

$$y'' = f(x, y, y') \tag{10.44}$$

задача Коши состоит в нахождении решения $y=\varphi(x)$ уравнения (10.44), удовлетворяющего начальным условиям

$$y = y_0,\ y' = y_0' \text{ при } x = x_0. \tag{10.45}$$

Геометрически это означает, что ищется интегральная кривая, которая проходит через заданную точку $M_0(x_0, y_0)$ и имеет в этой точке заданную касательную, образующую с положительным направлением оси Ox такой угол α_0, что $\operatorname{tg}\alpha_0 = y_0'$.

Механический смысл задачи Коши заключается в следующем. Запишем уравнение движения материальной точки в проекции на ось Ox:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = f\left(t, x, \frac{dx}{dt}\right). \tag{10.46}$$

Здесь t – время, x, $\dfrac{dx}{dt}$, $\dfrac{d^2x}{dt^2}$ – соответственно координата, проекции скорости и ускорения на ось Ox в момент t; $f\left(t, x, \dfrac{dx}{dt}\right)$ – проекция силы на ось Ox, действующей на точку. Решение $x = x(t)$ (координата x) уравнения (10.46) называется движением точки, определяемым этим уравнением. Задача Коши заключается в определении движения, удовлетворяющего начальным условиям: $x = x_0$, $\dfrac{dx}{dt} = x_0'$ при $t = t_0$, где числа t_0, x_0 и x_0' (начальные данные) есть соответственно начальный момент времени, начальная координата и проекция скорости в (начальный) момент времени t_0.

Пример 1. Показать, что $y = C_1x + C_2$ есть общее решение дифференциального уравнения $y_0'' = 0$.

∇ 1. Покажем, что $y = C_1x + C_2$ удовлетворяет данному уравнению при любых C_1, C_2. Имеем $y' = C_1$, $y'' = 0$. 2. Пусть заданы произвольные начальные условия $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_0'$. Покажем, что постоянные C_1, C_2 можно подобрать так, что эти начальные условия будут удовлетворены. Составим систему: $C_1x_0 + C_2 = y_0$; $C_1 = y_0'$, из которой однозначно определяются $C_1 = y_0', C_2 = y_0 - x_0 \cdot y_0'$. Таким образом, решение $y = y_0 + y_0'(x - x_0)$ удовлетворяет поставленным начальным условиям. #

З а м е ч а н и е. Запись $y = \varphi(x, x_0, y_0, y_0')$ называется формой Коши решения уравнения (10.44).

Пример 2. Найти область существования и единственности решения уравнения $y'' = \dfrac{y\sqrt{y'}}{x}$.

∇ Функция $f(x, y, y') = \dfrac{y\sqrt{y'}}{x}$ и ее частная производная $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{\sqrt{y'}}{x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y'} = \dfrac{y}{2x\sqrt{y}}$ непрерывны при $x \neq 0,\ y' > 0$, то есть задача Коши (10.45) для данного уравнения имеет единственное решение при $x_0 \neq 0,\ \forall y_0,\ y_0' > 0$. #

10.5.2. ИНТЕГРИРУЕМОСТЬ В КВАДРАТУРАХ

Уравнение n-го порядка во многих случаях удается проинтегрировать в квадратурах путем предварительного сведения его к уравнению более низкого порядка или при помощи нахождения промежуточных интегралов

$$\Phi(x, y, y', ..., y^{(n-k)}, C_1, ..., C_k) = 0 \qquad (10.47)$$

– соотношений, получаемых в результате интегрирования исходного уравнения (такое соотношение называется промежуточным интегралом k-го порядка дифференциального уравнения (10.2)). Ниже рассматриваются дифференциальные уравнения, допускающие понижение порядка не только в форме (10.2), но и в общем виде (10.1).

УРАВНЕНИЯ ВИДА $y^{(n)} = f(x)$

Общее решение уравнения вида

$$y^{(n)} = f(x) \qquad (10.48)$$

получается путем n-кратного интегрирования:

$$y = \underbrace{\int ... \int}_{n} f(x)\, \underbrace{dx...dx}_{n} + P_{n-1}(x);\ \ P_{n-1}(x) = C_1 \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + ... + C_{n-1}x + C_n, \qquad (10.49)$$

или по формуле

$$y = \frac{1}{(n-1)!} \int\limits_{x_0}^{x} f(t)(x-t)^{n-1} dt + P_{n-1}(x)\ . \qquad (10.49')$$

Пример 1. Найти общее решение уравнения $y''' = \dfrac{\ln x}{x^2}$ и выделить решение, удовлетворяющее начальным условиям: $y(1) = 0$; $y'(1) = 1$; $y''(1) = 2$.

∇ Интегрируем это уравнение последовательно три раза: $\left(y''' = \dfrac{dy''}{dx} \right)$ $y'' = \displaystyle\int \frac{\ln x dx}{x^2} + C_1 = -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} + C_1;$

$\left(y''=\dfrac{dy'}{dx}\right) y'=-\dfrac{1}{2}\ln^2 x-\ln x+C_1x+C_2;\quad y=-\dfrac{x\cdot\ln^2 x}{2}+C_1\dfrac{x^2}{2}+C_2x+C_3$.

Найдем решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям. Подставляя начальные данные в y, y' и y'', получаем систему для определения произвольных постоянных: $\dfrac{1}{2}C_1+C_2+C_3=0;\quad C_1+C_2=1;$ $-1+C_1=2$, откуда $C_1=3;\ C_2=-2;\quad C_3=\dfrac{1}{2}$. Искомое решение $y=-\dfrac{x\ln^2 x}{2}+\dfrac{3}{2}x^2-2x+\dfrac{1}{2}$. #

УРАВНЕНИЕ, НЕ СОДЕРЖАЩЕЕ ИСКОМОЙ ФУНКЦИИ И ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ *K*-1 ПЕРВЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

Уравнение вида

$$F(x,\ y^{(k)},\ y^{(k+1)},\ \ldots,\ y^{(n)})=0\quad(1\le k<n)\tag{10.50}$$

подстановкой $y^{(k)}=z$ приводится к уравнению (n – k)-го порядка $F(x,\ z,\ z'\ldots,\ z^{(n-k)})=0$. Если удается получить общее решение последнего уравнения в виде $z=z(x,\ C_1,\ \ldots,\ C_{n-k})$ [получить промежуточный интеграл n–k-го порядка исходного уравнения (10.50)], то задача нахождения решения сводится к задаче (10.48): $y^{(k)}=z(x,C_1,\ldots,C_{n-k})$.

Пример 2. Найти частное решение уравнения $x^4y'''+2x^3y''=1$, удовлетворяющее начальным условиям: $y(1)=\dfrac{1}{2}$; $y'(1)=\dfrac{1}{2}$; $y''(1)=-1$.

∇ Уравнение не содержит y и y'. Положим $y''=z$; уравнение принимает вид $x^4z'+2x^3z=1$ или $z'+\dfrac{2}{x}z=\dfrac{1}{x^4}$. Это линейное уравнение первого порядка. Его общее решение $z=-\dfrac{1}{x^3}+\dfrac{C_1}{x^2}$. Используя начальное условие $y''(1)=z(1)=-1$, находим $C_1=0$ и, следовательно, $y''=-\dfrac{1}{x^3}$, откуда $y'=\dfrac{1}{2x^2}+C_2$. Начальное условие $y'(1)=\dfrac{1}{2}$ позволяет определить $C_2: C_2=0$. Интегрируя еще раз, получаем $y=-\dfrac{1}{2x}+C_3$, и из условия $y(1)=1/2$ следует, что $C_3=1$. Искомое частное решение $y=1-\dfrac{1}{2x}$. #

Пример 3. Найти решения уравнения $y''^2=4(y'-1)$, удовлетворяющие начальным условиям: а) $y=0,\ y'=2$ при x = 0; б) $y=0,\ y'=1$ при x = 0.

∇ Интегрируем уравнение: $y' = z,\ z'^2 = 4(z-1),\ z' = \pm 2\sqrt{z-1}$, $\dfrac{dz}{\pm 2\sqrt{z-1}} = dx$ $\quad (\sqrt{z-1} = 0\ ?)$, $\quad \pm\sqrt{z-1} = x + C_1$, $\quad z = 1 + (x + C_1)^2$, $y' = 1 + (x + C_1)^2$, $\quad y = x + \dfrac{1}{3}(x + C_1)^3 + C_2$; $\quad \sqrt{z-1} = 0,\ z = 1,\ y' = 1$, $y = x + C$. Следовательно, уравнение имеет общее решение $y = x + \dfrac{1}{3}(x + C_1)^3 + C_2$ и семейство особых решений $y = x + C$.

Найдем решения поставленных задач Коши: а) воспользуемся общим решением. Имеем $y = x + \dfrac{1}{3}(x + C_1)^3 + C_2,\ y' = 1 + (x + C_2)^2$ (*). Полагая здесь $x = 0,\ y = 0,\ y' = 2$, получаем систему уравнений для определения произвольных постоянных: $\dfrac{1}{3}C_1^3 + C_2 = 0;\ 1 + C_1^2 = 2$, откуда $C_1 = \pm 1,\ C_2 = \mp 1/3$. Подставляя эти значения C_1 и C_2 в (*), найдем два решения: $y = x + \dfrac{1}{3}(x+1)^3 - \dfrac{1}{3}$ и $y = x + \dfrac{1}{3}(x-1)^3 + \dfrac{1}{3}$. Других решений нет, так как ни одно из особых решений не удовлетворяет рассматриваемым начальным условиям; б) подставляя в систему (*) начальные данные $x_0 = 0,\ y_0 = 0,\ y_0' = 1$, получаем: $\dfrac{1}{3}C_1^3 + C_2 = 0;\quad 1 = 1 + C_1^2$, откуда $C_1 = 0,\ C_2 = 0$ и $y = x + \dfrac{1}{3}x^3$. Из особых решений функция $y = x$ удовлетворяет рассматриваемым начальным данным. #

З а м е ч а н и е. Полученные в а) и б) результаты согласуются с общей теорией, так как исходное уравнение равносильно двум: $y'' = 2\sqrt{y'-1}$ и $y'' = -2\sqrt{y'-1}$. В случае а) для каждого из этих уравнений в окрестности начальной точки (0; 0; 2) выполняются условия теоремы существования и единственности, а в случае б) эти условия не выполняются ни в какой окрестности начальной точки (0; 0; 1) – производные от правых частей по y' обращаются в бесконечность при $y' = 1$.

УРАВНЕНИЕ, НЕ СОДЕРЖАЩЕЕ НЕЗАВИСИМОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Уравнение вида

$$F(y, y', ..., y^{(n)}) = 0 \qquad (10.51)$$

допускает понижение порядка на единицу, если ввести новую искомую функцию: $p = y'$ и принять y за независимую переменную $(p = p(y))$. При этом производные $y'', y''', ..., y^{(n)}$ преобразуются так:

$$y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy}\,p\,;$$

$$y''' = \frac{dy''}{dx} = \frac{d}{dy}\left(\frac{dp}{dy}\cdot p\right)\cdot p = \left[\frac{d^2p}{dy^2}\,p + \left(\frac{dp}{dy}\right)^2\right]p\,;\ldots\,. \quad (10.52)$$

Подставляя эти выражения вместо y'', y''', … в уравнение, придем к дифференциальному уравнению (n – 1)-го порядка.

З а м е ч а н и е. Принимая y за независимую переменную, мы могли потерять решение вида $y = C$. Непосредственной подстановкой $y = C$ в уравнение (10.51) можно выяснить, имеет ли уравнение решения такого вида.

Пример 4. Решить уравнение $y'' + y'^2 = 2e^{-y}$.

∇ Уравнение не содержит независимую переменную x. Подставляя $y = C$ в уравнение, убеждаемся, что $y = C$ не является его решением. Полагая $y' = p$, $y'' = p\,\dfrac{dp}{dy}$, приходим к уравнению первого порядка $p\,\dfrac{dp}{dy} + p^2 = 2e^{-y}$ – уравнению Бернулли, решаемому, например, с помощью подстановки $p = uv$:

$$\frac{p^2}{2} = 2e^{-y} + \hat{C}_1e^{-2y}, \text{ откуда } p = \pm\sqrt{4e^{-y} + C_1e^{-2y}}\,.$$

Заменяя здесь p на y', разделяя переменные и интегрируя, будем иметь $x + C_2 = \pm\,\dfrac{1}{2}\sqrt{4e^{y} + C_1}$. #

Пример 5. Проинтегрировать уравнение $y'y''' - 3y''^2 = 0$.

∇ Положим $y' = p$; тогда $y'' = p\,\dfrac{dp}{dy}$, $y''' = p\left(\dfrac{dp}{dy}\right)^2 + p^2\,\dfrac{d^2p}{dy^2}$. Уравнение преобразуется к виду $p^2\left[\left(\dfrac{dp}{dy}\right)^2 + p\,\dfrac{d^2p}{dy^2} - 3\left(\dfrac{dp}{dy}\right)^2\right] = 0$. Приводя подобные члены и сокращая на p^2 [при этом следует учесть теряемое решение $p = 0$ ($y = C$)], получаем $p\,\dfrac{d^2p}{dy^2} - 2\left(\dfrac{dp}{dy}\right)^2 = 0$. Это дифференциальное уравнение рассматриваемого типа (10.51) (не содержит в явном виде «независимую» переменную y). Полагая здесь $q = \dfrac{dp}{dy}$, $\dfrac{d^2p}{dy^2} = q\,\dfrac{dq}{dp}$, придем к уравнению $pq\,\dfrac{dq}{dp} - 2q^2 = 0$. Сократив на q (при этом следует учесть еще одно решение $q = 0$, т.е. $p = C_1$ и $y = C_1x + C_2$), получим $\dfrac{dq}{q} - \dfrac{2dp}{p} = 0$, откуда $\ln|q| - \ln\, p^2 = \ln C_1$ или $q = \dfrac{dp}{dy} = C_1p^2$. Интегрируя последнее уравнение, находим $-\dfrac{1}{p} = \overline{C}_1 y + \overline{C}_2$, или $-\dfrac{dx}{dy} = \overline{C}_1 y + \overline{C}_2$. Окончательно получим $x = C_1y^2 + C_2y + C_3$, где $C_1 = -\dfrac{\overline{C}_1}{2}$, $C_2 = -\overline{C}_2$. Заметим, что в общее решение входят решения вида $y = C,\ \ y = C_1x + C_2$. #

З а м е ч а н и е. Может случиться, что уравнение принадлежит и к типу (10.50), и к типу (10.51); например, это уравнение $y''' = \sqrt{1 + (y'')^2}$. При их интегрировании предпочтение отдают методу, с помощью которого решение определяется проще; в данном примере следует считать, что это уравнение типа (10.50).

Задачи для самостоятельного решения

Найти область существования и единственности решения уравнения.

96. $y'' = x + \sqrt{x^2 - y'}$. **97**. $y'' = y' \ln y'$.

Показать, что данные выражения при любых действительных значениях входящих в них параметров определяют решения соответствующих дифференциальных уравнений.

98. $y = x\int\limits_0^x \dfrac{\sin t}{t}\,dt + \cos x + C_1x + C_2;\ \ xy'' = \sin x$.

99. $y = x^2 \ln x + C_1x^2 + C_2x + C_3,\ \ xy''' = 2$.

100. $C_1y = \sin(C_1x + C_2),\ \ yy'' + 1 = y'^2$.

Показать, что данные функции являются общими решениями соответствующих уравнений.

101. $y = C_1 \sin x + C_2 \cos x,\ \ y'' + y = 0.$

102. $y = C_1e^x + C_2e^{2x} + 1,\ \ y'' - 3y' + 2y = 2$.

Найти общие решения (интегралы) уравнений; там, где указано, найти частные решения уравнений при заданных начальных условиях.

103. $y'' = x + \sin x.$ **104**. $y'' = \operatorname{arctg} x.$ **105**. $y''' = \cos 2x$.

106. $xy''' = 2x + 3$. **107**. $y'' = xe^x,\ \ y(0) = 1,\ \ y'(0) = 0.$

108. $(1 + x^2)y'' + y'^2 + 1 = 0,\ \ y(0) = y'(0) = 1.$

109. $x^2y'' = y'^2.$ **110**. $2xy'y'' = y'^2 - 1$.

111. $y'' = \dfrac{y'}{x} + \dfrac{x^2}{y'},\ \ y(2) = 0,\ \ y'(2) = 4.$ **112**. $y'' + y' \operatorname{tg} x = \sin 2x.$

113. $xy''' = y'' - xy''$. **114**. $xy^{\mathrm{V}} = y^{\mathrm{IV}}$. **115**. $2yy'' = 1 + y'^2$.

116. $2y'' = 3y^2,\ y(2) = 1,\ y'(2) = -1$.

117. $y'' \cos y + y'^2 \sin y - y' = 0,\ y(-1) = \pi / 6,\ y'(-1) = 2$.

118. $yy'' - 2yy' \ln y = y'^2$. **119**. $y'^2 = (3y - 2y')y''$.

120. $y''' \cdot y'^2 = y''^3$. **121**. $yy'' + y = y'^2$.

122. $2yy'' + y^2 - y'^2 = 0,\ y(0) = y'(0) = 1$. **123**. $yy''' - y' \cdot y'' = 0$.

10.6. ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

10.6.1. ВВЕДЕНИЕ

Линейным уравнением n-го порядка называется уравнение вида

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = f(x); \qquad (10.53)$$

$p_i(x)$ $(i = \overline{1, n})$ называются *коэффициентами уравнения*, $f(x)$ – *его правой частью*.

Если при всех рассматриваемых значениях x функция $f(x) \equiv 0$, то уравнение (10.53) называется *линейным однородным*; в противном случае оно называется *линейным неоднородным*.

Теорема 1. Если коэффициенты $p_1(x), p_2(x), \ldots, p_n(x)$ и $f(x)$ непрерывны в интервале (a, b), то при $x_0 \in (a, b)$ для любых начальных условий (10.41) задача Коши имеет решение и оно единственно.

Всякое решение уравнения (10.53) является частным решением, так что особых решений оно не имеет.

1°. Однородное уравнение (ОЛДУ). Однородное линейное уравнение (ОЛДУ)

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_n(x)y = 0 \qquad (10.54)$$

(всегда) имеет нулевое решение $y \equiv 0$, удовлетворяющее нулевым начальным условиям $y = y' = \ldots = y^{(n-1)} = 0$ при $x = x_0$ и оно единственно (здесь x_0 – любая точка непрерывности коэффициентов $p_1(x), \ldots, p_n(x)$).

Фундаментальной системой решений (ФСР) уравнения (10.54) называется n его любых линейно независимых частных решений $y_1, y_2, \ldots, y_n$.

З а м е ч а н и е. Для любого ОЛДУ существует бесконечное число фундаментальных систем решений.

Приведем теорему о структуре общего решения ОЛДУ.

Теорема 2. Общее решение ОЛДУ есть линейная комбинация решений $y_1, y_2, ..., y_n$ фундаментальной системы:

$$y = C_1 y_2 + C_2 y_2 + ... + C_n y_n \ . \qquad (10.55)$$

Напомним определение линейно независимой системы функций и приведем критерий линейной независимости решений ОЛДУ.

Система из n функций $y_1, y_2, ..., y_n$ называется *линейно независимой* (на (a, b)) *системой*, если тождество

$$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + ... + \alpha_n y_n \overset{x}{\equiv} 0 \qquad (10.56)$$

выполняется лишь в случае $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n = 0$.

Теорема 3. Для того чтобы система решений $y_1, y_2, ..., y_n$ ОЛДУ (10.54) с непрерывными коэффициентами на интервале (a,b) была ФСР, необходимо и достаточно, чтобы ее *определитель Вронского*

$$W[y_1, ..., y_n] = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \qquad (10.57)$$

был отличен от нуля хотя бы в одной точке интервала (a, b). Ниже (п. 10.6.2) показывается, что построить ФСР в элементарных функциях удается всегда для уравнений с постоянными коэффициентами – для этих уравнений легко находится общее решение. Для уравнений с переменными коэффициентами общего (точного) метода построения ФСР не существует.

Пример 1. Показать, что система функций $1, x, x^2, x^3$ линейно независима на интервале ($(-\infty, +\infty)$.

∇ Равенство (10.56) может выполняться $\forall x \in (-\infty, +\infty)$ лишь при условии, что $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$; иначе в левой части будем иметь многочлен степени не выше третьей, который может обратиться в нуль не более чем при трех значениях x из данного интервала. #

Пример 2. Показать, что система функций $e^{k_1 x}, e^{k_2 x}, e^{k_3 x}$, где k_1, k_2, k_3 попарно различны, линейно независима на интервале $(-\infty; +\infty)$.

∇ Предположим противное; тогда в тождестве (10.56) $\exists \alpha_i \neq 0$. Пусть это $\alpha_3 \neq 0$. Деля обе части тождества (10.56) на $e^{k_1 x}$, получаем: $\alpha_1 + \alpha_2 e^{(k_2 - k_1)x} + \alpha_3 e^{(k_3 - k_1)x} \equiv 0$. Дифференцируя это тождество и деля обе части его на $e^{(k_2 - k_1)x}$, приходим к тождеству

$\alpha_2(k_2-k_1)+\alpha_3(k_3-k_1)e^{(k_3-k_2)x}\equiv 0$. Дифференцируя, получаем $\alpha_3(k_3-k_1)(k_3-k_2)e^{(k_3-k_2)x}\equiv 0$, что невозможно, так как $\alpha_3\neq 0$ по предположению, $k_3\neq k_2$, $k_3\neq k_1$ по условию и $e^{(k_3-k_2)x}\neq 0$. #

З а м е ч а н и е. Для случая двух функций $y_1(x)$ и $y_2(x)$ критерием их линейной зависимости является равенство $y_1(x)=C\cdot y_2(x)$ при некотором $C\in R$, $C=\text{const}$.

Пример 3. Функции $\operatorname{tg}x$ и $\operatorname{ctg}x$ линейно независимы в интервале $0<x<\pi/2$, так как их отношение $\dfrac{\operatorname{tg}x}{\operatorname{ctg}x}=\operatorname{tg}^2 x\neq\text{const}$ в этом интервале. Функции $y_1(x)=\sin 2x$ и $y_2(x)=\sin x\cos x$ линейно зависимы в интервале $-\infty<x<\infty$, так как $y_1(x)=2\cdot y_2(x)$.

Пример 4. Найти определитель Вронского для функций $y_i(x)=e^{k_ix}(i=1,2,3)$.

∇ Имеем

$$W[y_1,y_2,y_3]=\begin{vmatrix} e^{k_1x} & e^{k_2x} & e^{k_3x}\\ k_1e^{k_1x} & k_2e^{k_2x} & k_3e^{k_3x}\\ k_1^2e^{k_1x} & k_2^2e^{k_2x} & k_3^2e^{k_3x}\end{vmatrix}=(k_2-k_1)(k_3-k_1)(k_3-k_2)e^{(k_1+k_2+k_3)x}.\ \#$$

Пусть $y_1(x), y_2(x),\ldots, y_n(x)$ есть система из n линейно независимых на интервале (a, b) функций, имеющих все производные до n-го порядка включительно и пусть $W[y_1,\ldots,y_n]\neq 0$ на (a, b). Тогда уравнение

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \ldots & y_n(x) & y(x)\\ y_1'(x) & y_2'(x) & \ldots & y_n'(x) & y'(x)\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ y_1^{(n)}(x) & y_2^{(n)}(x) & \ldots & y_n^{(n)}(x) & y^{(n)}(x)\end{vmatrix}=0, \tag{10.58}$$

где $y(x)$ – неизвестная функция, определяет ОЛДУ, для которого функции $y_1(x), y_2(x),\ldots, y_n(x)$ составляют ФСР на интервале (a, b).

Пример 5. Составить ОЛДУ, для которого функции $y_1(x)=e^{x^2}$, $y_2(x)=e^{-x^2}$ образуют ФСР.

∇ Составим уравнение (10.58):

$$\begin{vmatrix} e^{x^2} & e^{-x^2} & y\\ 2xe^{x^2} & -2xe^{-x^2} & y'\\ (2+4x^2)e^{x^2} & (4x^2-2)e^{-x^2} & y''\end{vmatrix}=0,\quad\text{или}\quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & y\\ 2x & -2x & y'\\ 2+4x^2 & 4x^2-2 & y''\end{vmatrix}=0.$$

Раскрывая последний определитель по элементам третьего столбца, получаем искомое уравнение: $xy''-y'-4x^3y=0$. #

З а м е ч а н и е. В данном примере определитель Вронского $W[y_1, y_2]=-4x$ обращается в ноль при $x=0$, что не противоречит общей теории, так как, записав уравнение в виде $y''-\dfrac{1}{x}y'-4x^2y=0$, обнаружим, что коэффициент при y' терпит разрыв в точке $x=0$.

Если известно какое-либо частное решение $y_1(x)$ уравнения (10.54), то подстановка $y(x)=y_1(x)z(x)$ приводит это уравнение к линейному уравнению относительно функции $z(x)$, не содержащему (явно) этой функции и, следовательно, подстановка $u(x)=z'(x)$ понижает порядок этого уравнения на единицу.

Пример 6. Найти общее решение уравнения $(x^2+1)y''-2xy'+2y=0$, если функция $y_1(x)=x$ есть его частное решение.

∇ Подставив $y_1=x,\ y_1'=1,\ y_1''=0$ в уравнение, убеждаемся в том, что $y_1=x$ действительно является его частным решением. Положим $y=xz$, найдем $y'=xz'+z;\ y''=xz''+2z'$. Подставив $y,\ y',\ y''$ в уравнение, после преобразования придем к уравнению $x(x^2+1)z''+2z'=0$. Полагая здесь $z'=u,\ z''=u'$, приходим к уравнению первого порядка относительно функции $u: x(x^2+1)u'+2u=0$, общее решение которого имеет вид $u=C_1\dfrac{x^2+1}{x^2}$. Учитывая, что $u=z'$, придем к уравнению $dz=C_1\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)dx$, интегрируя которое, найдем: $z=C_1\left(x-\dfrac{1}{x}\right)+C_2$. Заменяя z по формуле $y=xz$, получаем общее решение исходного уравнения: $y=C_1(x^2-1)+C_2x$. #

З а м е ч а н и е 1. Изложенный метод обобщается на случай, когда известны k частных линейно независимых решений уравнения (10.54).

З а м е ч а н и е 2. Для построения общего решения ОЛДУ $y''+p(x)y'+q(x)y=0$ достаточно знать только одно ненулевое частное решение его. При этом второе частное решение y_2 можно найти по формуле $y_2=y_1\displaystyle\int\frac{e^{-\int p(x)dx}}{y_1^2}dx$.

Пример 7. Найти общее решение уравнения $x^2(\ln x-1)y''-xy'+y=0$, если известно его частное решение $y_1=x$.

∇ Найдем y_2: $y_2 = x\int \frac{e^{\int \frac{dx}{x(\ln x - 1)}}}{x^2}dx = -\ln x$. Поэтому общим решением уравнения будет $y = C_1x + C_2 \ln x$. #

2°. Неоднородные уравнения (НЛДУ). Приведем теорему о структуре общего решения НЛДУ.

Теорема 4. Общее решение НЛДУ (10.53) есть сумма общего решения (10.55) ОЛДУ (10.54) и любого частного решения $y_{ч}$ НЛДУ (10.53):

$$y = C_1y_1 + \ldots + C_ny_n + y_{ч}. \tag{10.59}$$

Все решения НЛДУ содержатся в формуле (10.59).

Приведем одно свойство решений НЛДУ (принцип суперпозиции решений): если правая часть НЛДУ (10.53) состоит из нескольких слагаемых и для НЛДУ с той же левой частью и правой частью, равной каждому из этих слагаемых в отдельности, мы можем найти частное решение, то сумма последних будет частным решением всего уравнения (10.53).

Для нахождения общего решения НЛДУ (обычно) применяют *метод вариации произвольных постоянных* (метод Лагранжа), который всегда дает возможность найти общее решение уравнения (10.53), если известна фундаментальная система решений соответствующего ему ОЛДУ (10.54). Этот метод заключается в том, что решение уравнения (10.53) ищется в том же виде, что и решение (10.55) ОЛДУ (10.54):

$$y = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2 + \ldots + C_n(x)y_n, \tag{10.60}$$

только здесь $C_1(x),\ C_2(x), \ldots C_n(x)$ – некоторые непрерывно дифференцируемые функции от x, подлежащие определению. Эти функции определяются из системы

$$\begin{cases} C_1'y_1 + C_2'y_2 + \ldots + C_n'y_n = 0; \\ C_1'y_1' + C_2'y_2' + \ldots + C_n'y_n' = 0; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_1'y_1^{(n-2)} + C_2'y_2^{(n-2)} + \ldots + C_n'y_n^{(n-2)} = 0; \\ C_1'y_1^{(n-1)} + C_2'y_2^{(n-1)} + \ldots + C_n'y_n^{(n-1)} = f(x). \end{cases} \tag{10.61}$$

Решая систему (10.61) как алгебраическую, находят производные C_i' от искомых функций; далее интегрированием восстанавливают и сами эти функции.

Пример 8. Зная, что функции $y_1(x)=\dfrac{\cos x}{x}$ и $y_2(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ образуют фундаментальную систему решений ОЛДУ $y''+\dfrac{2}{x}y'+y=0$ (см. задачу 150), найти общее решение уравнения $xy''+2y'+xy=x$.

∇ 1. Общее решение соответствующего ОЛДУ запишем в виде (10.55): $y=C_1\dfrac{\cos x}{x}+C_2\dfrac{\sin x}{x}$. 2. Найдем общее решение НЛДУ: а) нетрудно в данном случае подобрать частное решение: $y=1$. По формуле (10.59) записываем общее решение: $y=C_1\dfrac{\cos x}{x}+$ $+C_2\dfrac{\sin x}{x}+1$; б) найдем общее решение НЛДУ по методу вариации произвольных постоянных [формула (10.60)], для чего составим систему (10.61) (исходное уравнение следует привести к виду (10.53), поделив его на x): $C_1'\dfrac{\cos x}{x}+C_2'\dfrac{\sin x}{x}=0$; $C_1'\left(\dfrac{\cos x}{x}\right)'+C_2'\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)'=1$. Отсюда найдем: $C_1'=-x\sin x$, $C_2'=x\cos x$. Интегрируя, получаем $C_1(x)=x\cos x-\sin x+C_1$; $C_2(x)=x\sin x+$ $+\cos x+C_2$. По формуле (10.60) запишем общее решение НЛДУ:

$$y=(x\cos x-\sin x+C_1)\frac{\cos x}{x}+(x\sin x+\cos x+C_2)\frac{\sin x}{x}=$$

$$=C_1\frac{\cos x}{x}+C_2\frac{\sin x}{x}+1.\ \#$$

Пример 9. Проинтегрировать уравнение $(1+x^2)y''+xy'-y+1=0$, зная что соответствующее ОЛДУ имеет частное решение $y_1(x)=x$.

∇ 1. Найдем общее решение ОЛДУ $(1+x^2)y''+xy'-y=0$ (см. замечание 2). Найдем y_2:

$$y_2=x\int\frac{e^{-\int\frac{xdx}{1+x^2}}}{x^2}dx=x\int\frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}}=-x\int\frac{\frac{1}{x}d\left(\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}=-\sqrt{1+x^2}.$$

Общее решение ОЛДУ: $y_{oo}=C_1x+C_2\sqrt{1+x^2}$. 2. Найдем общее решение НЛДУ: а) очевидно, что $y=1$ есть частное решение и по формуле (10.59) общее решение НЛДУ: $y=C_1x+C_2\sqrt{1+x^2}+1$; б) найдем общее решение по методу вариации произвольных постоянных. Составим систему (10.61), приведя исходное уравнение к виду (10.53): $C_1'x + C_2'\sqrt{1+x^2} = 0;\ C_1' + C_2'\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}} = -\dfrac{1}{1+x^2}$. Решим систему алгебраически: $C_1' = -1,\ C_2' = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$. Интегрируя, найдем: $C_1(x) = -x + C_1,\quad C_2(x) = \sqrt{1+x^2} + C_2$ и общее решение НЛДУ $y = (-x + C_1)x + \left(\sqrt{1+x^2} + C_2\right)\sqrt{1+x^2} = C_1x + C_2\sqrt{1+x^2} + 1$. #

10.6.2. ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ n-го ПОРЯДКА С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

ОДНОРОДНЫЕ ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Рассматриваем уравнение (10.54), считая в нем коэффициенты $p_i = \text{const}\ (i = \overline{1, n})$. Это уравнение имеет ФСР $y_1(x),\ y_2(x), ..., y_n(x)$, определенную $\forall x \in (-\infty, +\infty)$ и состоящую из степенных, показательных и тригонометрических функций. Ей соответствует общее решение $y = C_1y_1 + C_2y_2 + ... + C_ny_n$ в области $|x| < \infty,\ |y| < \infty,$ $|y'| < \infty, ..., \left|y^{(n-1)}\right| < \infty$, т.е. задача Коши однозначно решается при любых начальных условиях (10.41).

ФСР ОЛДУ строится по методу Эйлера: частное решение ОЛДУ ищем в виде

$$y = e^{\lambda x}, \tag{10.62}$$

где λ – некоторое постоянное число (действительное или комплексное), подлежащее определению. Для его определения составляется характеристическое уравнение

$$\lambda^n + p_1\lambda^{n-1} + ... + p_{n-1}\lambda + p_n = 0. \tag{10.63}$$

Структура ФСР зависит от вида корней $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ уравнения (10.63).

1. Все корни характеристического уравнения (10.63) различны и действительны. ФСР в этом случае имеет вид: $y_1 = e^{\lambda_1 x}$, $y_2 = e^{\lambda_2 x}, ..., y_n = e^{\lambda_n x}$ и общее решение запишется по формуле (10.55): $y = C_1e^{\lambda_1 x} + C_2e^{\lambda_2 x} + ... + C_ne^{\lambda_n x}$.

2. Все корни (10.63) различны, но среди них имеются комплексные. Пусть $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ – комплексный корень; тогда $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ – тоже корень (10.63). Этим двум корням соответствуют два линейно независимых частных решения $y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x,\ y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x$. Если корни λ_1 и λ_2 чисто мнимые: $\lambda_{1,2} = \pm i\beta$, то им соответствуют линейно независимые решения $y_1 = \cos\beta x,\ y_2 = \sin\beta x$. Корням

$\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ в формуле общего решения (10.55) соответствует выражение вида $e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$, а чисто мнимым корням $\lambda_{1,2} = \pm i\beta$ отвечает сумма $C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x$.

3. Среди корней характеристического уравнения (10.63) имеются кратные корни.

а) Пусть λ_1 – действительный k-кратный корень. Тогда ему соответствует k линейно независимых частных решений $e^{\lambda_1 x}, xe^{\lambda_1 x}, ..., x^{k-1}e^{\lambda_1 x}$, а в формуле (10.55) – выражение вида $e^{\lambda_1 x}(C_1 + C_2 x + ... + C_k \cdot x^{k-1})$.

б) Если $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ есть комплексный корень (10.63) кратности k, то ему и сопряженному с ним корню $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ той же кратности соответствуют $2k$ линейно независимых частных решений вида

$$e^{\alpha x} \cos \beta x,\ xe^{\alpha x} \cos \beta x, ..., x^{k-1}e^{\alpha x} \cos \beta x,$$

$$e^{\alpha x} \sin \beta x,\ xe^{\alpha x} \sin \beta x, ..., x^{k-1}e^{\alpha x} \sin \beta x.$$

В формуле общего решения (10.55) этим корням соответствует выражение вида

$$e^{\alpha x}[\left(C_1 + C_2 x + ... + C_k x^{k-1} \right) \cos \beta x + \left(C_{k+1} + C_{k+2} x + ... + C_{2k} x^{k-1} \right) \sin \beta x].$$

Паре чисто мнимых корней $\lambda_{1,2} = \pm i\beta$ кратности k отвечает сумма

$$(C_1 + C_2 x + ... + C_k x^{k-1}) \cos \beta x + (C_{k+1} + C_{k+2} x + ... + C_{2k} x^{k-1}) \sin \beta x.$$

Пример 1. Найти общее решение уравнения $y'' + 3y' + 2y = 0$.

∇ Характеристическое уравнение (10.63) имеет вид $\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$, откуда $\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = -2$ – действительные различные числа. Общее решение (см. п. 1): $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x}$. #

Пример 2. Проинтегрировать уравнение $y''' + 2y'' + y' = 0$.

∇ Уравнение (10.63): $\lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda = 0$ имеет корни $\lambda_1 = \lambda_2 = -1,\ \lambda_3 = 0$. Корни действительные, причем один из них: $\lambda = -1$ – двукратный. Общее решение имеет вид [см. п. 3,а)]: $y = e^{-x}(C_1 + C_2 x) + C_3$. #

Пример 3. Найти общее решение уравнения $y'' + 2y' + 5y = 0$.

∇ Характеристическое уравнение $\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0$ имеет корни $\lambda_{1,2} = -1 \pm 2i$. Следовательно (см. п. 2), функции $y_1 = e^{-x} \cos 2x$, $y_2 = e^{-x} \sin 2x$ составляют ФСР, а общее решение имеет вид: $y = e^{-x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$. #

Пример 4. Найти частное решение уравнения $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$, удовлетворяющее начальным условиям: $y(0) = 1,\ y'(0) = 2,\ y''(0) = 3$.

∇ Характеристическое уравнение $\lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1 = 0$ имеет единственный корень $\lambda = 1$ кратности k = 3. ФСР имеет вид [см. п. 3,а)]:

$y_1 = e^x$, $y_2 = xe^x$, $y_3 = x^2e^x$; следовательно, $y = (C_1 + C_2x + C_3x^2)e^x$ – общее решение.

Для определения произвольных постоянных найдем производные: $y' = e^x[C_1 + C_2(x+1) + C_3(x^2 + 2x)]$, $y'' = e^x[C_1 + C_2(x+2) + C_3(x^2 + 4x + 2)]$.

Подставляя в y, y' и y'' начальные данные, получим систему: $C_1 = 1$, $C_1 + C_2 = 2$, $C_1 + 2C_2 + 2C_3 = 3$, откуда находим $C_2 = 1$, $C_3 = 0$. Искомое частное решение: $y = (1+x)e^x$. #

Пример 5. Найти общее решение уравнения $y^{\mathrm{V}} - 2y^{\mathrm{IV}} + 2y''' - 4y'' + y' - 2y = 0$.

∇ Характеристическое уравнение $\lambda^5 - 2\lambda^4 + 2\lambda^3 - 4\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$ или $(\lambda - 2)(\lambda^2 + 1)^2 = 0$ имеет корни $\lambda = 2$ – простой и $\lambda = \pm i$ – пара двукратных мнимых корней. Общее решение [см. п. 3,б)]: $y = C_1e^{2x} + (C_2 + C_3x)\cos x + (C_4 + C_5x)\sin x$. #

Пример 6. Проинтегрировать уравнение $y^{\mathrm{IV}} + 4y''' + 8y'' + 8y' + 4y = 0$.

∇ Уравнение (10.63) представимо в виде $(\lambda^2 + 2\lambda + 2)^2 = 0$, имеет двукратные комплексные корни $\lambda_1 = \lambda_2 = -1 - i$, $\lambda_3 = \lambda_4 = -1 + i$ и, следовательно, общее решение [см. п. 3,б)]: $y = e^{-x}\left[\left(C_1 + C_2x\right)\cos x + \left(C_3 + C_4x\right)\sin x\right]$. #

НЕОДНОРОДНЫЕ ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

1°. НЛДУ с постоянными коэффициентами – уравнение (10.53), в котором коэффициенты $p_i = \mathrm{const}$ $(i = \overline{1, n})$, при помощи метода вариации произвольных постоянных всегда может быть проинтегрировано в квадратурах от элементарных функций, ибо, как только что было показано, соответствующее ему ОЛДУ (10.54) с постоянными коэффициентами имеет ФСР, состоящую из элементарных функций.

Пример 1. Найти общее решение уравнения $y''' + y' = \operatorname{tg} x$.

∇ ФСР соответствующего ОЛДУ $y''' + y' = 0$, полученная по методу Эйлера, состоит из функций: $y_1 = 1$, $y_2 = \cos x$, $y_3 = \sin x$. Для нахождения общего решения НЛДУ воспользуемся методом вариации произвольных постоянных. Составим систему (10.61):

$$\begin{cases} C_1' + C_2' \cos x + C_3' \sin x = 0; \\ -C_2' \sin x + C_3' \cos x = 0; \\ -C_2' \cos x - C_3' \sin x = \operatorname{tg} x, \end{cases}$$

откуда алгебраическим путем определим: $C_1' = \operatorname{tg} x$; $C_2' = -\sin x$;

$C_3' = \dfrac{-\sin^2 x}{\cos x}$. Интегрирование дает: $C_1(x) = -\ln|\cos x| + C_1$; $C_2(x) = \cos x + C_2$; $C_3(x) = \sin x - \ln\left|\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{x}{2}\right)\right| + C_3$ и общее решение имеет вид:

$$y = (C_1 - \ln|\cos x|)\,1 + (C_2 + \cos x)\cos x +$$
$$+\left(C_3 + \sin x - \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)\right|\right)\sin x =$$
$$= C_1 + C_2\cos x + C_3\sin x - \ln|\cos x| - \sin x \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)\right|. \#$$

2°. В некоторых случаях для НЛДУ с постоянными коэффициентами удается найти частное решение методом неопределенных коэффициентов, исходя из заранее известного вида последнего – для НЛДУ с постоянными коэффициентами с *правой частью специального вида*. Укажем эти случаи и соответствующие им виды частных решений.

1) $f(x) = P(x)$, где $P(x)$ – многочлен от x; в частности, это может быть число $A \neq 0$. Тогда: а) если число 0 не является корнем характеристического уравнения (10.63), то частное решение НЛДУ можно найти в виде

$$y_ч = Q(x), \tag{10.64}$$

где $Q(x)$ – многочлен той же степени, что и $P(x)$, но с неопределенными (подлежащими определению путем подстановки (10.64) в НЛДУ) коэффициентами; б) если 0 есть корень уравнения (10.63) кратности k, то

$$y_ч = x^k Q(x). \tag{10.64′}$$

2) $f(x) = P(x)e^{ax}$. Если число a не является корнем характеристического уравнения (10.63), то

$$y_ч = Q(x)e^{ax}. \tag{10.65}$$

Если a – корень (10.63) кратности k, то

$$y_ч = x^k Q(x)e^{ax}. \tag{10.65′}$$

3) $f(x) = e^{ax}\left[P_1(x)\cos bx + P_2(x)\sin bx\right]$, где $P_1(x)$ и $P_2(x)$ – многочлены от x. Эти многочлены, в частности, могут быть числами, и один из них может быть нулем. Пусть m есть наивысшая из степеней многочленов $P_1(x)$ и $P_2(x)$. Тогда:

а) если число $a + ib$ не является корнем (10.63), то

$$y_ч = e^{ax}\left[Q_1(x)\cos bx + Q_2(x)\sin bx\right], \tag{10.66}$$

где $Q_1(x)$ и $Q_2(x)$ – многочлены степени m с неопределенными коэффициентами;

б) если $a+ib$ есть корень характеристического уравнения (10.63) кратности k, то

$$y_ч = x^k e^{ax}\left[Q_1(x)\cos bx + Q_2(x)\sin bx\right]. \qquad (10.66')$$

4) $f(x) = f_1(x) + f_2(x) + ... + f_m(x)$, где $f_1(x), f_2(x), ..., f_m(x)$ – функции видов, рассмотренных в пп. 1–3. Если $y_1, y_2, ..., y_m$ есть частные решения, соответствующие НЛДУ с правыми частями $f_1(x), f_2(x), ..., f_m(x)$, то

$$y_ч = y_1 + y_2 + ... + y_m \qquad (10.67)$$

является частным решением всего (исходного) уравнения (см. принцип суперпозиции, п.2, § 10.6.1).

Пример 6. Проинтегрировать уравнение $y''' - y'' + y' - y = x^2 + x$.

∇ 1. Найдем общее решение соответствующего ему ОЛДУ. Характеристическое уравнение $\lambda^3 - \lambda^2 + \lambda - 1 = 0$ имеет различные корни: $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -i,\ \lambda_3 = i$ и общее решение ОЛДУ: $y_{oo} = C_1 e^x + C_2 \cos x + C_3 \sin x$. 2. Здесь $f(x) = x^2 + x$ – многочлен 2-й степени. Так как число ноль не является корнем характеристического уравнения, то частное решение ищем в виде (10.64): $y_ч = Ax^2 + Bx + C;\ A, B, C$ – неизвестные, подлежащие определению коэффициенты. Подставляя y в исходное НЛДУ, получаем: $-Ax^2 + (2A - B)x + (B - 2A - C) \equiv x^2 + x$, откуда, сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получаем систему уравнений: $-A = 1;\ 2A - B = 1;\ \ B - 2A - C = 0$. Решая ее, находим: $A = -1,\ B = -3,\ C = -1$ и частное решение имеет вид: $y_ч = -x^2 - 3x - 1$. По формуле (10.59) общее решение исходного уравнения имеет вид: $y = C_1 e^x + C_2 \cos x + C_3 \sin x - x^2 - 3x - 1$. #

Пример 7. В каком виде следует искать частое решение НЛДУ $y''' - y'' = 12x^2 + 6x$?

∇ Характеристическое уравнение $\lambda^3 - \lambda^2 = 0$ имеет корни $\lambda_1 = \lambda_2 = 0,\ \lambda_3 = 1$. Так как число 0 есть двукратный корень характеристического уравнения, то частное решение следует искать по рекомендации (10.64′):

$$y_ч = x^2(Ax^2 + Bx + C) = Ax^4 + Bx^3 + Cx^2.$$

Ответ. $y = C_1 + C_2 x + C_3 \cdot e^x - x^4 - 5x^3 - 15x^2$. #

Пример 8. Проинтегрировать уравнение $y''+10y'+25y=4e^{-5x}$.

∇ 1. Характеристическое уравнение $\lambda^2+10\lambda+25=0$ имеет двукратный корень $\lambda_1=\lambda_2=-5$, поэтому общее решение ОЛДУ $y_{oo}=(C_1+C_2x)e^{-5x}$. 2. Здесь $f(x)=4e^{-5x}$, $P(x)\equiv 4$. Так как a = –5 является корнем характеристического уравнения кратности k = 2, то частное решение $y_ч$ НЛДУ ищем по формуле (10.65′): $y_ч=Bx^2e^{-5x}$. Тогда $y'_ч=B(2x-5x^2)e^{-5x}$, $y''_ч=B(2-20x+25x^2)e^{-5x}$. Подставляя $y_ч$, $y'_ч$ и $y''_ч$ в исходное уравнение, получаем $2Be^{-5x}=4e^{-5x}$, откуда $B=2$ и $y_ч=2x^2e^{-5x}$. Общее решение исходного НЛДУ: $y=(C_1+C_2x)e^{-5x}+2x^2e^{-5x}$. #

Пример 9. Найти общее решение уравнения $y''+3y'+2y=$ $=x\sin x$.

∇ 1. Характеристическое уравнение $\lambda^2+3\lambda+2=0$ имеет корни $\lambda_1=-1$, $\lambda_2=-2$, поэтому $y_{oo}=C_1e^{-x}+C_2e^{-2x}$. 2. Здесь $f(x)=x\sin x\equiv 0\cos x+x\sin x$. Для определения частного решения используем рекомендацию (10.66). Число $a+ib=i$ не является корнем характеристического уравнения. Определим m: $m=\sup\{0;1\}=1$ и, таким образом, $y_ч=(A_1x+A_2)\cos x+(B_1+B_2x)\sin x$. Найдем $y'_ч$ и $y''_ч$ и подставим $y_ч$, $y'_ч$ и $y''_ч$ в заданное уравнение; получим, собрав в левой части отдельно члены, содержащие cos$x$, отдельно содержащие sin$x$: $[(A_1+3B_1)x+3A_1+A_2+2B_1+3B_2]\cos x+$ + $[(-3A_1+B_1)x-2A_1-3A_2+3B_1+B_2]\sin x=0\cos x+x\sin x$. Сравнивая отдельно выражения при cos$x$ и при sin$x$ слева и справа, приходим к системе уравнений:

$$A_1+3B_1=0; \qquad -3A_1+B_1=1;$$
$$3A_1+A_2+2B_1+3B_2=0; \qquad -2A_1-3A_2+3B_1+B_2=0.$$

Решая, получаем $A_1=-3/10$; $A_2=17/50$; $B_1=1/10$; $B_2=3/25$ и частное решение $y_ч=\left(-\frac{3}{10}x+\frac{17}{50}\right)\cos x+\left(\frac{1}{10}x+\frac{3}{25}\right)\sin x$. Общее решение запишется по формуле (10.59):

$$y=C_1e^{-x}+C_2e^{-2x}+\left(-\frac{3}{10}x+\frac{17}{50}\right)\cos x+\left(\frac{1}{10}x+\frac{3}{25}\right)\sin x. \#$$

Пример 10. Проинтегрировать уравнение $y''+y=\sin x+\cos 2x$.

∇ 1. Найдем общее решение соответствующего ОЛДУ: $y''+y=0$, $\lambda^2+1=0$, $\lambda_1=i$, $\lambda_2=-i$; $y_{oo}=C_1\cos x+C_2\sin x$.

2. Частное решение уравнения $y''+y=\sin x$ (1) следует искать в виде (10.66′), так как число $a+ib=i$ является простым корнем характеристического уравнения: $y_1=x(A\cos x+B\sin x)$. Подставляя y_1 в уравнение (1), получаем: $2A\sin x+2B\cos x=\sin x$, откуда и $y_1=-\frac{1}{2}x\cos x$. Для уравнения $y''+y=\cos 2x$ (2) имеем $y_2=A\cos 2x+B\sin 2x$ – используем формулу (10.66), ибо здесь $a+ib=2i$ не является корнем характеристического уравнения. Подставляя y_2 в (2), находим $A=-\frac{1}{3}$, $B=0$, так что $y_2=-\frac{1}{3}\cos 2x$. Используя формулу (10.59) и принцип суперпозиции частных решений, запишем общее решение НЛДУ:

$$y=C_1\cos x+C_2\sin x-\frac{1}{2}x\cos x-\frac{1}{3}\cos 2x.\ \#$$

Пример 11. Найти общее решение НЛДУ $y''+2y'+5y=$ $=e^{-x}\cos 2x$.

∇ 1. Характеристическое уравнение $\lambda^2+2\lambda+5=0$ имеет корни $\lambda_{1,2}=-1\pm 2i$, так что $y_{oo}=(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)e^{-x}$. 2. Здесь $f(x)=e^{-x}(1\cos 2x+0\sin 2x)$ и так как число $a+ib=-1+2i$ является простым корнем характеристического уравнения, частное решение надо искать в виде (10.66′): $y_ч=x(A\cos 2x+B\sin 2x)e^{-x}$; тогда $y_ч'=[\left(A-Ax+2Bx\right)\cos 2x+\left(B-Bx-2Ax\right)\sin 2x]e^{-x}$,

$y_ч''=[(-2A-3Ax+4B-4Bx)\cos 2x+(-2B-3Bx-4A+4Ax)\sin 2x]\,e^{-x}$.

Подставляя $y_ч$, $y_ч'$ и $y_ч''$ в исходное уравнение и сокращая на e^{-x}, получаем $-4A\sin 2x+4B\cos 2x=\cos 2x$, откуда $A=0$, $B=1/4$ и $y_ч=0{,}25xe^{-x}\sin 2x$. Общее решение НЛДУ:

$$y=(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)e^{-x}+\ 0{,}25xe^{-x}\sin 2x.\ \#$$

Задачи для самостоятельного решения

Исследовать на линейную зависимость в области их совместного определения системы функций.

124. $x, \ln x$. **125.** $1,\ 2,\ x,\ x^2$. **126.** e^x, xe^x, x^2e^x. **127.** $x, 0, e^x$.

128. $\sin x, \cos x, \cos 2x$. **129.** $5,\ \cos^2 x, \sin^2 x$.

130. $\cos x,\ \cos(x+1),\ \cos(x-2)$. **131.** $e^x,\ e^{x+1}$.

132. $1,\ \arcsin x,\ \arccos x$. **133.** $2\pi,\ \mathrm{arctg}\,\frac{x}{2\pi}, \mathrm{arcctg}\,\frac{x}{2\pi}$.

В задачах 134–139 найти определитель Вронского для указанных систем функций.

134. $1,\ x$. **135.** $1,\ 2,\ x^2$. **136.** $e^{-x},\ xe^{-x}$. **137.** $e^x,\ 2e^x,\ e^{-x}$.

138. $2,\ \cos x,\ \cos 2x$. **139.** $e^x \sin x,\ e^x \cos x$.

По заданной ФСР ОЛДУ составить уравнение.

140. $1,\ e^{-x}$. **141.** $e^{2x} \cos x,\ e^{2x} \sin x$. **142.** $x^3,\ x^4$.

143. $1,\ x,\ e^x$. **144.** $1,\ \sin x,\ \cos x$. **145.** $2x,\ x-2,\ e^x+1$.

146. e^{3x}, e^{5x}. **147.** $e^{2x},\ \sin x,\ \cos x$.

Найти общее решение ОЛДУ, если известно одно частное решение.

148. $y''-6y'+5y=0,\ y_1=e^x$. **149.** $y''-2y'-3y=0,\ y_1=e^{-x}$.

150. $xy''+2y'+xy=0,\ y_1=\dfrac{\sin x}{x}$. **151.** $(1-x^2)y''-2xy'+2y=0,\ y_1=x$.

152. $x^2(\ln x-1)y''-xy'+y=0,\ y_1=x$.

153. $y''+(\operatorname{tg} x-2\operatorname{ctg} x)y'+2\operatorname{ctg}^2 x\cdot y=0,\ y_1=\sin x$.

154. $y''+\operatorname{tg} x\cdot y'+\cos^2 x\cdot y=0,\ y_1=\cos(\sin x)$.

В приведенных ниже НЛДУ, зная одно частное решение y_1 соответствующего ОЛДУ и угадав некоторое частное решение y_2 НЛДУ либо применив метод вариации произвольных постоянных, найти общее решение.

155. $x^2y''-xy'-3y=5x^4,\ y_1=\dfrac{1}{x}$. **156.** $(x-1)y''-xy'+y=(x-1)^2e^x,\ y_1=e^x$.

157. $y''+y'+e^{-2x}y=e^{-3x},\ y_1=\cos e^{-x}$.

158. $(x^4-x^3)y''+(2x^3-2x^2-x)y'-y=\dfrac{(x-1)^2}{x},\ y_1=\dfrac{1}{x}$.

159. $y''-y'+ye^{2x}=xe^{2x}-1,\ y_1=\sin e^x$.

160. $x(x-1)y''-(2x-1)y'+2y=x^2(2x-3),\ y_1=x^2$.

В уравнениях 161–165 частным решением ОЛДУ является $y_1=1$. Найти их общие решения.

161. $xy''-(1+2x^2)y'=4x^3e^{x^2}$. **162.** $y''-2y'\operatorname{tg} x=1$.

163. $x\ln x\cdot y''-y'=\ln^2 x$. **164.** $xy''+(2x-1)y'=-4x^2$.

165. $y''+y'\operatorname{tg} x=\cos x\cdot\operatorname{ctg} x$.

Проинтегрировать следующие ОЛДУ с постоянными коэффициентами.

166. $y''+6y'+8y=0$. **167.** $y'''-2y'=0$.

168. $y'''-2y''-y'+2y=0$. **169.** $y'''-13y'-12y=0$.

170. $y^{\mathrm{V}}-10y'''+9y'=0$. **171.** $y''+2y'+2y=0$.

172. $y''-y'+y=0.$ **173.** $y'''-y=0.$ **174.** $y'''-2y''+9y'-18y=0.$

175. $y^{\text{IV}}+y=0.$ **176.** $y^{\text{VI}}-y=0.$ **177.** $y'''-6y''+12y'-8y=0.$

178. $y'''+y''=0.$ **179.** $y^{\text{IV}}-2y'''+2y''-2y'+y=0.$

180. $y^{\text{IV}}-4y'''+8y''-16y'+16y=0.$ **181.** $y^{\text{IV}}+8y''+16y=0.$

182. $y^{\text{IV}}+2y'''+3y''+2y'+y=0.$ **183.** $y^{\text{V}}+8y'''+16y'=0.$

184. $y^{\text{V}}+y^{\text{IV}}+2y'''+2y''+y'+y=0.$

Методом вариации произвольных постоянных решить следующие НЛДУ с постоянными коэффициентами.

185. $y''+y+\operatorname{ctg}^2 x=0.$ **186.** $y''-2y'+y=\dfrac{e^x}{\sqrt{4-x^2}}.$

187. $y''+y=\dfrac{1}{\cos^3 x}.$ **188.** $y''-2y'+y=\dfrac{e^x}{x^2+1}.$

189. $y''-2y'+y=\dfrac{x^2+2x+2}{x^3}.$ **190.** $y''-y=4\sqrt{x}+\dfrac{1}{x\sqrt{x}}.$

191. $y''+4y'+4y=e^{-2x}\ln x.$ **192.** $y'''+y''=\dfrac{x-1}{x^2}.$

Определить вид частного решения НЛДУ, если известны корни его характеристического уравнения и правая часть $f(x)$ – функция специального вида.

193. $\lambda_1=1,\ \lambda_2=2;\ f(x)=x^2-3.$ **194.** $\lambda_1=0,\ \lambda_2=1;\ f(x)=3x^2+3x-1.$

195. $\lambda_1=\lambda_2=0;\ f(x)=10x^2+x-4.$ **196.** $\lambda_1=0,\ \lambda_2=\lambda_3=1;\ f(x)=x^3-3.$

197. $\lambda_1=1,\ \lambda_2=2;\ f(x)=e^{-x}(x-10).$

198. $\lambda_1=1,\ \lambda_2=\lambda_3=\lambda_4=0;\ f(x)=e^x(x-10).$

199. $\lambda_1=0,\ \lambda_2=1;\ f(x)=\sin x+\cos x.$

200. $\lambda_1=\lambda_2=+3i,\ \lambda_3=\lambda_4=-3i,\ \lambda_5=-1,\ \lambda_6=0;\ f(x)=x^2\cos 3x.$

201. $\lambda_1=-1+i,\ \lambda_2=-1-i,\ \lambda_3=\lambda_4=0,\ f(x)=e^{-x}(x\cos x-\sin x).$

Пользуясь принципом суперпозиции, определить вид частного решения следующих НЛДУ.

202. $y''-y'-2y=e^x+e^{-2x}.$ **203.** $y''+4y'=x+e^{-4x}.$

204. $y''-y=x+\sin x.$ **205.** $y''-2y'+2y=(1+\sin x)e^x.$

206. $y'''-y''=1+e^x.$ **207.** $y'''+4y'=e^{2x}+\sin 2x.$

208. $y''+4y=\sin x\sin 2x.$ **209.** $y''-4y'=2\cos^2 4x.$

Проинтегрировать следующие НЛДУ, найдя их частные решения методом неопределенных коэффициентов.

210. $y''-y=x^2-x+1.$ **211.** $y''-4y'=-12x^2+6x-4.$

212. $y''+5y'+6y=3.$ **213.** $y''+y'=3.$ **214.** $y''+y=4e^x.$

215. $y''-y=4e^x.$ **216.** $y''-2y'+y=4e^x.$

217. $y''-2y'-3y=-4e^x+3.$ **218.** $y''-3y'+2y=3e^{2x}+2x^2.$

219. $y''-3y'=e^{3x}-18x.$ **220.** $y'''+6y''+12y'+8y=3e^{-2x}.$

221. $y'''-y''=-3x+1.$ **222.** $y^{\mathrm{IV}}-y=4e^x.$

223. $y''-y=2\sin x-4\cos x.$ **224.** $y''+y=6\sin 2x.$

225. $y''-y'+y=-13\sin 2x.$ **226.** $y''+4y=\sin 2x.$

227. $y''+y=e^x+\cos x.$ **228.** $y''+y=\cos x+\cos 2x.$

229. $y''-4y=e^x\left[(-4x+4)\cos x-(2x+6)\sin x\right].$

230. $y''-2y'+2y=e^x(2\cos x-4\sin x).$

231. $y''+y=2\sin x+4x\cos x.$

232. $y'''-y''+4y'-4y=3e^{2x}-4\sin 2x.$

233. $y^{\mathrm{IV}}-y=4\sin x-8e^{-x}+1.$ **234.** $y^{\mathrm{IV}}+2y''+y=\cos x.$

235. $y''-y=\cos^2 x.$ **236.** $y''+4y=\cos^2 x.$

237. $y''+y=\sin x\cos 3x.$ **238.** $y''-y=\operatorname{ch} x.$

Найти решения НЛДУ, удовлетворяющие поставленным начальным условиям.

239. $y''+4y=\sin 2x;\ y=y'=0$ при $x=0.$

240. $y''-y=x;\ y=1,\ y'=-1$ при $x=0.$

241. $y''+4y'+4y=3e^{-2x};\ y=y'=0$ при $x=0.$

242. $y''-5y'+6y=(12x-7)e^{-x};\ y=y'=0$ при $x=0.$

243. $y''+y=4x\cos x;\ y=0,\ y'=1$ при $x=0.$

244. $y''-6y'+9y=16e^{-x}+9x-6;\ y=y'=1$ при $x=0.$

245. $y'''-y'=-2x;\ y=0,\ y'=1,\ y''=2$ при $x=0.$

246. $y^{\mathrm{IV}}-y=8e^x;\ y=-1,\ y'=0,\ y''=0\ ,\ y'''=0$ при $x=0.$

10.7. СИСТЕМЫ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

10.7.1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ. СВЯЗЬ С ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМИ УРАВНЕНИЯМИ *n*-го ПОРЯДКА

1°. Нормальные системы

Система обыкновенных ДУ вида

$$\begin{aligned}
&\frac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_2, ..., y_n);\\
&\frac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1, y_2, ..., y_n);\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\frac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1, y_2, ..., y_n),
\end{aligned} \tag{10.68}$$

где $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$ – неизвестные (искомые) функции, $f_1, f_2, ..., f_n$ – известные функции, заданные и непрерывные в некоторой области, называется *нормальной системой*. Число n называется порядком системы (10.68).

Если правые части системы (10.68) являются линейными функциями от $y_i (i = \overline{1, n})$:

$$\begin{aligned}
&\frac{dy_1}{dx} = p_{11}(x)y_1 + p_{12}(x)y_2 + ... + p_{1n}(x)y_n + f_1(x);\\
&\frac{dy_2}{dx} = p_{21}(x)y_1 + p_{22}(x)y_2 + ... + p_{2n}(x)y_n + f_2(x);\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\frac{dy_n}{dx} = p_{n1}(x)y_1 + p_{n2}(x)y_2 + ... + p_{nn}(x)y_n + f_n(x),
\end{aligned} \tag{10.69}$$

то такая система называется *линейной*.

Совокупность n функций

$$y_1 = \varphi_1(x),\ y_2 = \varphi_2(x), ...,\ y_n = \varphi_n(x), \tag{10.70}$$

определенных и непрерывно дифференцируемых в интервале (a, b), называется *решением системы* (10.68) в интервале (a, b), если функции (10.70) обращают (все) уравнения системы (10.68) в тождества [на интервале (a, b)]. Кривая в $(n+1)$-мерном пространстве $(x, y_1, y_2, ..., y_n)$, соответствующая (10.70), называется интегральной кривой.

Задача нахождения решения (10.70), удовлетворяющего начальным условиям

$$y_1 = y_1^{(0)},\ y_2 = y_2^{(0)},\ ...,\ y_n = y_n^{(0)} \text{ при } x = x_0, \qquad (10.71)$$

где $x_0,\ y_1^{(0)},\ y_2^{(0)},\ ...,\ y_n^{(0)}$ суть заданные числа (начальные данные), называется задачей Коши.

Теорема (достаточные условия существования и единственности решения задачи Коши). Пусть функции $f_i(x, y_1, ..., y_n)$, $i = \overline{1, n}$, в (10.68) определены и непрерывны в (n + 1)-мерной области D изменения переменных $(x, y_1, y_2, ..., y_n)$ вместе частными производными $\frac{\partial f_i}{\partial x_k}$, $i = \overline{1, n}, k = \overline{1, n}$. Тогда для любой точки $M_0(x_0, y_1^{(0)}, y_2^{(0)},$ $..., y_n^{(0)}) \in D$ найдется интервал $x_0 - h < x < x_0 + h$ изменения x, в котором существует и единственно решение нормальной системы (10.68), удовлетворяющее начальным условиям (10.71).

Совокупность n функций

$$y_i = \varphi_i(x, C_1, ..., C_n) \ \ (i = \overline{1, n}), \qquad (10.72)$$

определенных в некоторой области изменения переменных $x, C_1, ..., C_n$ и имеющих непрерывные частные производные по x, называется *общим решением* (10.68) в области D изменения переменных $(x, y_1, y_2, ..., y_n)$, в каждой точке которой имеет место существование и единственность решения задачи Коши, если система (10.72): 1) является решением системы (10.68) на некотором интервале действительной оси, где $\forall x$ точки $(x, y_1(x), ..., y_n(x)) \in D$; 2) какие бы начальные условия (10.71) ни задать, $\exists C_1, C_2, ..., C_n$ такие, что эти начальные условия будут удовлетворены.

Решение (10.70), в каждой точке которого имеет место существование и единственность решения задачи Коши, называется *частным решением*. Решение, в каждой точке которого нарушается единственность решения задачи Коши, называется *особым.*

Функция $\Psi(x, y_1, ..., y_n)$, определенная и непрерывная вместе с частными производными $\frac{\partial \Psi}{\partial x}, \frac{\partial \Psi}{\partial y_1}, ... \frac{\partial \Psi}{\partial y_n}$ в некоторой области D изменения переменных и принимающая $\forall\ x \in (a, b)$ постоянное значение при подстановке в нее произвольного решения системы, называется *первым интегралом* нормальной системы (10.68):

$$\Psi(x, y_1, ..., y_n) = C, \qquad (10.73)$$

если $y_1, ..., y_n$ – решение (10.68), а C – произвольная постоянная.

Следующая теорема устанавливает условия того, что функция $\Psi(x, y_1, ..., y_n)$ является первым интегралом системы (10.68).

Теорема. Для того чтобы функция $\Psi(x, y_1, ..., y_n)$ была первым интегралом системы (10.68), необходимо и достаточно, чтобы было выполнено условие

$$\frac{\partial\Psi}{\partial x}+\sum_{k=1}^{n} f_k(x, y_1, ..., y_n)\frac{\partial\Psi}{\partial y_k}=0. \qquad (10.73')$$

Если известны n независимых первых интегралов $\psi_1,...,\psi_n$ системы (10.68), то ее решение может быть найдено из системы

$$\begin{cases}\psi_1(x, y_1,..., y_n)=C_1,\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \psi_n(x, y_1,..., y_n)=C_n.\end{cases}$$

В этом случае ни одно из уравнений не является следствием остальных.

Приведем критерий независимости системы функций $f_i(x_1, ..., x_n)$, $i=\overline{1, n}$: для ее независимости требуется, чтобы якобиан $\left|\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right|\neq 0$.

2°. Системы ДУ в симметрической форме

Система вида

$$\frac{dx_1}{X_1(x_1, x_2, ..., x_n)}=\frac{dx_2}{X_2(x_1, x_2, ..., x_n)}=...=\frac{dx_n}{X_n(x_1, x_2, ..., x_n)} \qquad (10.74)$$

называется системой ДУ *в симметрической форме.* Если в точке $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, ..., x_n^{(0)})$ хоть один из знаменателей $X_1, X_2, ..., X_n$ отличен от нуля, то в окрестности этой точки систему (10.74) можно заменить нормальной системой из n-1 уравнений. Пусть $X_n(x_1^{(0)}, ..., x_n^{(0)})\neq 0$. Тогда

$$\frac{dx_1}{dx_n}=\frac{X_1}{X_n},\ \frac{dx_2}{dx_n}=\frac{X_2}{X_n},\ ...,\ \frac{dx_{n-1}}{dx_n}=\frac{X_{n-1}}{X_n}. \qquad (10.75)$$

Каждый интеграл (первый интеграл) системы (10.75) называется *интегралом* (*первым интегралом*) системы (10.74). Система (10.74) имеет не более чем n – 1 независимых интегралов. Совокупность n – 1 независимых первых интегралов системы (10.74) называют *общим интегралом* этой системы.

Всякую нормальную систему (10.68) можно записать в виде (10.74)

$$\frac{dy_1}{f_1}=\frac{dy_2}{f_2}=...=\frac{dy_n}{f_n}=\frac{dx}{1}. \qquad (10.76)$$

3°. Канонические системы ДУ высших порядков

Система ДУ высших порядков, разрешенная относительно старших производных, называется *канонической*. Она имеет вид

$$y_i^{(m_i)} = f_i(x, y_1, y_1', ..., y_1^{(m_1-1)}, ..., y_n, y_n', ..., y_n^{(m_n-1)}) \ (i=\overline{1, n}). \quad (10.77)$$

Число $m_1+m_2+...+m_n$ называется порядком системы (10.77). Каноническая система (10.77) [в частном случае – одно уравнение n-го порядка $y^{(n)} = f(x, y, y', ..., y^{(n-1)})$] приводится к соответствующей ей нормальной системе уравнений, если принять все производные, стоящие справа, за новые неизвестные функции.

З а м е ч а н и е. Обратное, вообще говоря, неверно: не всякую систему ДУ можно свести к одному уравнению. Например, система $y'=-y$; $z'=z$ распадается на два независимых уравнения.

Задача Коши для канонической системы (10.77) состоит в нахождении решения (10.70), в котором искомые функции $y_1, y_2, ..., y_n$ вместе со своими производными до порядков соответственно $m_1-1, m_2-1, ..., m_n-1$ принимают наперед заданные числовые значения при заданном значении x. Общее решение канонической системы (10.77) содержит $m_1+m_2+...m_n$ произвольных постоянных.

4°. Примеры

Пример 1. Привести каноническую систему дифференциальных уравнений $y_1''=2y_1-3y_2$, $y_2''=y_1-2y_2$ к нормальному виду.

∇ Положим $y_1'=y_3$, $y_2'=y_4$. Тогда данную систему можно записать в виде: $y_1'=y_3$; $y_2'=y_4$; $y_3'=2y_1-3y_2$; $y_4'=y_1-2y_2$, которая и является нормальной системой четвертого порядка. #

Пример 2. Привести к нормальной системе дифференциальное уравнение $y''+k^2y=0$.

∇ Положим $y'=z$; тогда $y''=z'$ и уравнение приводится к нормальной системе уравнений: $y'=z$, $z'=-k^2y$. #

Пример 3. Свести систему $y'=y-z$, $z'=-4y+z$ (1) к одному уравнению и найти решение системы.

∇ Найдем z из первого уравнения: $z=y-y'$. Отсюда имеем $z'=y'-y''$. Подставив значения z и z' во второе уравнение системы, получим уравнение $y''-2y'-3y=0$ – ОЛДУ с постоянными коэффициентами; его общее решение: $y=C_1e^{-x}+C_2e^{3x}$. Из равенства

$z = y - y'$ находим: $z = 2C_1e^{-x} - 2C_2e^{3x}$ и $\forall$ C_1, C_2 система функций $y = C_1e^{-x} + C_2e^{3x}$, $z = 2C_1e^{-x} - 2C_2e^{3x}$ (2) является решением исходной системы. #

Пример 4. Показать, что решение (2) системы (1) (см. пример 3) является общим решением.

∇ 1. Подставляя функции $y(x, C_1, C_2)$ и $z(x, C_1, C_2)$ из (2) в систему (1), убеждаемся, что система функций (2) $\forall$ C_1, C_2 является решением системы (1) (превращает каждое уравнение в тождество по x, справедливое $\forall$ C_1 и C_2). 2. Проверим выполнение условия 2) определения (10.72). В качестве области D системы (1) можно взять область D: $-\infty < x,\ y,\ z < +\infty$; при этом $\forall x_0, y_0, z_0$ выполнены условия теоремы существования и единственности решения задачи Коши. Подставив x_0, y_0, z_0 в систему (2), получим алгебраическую систему для определения постоянных:

$$\begin{cases} C_1e^{-x_0} + C_2e^{3x_0} = y_0; \\ 2C_1e^{-x_0} - 2C_2e^{3x_0} = z_0. \end{cases} \tag{3}$$

Определитель этой системы $\Delta = -4e^{2x_0} \neq 0$ при $\forall x_0$ и, следовательно, $\forall y_0$ и z_0 можно получить любое частное решение задачи Коши для системы (1). #

Пример 5. Найти частное решение системы (1) (пример 3), удовлетворяющее начальным условиям: $y = 0,\ z = -4$ при $x = 0$.

∇ Подставляя начальные данные $x = 0,\ y = 0,\ z = -4$ в систему (3), получаем: $C_1 + C_2 = 0,\ 2C_1 - 2C_2 = -4$. Решая ее, находим $C_1 = -1,\ C_2 = 1$. Искомое частное решение $y = -e^{-x} + e^{3x},\ z = -2e^{-x} - 2e^{3x}$. #

Пример 6. Показать, что функция $\Psi(x, y, z) = \dfrac{z}{x} - y$, определенная в области $D: x \in R,\ x \neq 0;\ -\infty < y;\ z < +\infty$, является первым интегралом системы уравнений $y' = \dfrac{1}{x}y$, $z' = y + \dfrac{1}{x}z$ (1).

∇ Дифференцируем:

$\psi'_x = \dfrac{z'}{x} - \dfrac{z}{x^2} - y' = \dfrac{y}{x} + \dfrac{z}{x^2} - \dfrac{z}{x^2} - \dfrac{y}{x} = 0$. Следовательно,

$\psi(x, y, z) = C = \text{const}$, если $y(x)$ и $z(x)$ – решения системы (1). #

Пример 7. Показать, что функция $\Psi(x,\, y,\, z) = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{z} - x$ (3) является первым интегралом системы уравнений $y' = \dfrac{y^2}{z}$, $z' = -\dfrac{z^2}{y}$ (1).

∇ В данном случае $f_1(x,\, y,\, z) = \dfrac{y^2}{z}$, $f_2(x,\, y,\, z) = -\dfrac{z^2}{x}$ (2). Найдем частные производные данной функции (3): $\dfrac{\partial\Psi}{\partial x} = -1$; $\dfrac{\partial\Psi}{\partial y} = \dfrac{z}{y^2+z^2}$; $\dfrac{\partial\Psi}{\partial z} = -\dfrac{y}{y^2+z^2}$ (4).

Подставляя (2) и (4) в левую часть (10.73′), получаем $\dfrac{\partial\Psi}{\partial x} + f_1\dfrac{\partial\Psi}{\partial y} + f_2\dfrac{\partial\Psi}{\partial z} = -1 + \dfrac{y^2}{z}\dfrac{z}{y^2+z^2} + \dfrac{z^2}{y}\dfrac{y}{y^2+z^2} = -1+1=0$ в области $D: -\infty < x < +\infty,\ y \neq 0,\ z \neq 0$ и функция (3) есть первый интеграл системы (1): $\operatorname{arctg}\dfrac{y}{z} - x = C$, где C – произвольная постоянная. #

10.7.2. МЕТОДЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ НОРМАЛЬНЫХ СИСТЕМ

В общем случае мы располагаем очень ограниченными возможностями интегрирования систем в квадратурах. Для линейных систем эти возможности несколько шире; но фактически всегда удается найти в квадратурах общее решение или общий интеграл лишь в случае, когда коэффициенты линейной системы являются постоянными.

СВЕДЕНИЕ СИСТЕМЫ ДУ К ОДНОМУ ИЛИ НЕСКОЛЬКИМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ

Одним из методов решения систем ДУ является метод исключения неизвестных, который сводит систему уравнений к одному или нескольким уравнениям с одной неизвестной функцией в каждом (см. пример 3, разд. 10.7.1). Это приведение системы n-го порядка к одному уравнению n-го порядка [если оно возможно (см. замечания в п. 3°, разд. 10.7.1)] достигается последовательным дифференцированием одного из уравнений системы и исключением всех неизвестных функций, кроме одной (метод исключения). Проинтегрировав полученное уравнение, находят общее решение данной системы уже без новых квадратур. Заметим также, что во многих случаях этим методом удается проинтегрировать каноническую систему (10.77).

Пример 1. Для системы $y' = 1 - \dfrac{1}{z}$, $z' = \dfrac{1}{y-x}$ (1) найти общее решение и выделить решение, удовлетворяющее начальным условиям: $y(0) = -1,\ z(0) = 1$.

∇ Найдем общее решение системы (1) методом исключения. По этому методу дифференцирование начинают с того уравнения, которое содержит производную сохраняемой функции. Пусть мы хотим получить уравнение для функции z. Дифференцируем второе уравнение (1): $z'' = -\dfrac{1}{(y-x)^2}(y'-1)$. Для исключения y и y' из полученного уравнения заменим в нем $\dfrac{1}{y-x}$ и $y'-1$ их значениями из данной системы. Получим $z'' = z'^2\dfrac{1}{z}$ – уравнение второго порядка, допускающее понижение порядка. Подстановкой $z' = p(z),\ z'' = p\dfrac{dp}{dz}$ уравнение сводится к $z' = 0$ и $\dfrac{dp}{dz} = \dfrac{p}{z}$, откуда $z = C$ и $z' = C_1 z$ и, таким образом, $z = C_2 e^{C_1 x}$. Функцию y определим из второго уравнения (1): $y - x = \dfrac{1}{z'}$, $y - x = \dfrac{e^{-C_1 x}}{C_1 C_2}$, откуда $y = x + \dfrac{e^{-C_1 x}}{C_1 C_2}$. Общее решение системы (1) имеет вид: $y = x + \dfrac{e^{-C_1 x}}{C_1 C_2}$, $z = C_2 e^{C_1 x}$. Решим поставленную задачу Коши. Подставляя в общее решение вместо x, y и z их начальные значения 0, –1 и 1, получаем систему для определения постоянных: $\dfrac{1}{C_1 C_2} = -1,\ C_2 = 1$, откуда $C_1 = -1,\ C_2 = 1$, так что искомым решением будет $y = x - e^x,\ z = e^{-x}$. Других решений, удовлетворяющих заданным начальным условиям, нет. #

МЕТОД ИНТЕГРИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ

По этому методу решения из системы (10.68) выделяют такое уравнение (интегрируемую комбинацию), которое можно проинтегрировать и получить первый интеграл системы. В таком случае удается понизить порядок системы. Если для системы, состоящей из n уравнений, найдено n независимых первых интегралов, то тем самым найден и общий интеграл этой системы и ее интегрирование окончено.

Для нахождения интегрируемых комбинаций иногда бывает полезно предварительно переписать данную систему в симметрической форме (10.74) и использовать свойство равных отношений: если $\frac{u_1}{v_1}=\frac{u_2}{v_2}=\ldots=\frac{u_n}{v_n}=\gamma$, то $\forall\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ имеет место соотношение:

$$\frac{\alpha_1 u_1+\alpha_2 u_2+\ldots+\alpha_n u_n}{\alpha_1 v_1+\alpha_2 v_2+\ldots+\alpha_n v_n}=\gamma. \tag{10.78}$$

Числа $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ подбираются обычно таким образом, чтобы числитель в (10.78) был полным дифференциалом или же знаменатель был равен нулю, или же это отношение давало интегрируемую комбинацию.

Пример 2. Проинтегрировать систему $\frac{dx}{dt}=y,\ \frac{dy}{dt}=-x$ (1).

∇ Найдем общий интеграл методом интегрируемых комбинаций и понижения порядка системы. Умножая почленно уравнения системы (1) соответственно на x и y и складывая полученные уравнения, получаем интегрируемую комбинацию $x\frac{dx}{dt}+y\frac{dy}{dt}=0$, откуда $x^2+y^2=C_1^2$.

Заметим, что этот же первый интеграл можно найти из интегрируемой комбинации $\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}$, которая получается из (1) делением уравнений системы. Пользуясь найденным первым интегралом, понизим порядок системы (1): $y=\pm\sqrt{C_1^2-x^2}$ и подставим это значение y в первое из уравнений системы (1): $\frac{dx}{dt}=\pm\sqrt{C_1^2-x^2}$ – имеем уравнение первого порядка, интегрируя которое, находим $\arcsin\frac{x}{C_1}=t+C_2$ – еще один первый интеграл системы (1). Эти интегралы независимы. #

Пример 3. Решить систему $\frac{dy}{dx}=\frac{z}{(z-y)^2},\ \frac{dz}{dx}=\frac{y}{(z-y)^2}$ (1).

∇ Для нахождения интегрируемых комбинаций перепишем (1) в симметрической форме $\frac{dy}{\frac{z}{(z-y)^2}}=\frac{dz}{\frac{y}{(z-y)^2}}=\frac{dx}{1}$ или $\frac{dy}{z}=\frac{dz}{y}=\frac{dx}{(z-y)^2}$. Одна из интегрируемых комбинаций: $\frac{dy}{z}=\frac{dz}{y}$, откуда $y^2-z^2=C_1^2$. Используя свойство пропорции (10.78), находим вторую интегрируемую комбинацию: $\dfrac{d(y-z)}{z-y}=\dfrac{dx}{(z-y)^2}$, откуда находим еще один первый интеграл: $2x+(y-z)^2=C_2$. Совокупность их образует общий интеграл системы (1). #

Пример 4. Найти общее решение системы уравнений $y'=\dfrac{mz-lx}{ly-nz}$, $z'=\dfrac{nx-my}{ly-nz}$.

∇ Запишем систему в симметрической форме $\dfrac{dx}{ly-nz}=$ $=\dfrac{dy}{mz-lx}=\dfrac{dz}{nx-my}=\gamma$ и воспользуемся соотношением (10.78). Выбираем $\alpha_1=m,\ \alpha_2=n$ и $\alpha_3=l$, получим $\gamma=\dfrac{d(mx+ny+lz)}{0}$, т.е. $d(mx+ny+lz)=0$, откуда $mx+ny+lz=C_1$. Аналогично, выбирая $\alpha_1=2x,\ \alpha_2=2y$ и $\alpha_3=2z$, приходим к равенству $d(x^2+y^2+z^2)=0$, откуда $x^2+y^2+z^2=C_2^2$. Их совокупность неявно определяет общее решение. #

Пример 5. Найти частное решение системы $\dfrac{dx}{dt}=1-\dfrac{1}{y}$, $\dfrac{dy}{dt}=\dfrac{1}{x-t}$, удовлетворяющее начальным условиям: $x(0)=1,\ y(0)=1$.

∇ Запишем данную систему в виде $y\,\dfrac{d(x-t)}{dt}=-1$, $(x-t)\,\dfrac{dy}{dt}=1$. Складывая эти уравнения, получаем:

$$y\,\frac{d(x-t)}{dt}+(x-t)\,\frac{dy}{dt}=0 \quad \text{или} \quad d[(x-t)y]=0.$$

Отсюда $(x-t)y=C_1$ – первый интеграл. Так как $x-t=C_1\,/\,y$, то второе уравнение системы примет вид: $\dfrac{dy}{dt}=\dfrac{y}{C_1}$, откуда $y=C_2e^{t\,/\,C_1}$. Таким образом, $(x-t)y=C_1$, $y=C_2e^{t\,/\,C_1}$ – общий интеграл системы. Найдем общее решение: $x=t+\dfrac{C_1}{C_2}\,e^{-t\,/\,C_1}$, $y=C_2e^{t\,/\,C_1}$. Полагая $t=0$ в этих равенствах, найдем, что $1=\dfrac{C_1}{C_2}$, $1=C_2$, т.е. $C_1=C_2=1$; искомое частное решение: $x=t+e^{-t}$, $y=e^{t}$. #

Задачи для самостоятельного решения

Дифференциальные уравнения или канонические системы заменить нормальными системами дифференциальных уравнений.

247. $y''' - xyy' + y'^3 = 0$. **248.** $y^{\mathrm{IV}} - y^2 = 0$.

249. $y'' = y' + z',\ z'' = z' + u',\ u'' = u' + y'$.

250. $z'' + z - 2y = 0,\ y''' + z - y = x$.

251. $y'' - z - u = 0,\ z' + uz = x^2,\ u''' = -xy$.

Проверить, являются ли функции $y(x)$ и $z(x)$ решениями систем дифференциальных уравнений.

252. $y' = -\dfrac{1}{z},\ z' = 1/y;\ y = e^{-x/2},\ z = 2e^{x/2}$.

253. $y' = 1 - \dfrac{2y}{x},\ z' = y + z + \dfrac{2y}{x} - 1;\ y = \dfrac{x}{3} + \dfrac{1}{x^2},\ z = e^x - \dfrac{x}{3} - \dfrac{1}{x^2}$.

254. $y' = z,\ z' = \dfrac{z^2}{x};\ y = e^{2x},\ z = e^x$.

255. $y' = -2xy^2,\ z' = \dfrac{1}{x}(z + x);\ y = x^{-2},\ z = x\ln|x|$.

Проверить, являются ли данные функции первыми интегралами данных систем ДУ.

256. $\Psi(x, y, z) = x + y - z;\ y' = \dfrac{z}{y - z},\ z' = \dfrac{y}{y - z}$.

257. $\Psi(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2;\ y' = \dfrac{3x - 4z}{2z - 3y},\ z' = \dfrac{4y - 2x}{2z - 3y}$.

258. $\Psi(x, y, z) = \dfrac{1}{y} - \dfrac{1}{z};\ y' = \dfrac{y}{z},\ z' = \dfrac{z}{y}$.

259. $\Psi(x, y, z) = yze^{-x};\ y' = \dfrac{y^2}{z},\ z' = z - y$.

260. $\Psi(x, y, z) = (1 + y)e^{-y} - e^{-z};\ y' = \dfrac{1}{x}e^{-y},\ z' = \dfrac{y}{x}e^{-z}$.

261. а) $\Psi_1(x, y, z) = -x + y + z$; б) $\Psi_2(x, y, z) = x + y + z$.

$$y' = \frac{z + x}{y + z},\quad z' = \frac{y - x}{y + z}.$$

Методом исключения решить следующие системы дифференциальных уравнений.

262. $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{1}{y},\ \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{1}{x}$. **263.** $y' = \dfrac{z}{(z - y)^2},\ z' = \dfrac{y}{(z - y)^2}$.

264. $y' = 2xy^2,\ z' = \dfrac{z - x}{x}$. **265.** $y' = e^{x - y},\ z' = \dfrac{2z}{2x - z^2}$.

266. $y' = \dfrac{2xy}{1+x^2}$, $z' = -\dfrac{z}{x} + y + x$. **267.** $xy' = y + \sqrt{y^2 - x^2}$.

268. $y' = z$, $z' = \dfrac{z^2}{y}$. **269.** $y' = \dfrac{x}{z}$, $z' = -\dfrac{x}{y}$.

270. $y' = \dfrac{y^2}{z-x}$, $z' = y+1$. **271.** $y' = \dfrac{z}{x}$, $z' = \dfrac{z(y+2z-1)}{x(y-1)}$.

272. $y_1' = 4y_1,\ y_2' = 4y_2 + 2y_3,\ y_3' = 4y_3,\ y_4' = y_1 + 3y_4,\ y_5' = y_4 + 3y_5$.

Методом исключения найти общее решение системы дифференциальных уравнений, выделить затем частное решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям.

273. $y' = \dfrac{z-1}{z}$, $z' = \dfrac{1}{y-x}$; $y(0) = -1,\ z(0) = 1$.

274. $y' = \dfrac{x}{yz}$; $z' = \dfrac{x}{y^2}$; $y(0) = z(0) = 1$.

Решить системы методом интегрируемых комбинаций.

275. $\dfrac{dx}{dt} = x^2 + y^2,\ \dfrac{dy}{dt} = 2xy$. **276.** $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{y}{x-y}$, $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{x}{x-y}$.

277. $\dfrac{dx}{dt} = \cos^2 x \cos^2 y + \sin^2 x \sin^2 y$,

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{1}{2}\sin 2x \cdot \sin 2y,\ x(0) = y(0) = 0.$$

278. $\dfrac{dt}{xy} = \dfrac{dx}{yt} = \dfrac{dy}{xt}$. **279.** $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{2tx}{t^2 - x^2 - y^2}$; $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{2ty}{t^2 - x^2 - y^2}$.

280. $\dfrac{dx}{\cos y} = \dfrac{dy}{\cos x} = \dfrac{dz}{\cos x \cos y}$. **281.** $\dfrac{dx}{y-x} = \dfrac{dy}{x+y+z} = \dfrac{dz}{x-y}$.

282. $\dfrac{dx}{z} = \dfrac{dy}{xz} = \dfrac{dz}{y}$. **283.** $\dfrac{dx}{x(y+z)} = \dfrac{dy}{z(z-y)} = \dfrac{dz}{y(y-z)}$.

284. $\dfrac{dx}{x(z-y)} = \dfrac{dy}{y(y-x)} = \dfrac{dz}{y^2 - xz}$.

285. $\dfrac{dx}{x(y^2 - z^2)} = -\dfrac{dy}{y(z^2 + x^2)} = \dfrac{dz}{z(x^2 + y^2)}$.

10.8. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

10.8.1. ВВЕДЕНИЕ

1°. Однородные системы. Линейные системы (10.69) можно интегрировать общими методами, изложенными в главе 4; но для них существует специальная теория интегрирования. Введем определения.

Если $\forall x\ f_k(x)=0\ (k=\overline{1,n})$, то система (10.69) называется однородной линейной системой ДУ (СОЛДУ). Иначе она называется неоднородной (СНЛДУ).

Предполагается, что функции $p_{kl}(x)$ и $f_k(x)$ $(k,l=\overline{1,n})$ определены и непрерывны в интервале (a, b). Тогда система (10.69) имеет единственное решение, определенное во всем интервале (a, b) и удовлетворяющее начальным условиям (10.71). Всякое решение (10.69) является частным, так что особых решений она не имеет. Интегрирование системы (10.69) приводит к интегрированию СОЛДУ

$$\frac{dy_k}{dx}=\sum_{l=1}^{n} p_{kl}(x)y_l\quad (k=\overline{1,n}). \tag{10.79}$$

Система (10.79) всегда имеет нулевое решение $y_1\equiv 0,\ y_2\equiv 0,\ldots,$ $y_n\equiv 0$. Оно удовлетворяет нулевым начальным условиям $y_1=0,$ $y_2=0,\ldots,\ y_n=0$ при $x=x_0\in(a,b)$; других решений, удовлетворяющих этим условиям, нет. Чтобы построить общее решение (10.79), достаточно знать n линейно независимых в интервале (a, b) частных решений:

$$Y_i=(y_{i1},\ y_{i2},\ldots,\ y_{in})\quad (i=\overline{1,n}). \tag{10.80}$$

Такая система решений называется фундаментальной (ФСР).

Теорема 1. Для того чтобы система решений (10.80) была фундаментальной, необходимо и достаточно, чтобы ее определитель Вронского

$$W(x)=\begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1n}\\ y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ y_{n1} & y_{n2} & \cdots & y_{nn}\end{vmatrix} \tag{10.81}$$

был отличен от нуля хотя бы в одной точке интервала (a, b).

Теорема 2. При условии непрерывности коэффициентов $p_{kl}(x)$ $(k=\overline{1,n})$ существует бесчисленное множество фундаментальных систем.

Теорема 3. Линейная комбинация решений фундаментальной системы (10.80)

$$y_k = \sum_{i=1}^{n} C_i y_{ik} \quad (k = \overline{1, n}), \tag{10.82}$$

где C_i – произвольно постоянные, представляет собой общее решение СОЛДУ (10.79) в области

$$a < x < b,\ |y_1| < \infty, \ldots, |y_n| < \infty. \tag{10.83}$$

З а м е ч а н и е. Все решения СОЛДУ содержатся в формуле (10.82).

2°. Неоднородные системы. Чтобы найти общее решение СНЛДУ (10.69), достаточно знать общее решение (10.82) соответствующей СОЛДУ (10.79) и одно частное решение СНЛДУ (10.69):

$$y_1 = y_1^{(\text{ч})},\ y_2 = y_2^{(\text{ч})}, \ldots, y_n = y_n^{(\text{ч})}. \tag{10.84}$$

Теорема 3. Сумма решений (10.82) и (10.84) есть общее решение СНЛДУ (7.2) в области (10.83):

$$y_k = y_k^{(\text{ч})} + \sum_{i=1}^{n} C_i y_{ik} \quad (k = \overline{1, n}). \tag{10.85}$$

З а м е ч а н и е. Все решения системы (10.69) содержатся в формуле (10.85). Метод вариации произвольных постоянных (метод Лагранжа) позволяет найти общее решение СНЛДУ, зная лишь фундаментальную систему решений (10.80) СОЛДУ (10.79). По этому методу решение ищем в виде

$$y_k = \sum_{i=1}^{n} C_i(x) y_{ik} \quad (k = \overline{1, n}), \tag{10.86}$$

где $C_i(x)$ – непрерывно дифференцируемые функции от x, подлежащие определению из системы

$$\sum_{i=1}^{n} C_i'(x) y_{ik} = f_k(x) \quad (k = \overline{1, n}). \tag{10.87}$$

Решая ее алгебраически, находим $C_i'(x) = \varphi_i(x)$ $(i = \overline{1, n})$, откуда квадратурами определяем $C_i(x)$: $C_i(x) = \int \varphi_i(x)dx + C_i$ $(i = \overline{1, n})$. Подставляя эти значения в (10.86), получаем общее решение системы (10.69).

10.8.2. ЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Линейная система (10.69), у которой все коэффициенты $p_{kl} = \text{const}$ $(k, l = \overline{1, n})$, всегда интегрируется в квадратурах, ибо соответствующая СОЛДУ (10.79) имеет фундаментальную систему решений, состоящую из элементарных функций. ФСР СОЛДУ строится по методу Эйлера: решение системы (10.79) ищем в виде

$$y_1 = \alpha_1 e^{\lambda x},\ y_2 = \alpha_2 e^{\lambda x}, ..., y_n = \alpha_n e^{\lambda x}, \tag{10.88}$$

где $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ и λ – подлежащие определению величины. Подставляя (10.88) в (10.79) и сокращая на $e^{\lambda x}$, получаем систему

$$\begin{cases} (p_{11}-\lambda)\alpha_1 + & p_{12}\alpha_2 + & ...+ & p_{1n}\alpha_n = 0; \\ p_{21}\alpha_1 + & (p_{22}-\lambda)\alpha_2 + & ...+ & p_{2n}\alpha_n = 0; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & & & \\ p_{n1}\alpha_1 + & p_{n2}\alpha_2 + & ...+ & (p_{nn}-\lambda)\alpha_n = 0. \end{cases} \tag{10.89}$$

Чтобы система (10.89) имела решение, отличное от тривиального, необходимо и достаточно, чтобы число λ было корнем уравнения

$$\begin{vmatrix} p_{11}-\lambda & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22}-\lambda & \cdots & p_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0, \tag{10.90}$$

называемого характеристическим уравнением. Каждому из корней (10.90) соответствует хотя бы одно частное решение вида (10.88). Здесь возможны три случая.

1. Все корни $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ уравнения (10.90) различны и действительны. Полагая в системе (10.89) $\lambda = \lambda_i$ $(i = \overline{1, n})$, получаем систему

$$\begin{cases} (p_{11}-\lambda_i)\alpha_1 + & p_{12}\alpha_2 + & ...+ & p_{1n}\alpha_n = 0; \\ p_{21}\alpha_1 + & (p_{22}-\lambda_i)\alpha_2 + & ...+ & p_{2n}\alpha_n = 0; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & & & \\ p_{n1}\alpha_1 + & p_{n2}\alpha_2 + & ...+ & (p_{nn}-\lambda_i)\alpha_n = 0. \end{cases} \tag{10.89′}$$

Решая ее, находим ненулевое решение $\alpha_1 = \alpha_{i1},\ \alpha_2 = \alpha_{i2}, ..., \alpha_n = \alpha_{in}$. Подставляя $\alpha_k = \alpha_{ik}$ $(k = \overline{1, n})$ и $\lambda = \lambda_i$ в (10.88), находим решение СОЛДУ, соответствующее корню λ_i:

$$y_{i1} = \alpha_{i1} e^{\lambda_i x},\ y_{i2} = \alpha_{i2} e^{\lambda_i x}, ..., y_{in} = \alpha_{in} e^{\lambda_i x}. \tag{10.88′}$$

Построив решения, соответствующие всем корням $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$, получим фундаментальную систему решений (ФСР)

$$Y_i = (\alpha_{i1} e^{\lambda_i x},\ \alpha_{i2} e^{\lambda_i x}, ..., \alpha_{in} e^{\lambda_i x})\ \ (i = \overline{1, n}). \tag{10.80′}$$

Общее решение системы запишется в виде

$$y_k = \sum_{i=1}^{n} C_i \alpha_{ik} e^{\lambda_i x} \quad (k = \overline{1, n}). \qquad (10.82')$$

2. Корни характеристического уравнения (10.90) различны, но среди них имеются комплексные. Если $a+ib$ – корень (10.90), то $a-ib$ тоже будет корнем. Построив решение вида (10.88′), соответствующее корню $a+ib$ и отделив в нем действительную и мнимую части, получим два действительных линейно независимых частных решения СОЛДУ (10.79). Построив частные решения, соответствующие всем парам комплексно сопряженных корней и всем действительным (если они имеются), получим ФСР (10.80). Общее решение запишется по формуле (10.82).

3. Среди корней характеристического уравнения (10.90) имеются кратные. Корню λ_1 кратности k соответствует решение вида

$$y_1 = P_1(x)e^{\lambda_1 x}, \ y_2 = P_2(x)e^{\lambda_1 x}, ..., \ y_n = P_n(x)e^{\lambda_1 x}, \qquad (10.91)$$

где $P_1(x), P_2(x), ..., P_n(x)$ – многочлены от x степени не выше k – 1 (они могут вырождаться в числа), причем среди коэффициентов всех этих многочленов k коэффициентов произвольны, а остальные выражаются через них. Полагая поочередно один их этих произвольных коэффициентов равным единице, а остальные равными нулю, построим k линейно независимых частных решений. Если λ_1 действительное, то эти частные решения тоже действительные. Если λ_1– комплексный корень, $\lambda_1 = a+ib$, то $a-ib$ тоже корень и притом той же кратности k. Определив указанным выше методом k линейно независимых комплексных частных решений, соответствующих корню $a+ib$, и отделив в них действительные и мнимые части, получим $2k$ линейно независимых действительных частных решений. Напомним, что решения, соответствующие корню $a-ib$, линейно зависимы с решениями, соответствующими корню $a+ib$.

Пример 1. Проинтегрировать систему $\dfrac{dy}{dx} = -y-2z, \ \dfrac{dz}{dx} = 3y+4z$ (1) по методу Эйлера.

∇ Ищем частное решение системы (1) в виде (10.88): $y = \alpha e^{\lambda x}, \ z = \beta e^{\lambda x}$ (2). Составляем характеристическое уравнение (10.90):

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & -2 \\ 3 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0, \ \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0.$$

Оно имеет корни $\lambda_1 = 1, \ \lambda_2 = 2$. Построим частное решение вида (2), соответствующее корню $\lambda_1 = 1$. Подставляя $\lambda = 1$ в систему (10.89′), получим уравнение $-2\alpha - 2\beta = 0$ (другое есть следствие первого). В этом уравнении одна неизвестная – свободная неизвестная. Полагая $\alpha=1$, получаем $\beta=-1$. Таким образом, корню $\lambda_1=1$ соответствует частное решение $y_1=e^x$, $z_1=-e^x$. Аналогично находим частное решение, соответствующее корню $\lambda_2=2$: $y_2=2e^{2x}$, $z_2=-3e^{2x}$. Общее решение системы (1): $y=C_1e^x+2C_2e^{2x}$, $z=-C_1e^x-3C_2e^{2x}$ (3). Найдем частное решение, удовлетворяющее начальным условиям: $y(0)=-1$, $z(0)=2$. Полагая в (3) $x=0,\ y=-1,\ z=2$, получаем $C_1+2C_2=-1$, $-C_1-3C_2=2$, откуда $C_1=1,\ C_2=-1$ и искомое частное решение: $y=e^x-2e^{2x}$, $z=-e^x+3e^{2x}$. Других решений, удовлетворяющих этим начальным условиям, нет. #

Пример 2. Найти общее решение системы $y'=2y-z,\ z'=y+2z$ (1).

∇ Характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix}=0, \text{ или } \lambda^2-4\lambda+5=0,$$

имеет корни $\lambda_{1,2}=2\pm i$. Строим комплексное решение, соответствующее корню $\lambda_1=2+i$: $y=\alpha e^{(2+i)x}$, $z=\beta e^{(2+i)x}$. Числа α и β определяем из уравнения $-i\alpha-\beta=0$. Полагая $\alpha=1$, находим $\beta=-i$, так что $y=e^{(2+i)x}=e^{2x}(\cos x+i\sin x)$, $z=-ie^{(2+i)x}=e^{2x}(\sin x-i\cos x)$. Отделяя действительные и мнимые части, получаем два действительных линейно независимых частных решения $(Y_i=(y_i,\ z_i))$: $Y_1=(e^{2x}\cos x,\ e^{2x}\sin x)$; $Y_2=(e^{2x}\sin x,\ -e^{2x}\cos x)$. Общее решение (1): $y=e^{2x}(C_1\cos x+C_2\sin x)$, $z=e^{2x}(C_1\sin x-C_2\cos x)$. #

Пример 3. Найти общее решение системы (1):

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=-4x+2y+5z; \\ \dfrac{dy}{dt}=6x-y-6z; \\ \dfrac{dz}{dt}=-8x+3y+9z. \end{cases}$$

∇ Характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} -4-\lambda & 2 & 5 \\ 6 & -1-\lambda & -6 \\ -8 & 3 & 9-\lambda \end{vmatrix}=0 \quad \text{или} \quad \lambda^3-4\lambda^2+5\lambda-2=0$$

имеет корни $\lambda_1=2,\ \lambda_2=\lambda_3=1$. Найдем частное решение, соответствующее простому корню $\lambda=2$. Числа α,β,γ определяем из системы $-6\alpha+2\beta+5\gamma=0$, $6\alpha-3\beta-6\gamma=0$. Сложив эти уравнения, придем к равенству $-\beta-\gamma=0$. Полагая $\gamma=2$, найдем $\beta=-2,\ \alpha=1$, так что искомое частное решение: $x_1 = e^{2t}$, $y_1 = -2e^{2t}$, $z_1 = 2e^{2t}$. Построим два линейно независимых частных решения, соответствующие кратному корню $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$. Согласно формуле (10.91) ему отвечает решение вида

$$x = (A_1 t + A_2)e^t,\ y = (B_1 t + B_2)e^t,\ z = (C_1 t + C_2)e^t. \qquad (2)$$

Коэффициенты $A_1, A_2, ..., C_2$ определяются подстановкой (2) в систему (1). Подставляя (2) в (1) и сокращая на e^t, получаем систему

$$A_1 t + A_1 + A_2 = (-4A_1 + 2B_1 + 5C_1)t - 4A_2 + 2B_2 + 5C_2;$$

$$B_1 t + B_1 + B_2 = (6A_1 - B_1 - 6C_1)t + 6A_2 - B_2 - 6C_2;$$

$$C_1 t + C_1 + C_2 = (-8A_1 + 3B_1 + 9C_1)t - 8A_2 + 3B_2 + 9C_2.$$

Приравнивая коэффициенты при t и свободные члены, получаем систему

$$\begin{aligned} -5A_1 + 2B_1 + 5C_1 &= 0; & -5A_2 + 2B_2 + 5C_2 &= A_1; \\ 6A_1 - 2B_1 - 6C_1 &= 0; & 6A_2 - 2B_2 - 6C_2 &= B_1; \\ -8A_1 + 3B_1 + 8C_1 &= 0; & -8A_2 + 3B_2 + 8C_2 &= C_1, \end{aligned}$$

откуда $A_1 = C_1$, $B_1 = 0$ (из уравнений 1-го столбца при свободной переменной C_1), $A_2 = C_1 + C_2$, $B_2 = 3C_1$ (из уравнений 2-го столбца, C_2 – свободная). Решение (2) принимает вид: $x = (C_1 t + C_1 + C_2)e^t$, $y = 3C_1 e^t$, $z = (C_1 t + C_2)e^t$. В качестве линейно независимых частных решений, соответствующих корню $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$, можно взять $(Y_i = (x_i, y_i, z_i))$: $Y_2 = ((t+1)e^t, 3e^t, te^t)$, $Y_3 = (e^t, 0, e^t)$. Общее решение системы (1): $x = C_1 e^{2t} + (C_2 t + C_2 + C_3)e^t$, $y = -2C_1 e^{2t} + 3C_2 e^t$, $z = 2C_1 e^{2t} + (C_2 t + C_3)e^t$. #

Пример 4. Найти общее решение СНЛДУ $y' = -y - 2z + 2e^{-x}$, $z' = 3y + 4z + e^{-x}$ (1) методом вариации произвольных постоянных.

∇ Соответствующая однородная система рассмотрена в примере 1. Общее решение системы (1) ищем в виде (10.86): $y = C_1(x)e^x + 2C_2(x)e^{2x}$, $z = -C_1(x)e^x - 3C_2(x)e^{2x}$ (2). Функции $C_1(x)$ и $C_2(x)$ находим из системы (10.49):

$$C_1'(x)e^x + 2C_2'(x)e^{2x} = 2e^{-x},\ \ -C_1'(x)e^x - 3C_2'(x)e^{2x} = e^{-x},$$

откуда $C_1'(x) = 8e^{-2x}$, $C_2'(x) = -3e^{-3x}$ и $C_1(x) = -4e^{-2x} + C_1$, $C_2(x) = e^{-3x} + C_2$. Запишем общее решение (1):

$$y = -2e^{-x} + C_1 e^x + 2C_2 e^{2x},\quad z = e^{-x} - C_1 e^x - 3C_2 e^{2x}. \ \#$$

Задачи для самостоятельного решения

Проинтегрировать следующие системы последовательным интегрированием или методом исключения.

286. $\frac{dy}{dx}=-2y,\ \frac{dz}{dx}=z.$ **287.** $\frac{dx}{dt}=0,\ \frac{dy}{dt}=-y.$

288. $\frac{dx}{dt}=x-2y,\ \frac{dy}{dt}=2y,\ \frac{dz}{dt}=-z.$

289. $\frac{dx}{dt}=2x+y,\ \frac{dy}{dt}=2y+z,\ \frac{dz}{dt}=2z$.

290. $\frac{dx}{dt}=2x-y,\ \frac{dy}{dt}=x+2y.$ **291.** $\frac{dx}{dt}=x-2y,\ \frac{dy}{dt}=x-y.$

292. $\frac{dx}{dt}=5x-6y+z,\ \frac{dy}{dt}=x-z,\ \frac{dz}{dt}=-6z$.

293. $\frac{dx}{dt}=-y+z,\ \frac{dy}{dt}=z,\ \frac{dz}{dt}=-x+z$.

Найти общее решение методом Эйлера и, где указано, выделить решение, удовлетворяющее поставленным начальным условиям.

294. $y'=y+z,\ z'=-2y+4z;\ y(0)=0,\ z(0)=-1.$

295. $y'=3y-z,\ z'=10y-4z;\ y(0)=1,\ z(0)=5.$

296. $\begin{cases} y'=y-z, \\ z'=-4y+4z. \end{cases}$ **297.** $\begin{cases} y'=2y-3z, \\ z'=3y+2z. \end{cases}$

298. $\begin{cases} \frac{dx}{dt}=4x+5y, \\ \frac{dy}{dt}=-4x-4y. \end{cases}$ **299.** $\begin{cases} \frac{dx}{dt}=3x+12y-4z, \\ \frac{dy}{dt}=-x-3y+z, \\ \frac{dz}{dt}=-x-12y+6z. \end{cases}$

300. $\frac{dx}{dt}=-y+z,\ \frac{dy}{dt}=z,\ \frac{dz}{dt}=-x+z;\ x(0)=1,\ y(0)=\frac{1}{2},\ z(0)=\frac{1}{2}$.

301. $\begin{cases} \frac{dx}{dt}=21x-8y-19z, \\ \frac{dy}{dt}=18x-7y-15z, \\ \frac{dz}{dt}=16x-6y-15z. \end{cases}$ **302.** $\begin{cases} \frac{dy}{dt}=-y+z, \\ \frac{dz}{dt}=-y-3z. \end{cases}$

303. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 4x - 3y. \end{cases}$

304. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 10x - 3y - 9z, \\ \dfrac{dy}{dt} = -18x - 7y + 18z, \\ \dfrac{dz}{dt} = 18x - 6y - 17z. \end{cases}$

305. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 5x - y - 4z, \\ \dfrac{dy}{dt} = -12x + 5y + 12z, \\ \dfrac{dz}{dt} = 10x - 3y - 9z. \end{cases}$

306. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x - y - 3z, \\ \dfrac{dy}{dt} = -6x + 2y - 6z, \\ \dfrac{dz}{dt} = 6x - 2y - 6z. \end{cases}$

307. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - z, \\ \dfrac{dy}{dt} = -6x + 2y + 6z, \\ \dfrac{dz}{dt} = 4x - y - 4z. \end{cases}$

Найти общее решение методом вариации произвольных постоянных и, где указано, выделить решение, удовлетворяющее поставленным начальным условиям.

308. $y_1' = y_1 + y_2 - x^2 + x - 2,\ y_2' = -2y_1 + 4y_2 + 2x^2 - 4x - 7;$
$y_1(0) = 0,\ y_2(0) = 2.$

309. $\begin{cases} y' = -2y + z - e^{2x}, \\ z' = -3y + 2z + 6e^{2x}. \end{cases}$

310. $\begin{cases} y' = 2y - z + 2e^{x}, \\ z' = 3y - 2z + 4e^{x}. \end{cases}$

311. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - y + 4\cos 2t, \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x - 2y + 8\cos 2t + 5\sin 2t. \end{cases}$

312. $\dfrac{dx}{dt} = x + y - \cos t,\ \dfrac{dy}{dt} = -2x - y + \sin t + \cos t;\quad x(0) = 1,\ y(0) = -2.$

ОТВЕТЫ К ЗАДАЧАМ ГЛАВЫ 10

1. $1+y^2=C(1-x^2)$. **2.** $y(1-Cx)=1$; $y=0$; $y(1+x)=1$.

3. $(1+e^x)^2 \operatorname{tg} y=C$. **4.** $\frac{1}{2}(x^2+y^2)+\ln\left|\frac{y}{x}\right|=1$.

5. $e^y-1=Ce^{-x}$. **6.** $2e^y-e^{2x}+2\operatorname{arctg} y+\ln(1+y^2)=C$.

7. $y=\arcsin x+C$, $x=\pm1$; $y=\arcsin x$, $x=1$.

8. $y=e^{\sin x}$. **9.** $y=-\frac{1}{x}$. **10.** $x+C=\operatorname{ctg}\left(\frac{y-x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$.

11. $x+y=a\operatorname{tg}(C+y/a)$. **12.** $x^3+3x^2y-y^3=C$. **13.** $y=\sqrt{x(C+x)}$.

14. $y=Cx^{-2}-\frac{1}{3}x$ $(x\neq0)$. **15.** $2y^3-3xy^2+6x^2y=Cx^6$.

16. $\arcsin\frac{y}{x}-\frac{\sqrt{x^2-y^2}}{x}-\ln|x|=C$, $y=\pm x$.

17. $y=\frac{C}{2}x^2-\frac{1}{2C}$ $(C>0)$; $y=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}$.

18. $y=xe^{1+Cx}$, $y=0$ $(x\neq0)$, $y=ex$ $(x\neq0)$, $x=0$ $(y\neq0)$;

$x=0$ $(y\neq0)$; $y=xe^{1-x}$; $y=0$ $(0<x<+\infty)$.

19. $y=-x$. **20.** $y=Cx+x\ln|x|$ $(x\neq0)$, $x=0$ $(y\neq0)$;

все интегральные кривые.

21. $x^2+y^2-xy+x-y=C$. **22.** $\frac{x^2}{2}+y^2-xy+y=C$.

23. $x+2y+3\ln|x+y-2|=C$. **24.** $(x-y-3)^2+10x=C$.

25. $y+2=Ce^{-2\operatorname{arctg}\frac{y+2}{x-3}}$. **26.** $y=Ce^{-\cos x}-\cos x+1$.

27. $y=(1+x^2)(C+x)$. **28.** $y=C\cdot e^{-2x}+e^{-x}$. **29.** $y=x-x^2$.

30. $y=\sin x+C\cos x$. **31.** $y=\frac{x^2}{\cos x}$. **32.** $y=\frac{\sin x}{\cos^2 x}$.

33. $y=-\frac{1}{x^3}+\frac{2}{x^2}$. **34.** $y=(x+1)^2(e^x+C)$. **35.** $x=Cy+\frac{1}{2}y^3$, $y=0$.

36. $y=e^{2x}-e^x+\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}$. **37.** $y=x+\sqrt{1-x^2}$. **38.** $y^2=2x+Cy^3$.

39. $x = y^2(1 + Ce^{1/y})$. **40.** $\dfrac{1}{y} = Cx + \ln|x| + 1$; $\dfrac{1}{y} = \ln|x| + 1$.

41. $y^2 + 2x^2y^2 + Cy^2e^{2x^2} = 2$. **42.** $y = e^{-2x^2}\left(C + \dfrac{1}{2}x^2\right)^2$; $y = 0$.

43. $y = \dfrac{1}{\sqrt[3]{C \cdot \cos^3 x - 3\sin x \cos^2 x}}$. **44.** $y^3 = (3 - 2e^{\cos x})^{-1}$.

45. $x^2 = (y + 3y^2)^{-1}$.

46. $y = \left(Ce^{x^3} - \dfrac{1}{9}x^3 - \dfrac{2}{9}\right)^3$, $y = 0$; $y = \left(\dfrac{2}{9}e^{x^3} - \dfrac{1}{9}x^3 - \dfrac{2}{9}\right)^3$, $y = 0$.

47. $\dfrac{1}{y} = Ce^{-x} - x + 1$; $y = 0$. **48.** $\dfrac{1}{y} = x(C - \ln|x|)$, $x = 0$;

$y = 0$, $(x \neq 0)$, $x = 0$ $(y \neq 0)$. **49.** $x^2 = Ce^{\sin y} - 2a(\sin y + 1)$.

50. $3x^2y - y^3 = C$. **51.** $x^2 - 3x^3y^2 + y^4 = C$.

52. $xe^{-y} - y^2 = C$. **53.** $4y\ln x + y^4 = C$. **54.** $x + \dfrac{x^3}{y^2} + \dfrac{5}{y} = C$.

55. $x^2 + \dfrac{2}{3}(x^2 - y)^{3/2} = C$. **56.** $x - y^2\cos^2 x = C$. **57.** $x^3 + x^3\ln y - y^2 = C$.

58. $x^2 + 1 = 2(C - 2x)\sin y$. **59.** $3x^2y + x^3y^3 = C$, $\mu = x$.

60. $\dfrac{x}{y} - y = C$, $\mu = \dfrac{1}{y^2}$. **61.** $x^2 - y\ln|y| = Cy$, $\mu = \dfrac{1}{y^2}$.

62. $5\,\mathrm{arctg}\, x + 2xy = C$; $x = 0$; $\mu = \dfrac{1}{1 + x^2}$.

63. $y^3 + x^3(\ln x - 1) = Cx^2$; $\mu = \dfrac{1}{x^4}$.

64. $2e^x\sin y + 2e^x(x - 1) + e^x(\sin x - \cos x) = C$, $\mu = e^x$.

65. $x^2 - \dfrac{7}{y} - 3xy = C$, $\mu = \dfrac{1}{y^2}$. **66.** $y = \pm\ln\left|x^2 - 1\right|$.

67. 1) $y^2 = 4x$, 2) $xy^2 = 4$. **68.** $y = \pm\dfrac{x}{x - 1}$. **69.** $(x + C)^2 + y^2 = a^2$.

70. $y^2 = \pm 2a(x + C)$. **71.** $y = 2\,\mathrm{ch}\,\dfrac{x}{2}$. **72.** $y^2 = \dfrac{x^2}{x^2 + 3}$.

73. $y^2 = 6x+9$. **74.** 1) $y^2 = 4(x-1)$, 2) $\frac{(x+1)^2}{4}+\frac{y^2}{8}=1$.

75. $y^2 = \frac{2}{3}x$. **76.** $r = 2e^{\frac{\varphi}{a}}$. **77.** $x^2+y^2=2y$. **78.** $x = y(3\pm\ln y)$.

79. $y^2 = 2x+1-e^{2x}$. **80.** $y=\frac{1}{x}-x^2$. **81.** $x=\pm\left(\frac{1}{y}-y\right)$.

82. $y = x\sqrt{5x^2-1}$. **83.** $r=\varphi+\frac{\pi}{2}$. **84.** $T = a+(T_0-a)e^{-kt}$.

85. Через 40 мин. **86.** $\omega = 5(3/5)^{t/120}$ (об/с); через 6 мин 18 с.

Уравнение имеет вид $\frac{d\omega}{dt}=-k\omega$. **87.** Через 1575 лет.

88. За 6 мин 5 с. Уравнение имеет вид $wv(h)dt=-S(h)dh$, где w – площадь отверстия, $v(h)$ – скорость истечения воды, h – уровень жидкости, $S(h)$ – площадь поперечного сечения сосуда, t – время.

89. 0,0878. Уравнение имеет вид $dQ=-kQdh$. **90.** ≈ 50 с; ≈ 15 мин.

91. $t\approx 0{,}0011$с. Уравнение имеет вид $m\frac{dv}{dt}=-kv^2$. **92.** 0,5 кг.

93. а) 56,5 г; б) 7,84 г. **94.** 0,06 %. Уравнение имеет вид $(0{,}01x-0{,}0004)1500dt=-10800\cdot 0{,}01dx$, где x – объемная доля (в %) углекислоты в воздухе в момент времени t.

95. $t=\frac{E}{R^2+L^2\omega^2}\left(R\sin\omega t - L\omega\cos\omega t + L\omega e^{-\frac{R}{L}t}\right)$.

96. $y'<x<x^2$. **97.** $y'>0$. **103.** $y=\frac{1}{6}x^3-\sin x+C_1x+C_2$.

104. $y=\frac{\operatorname{arctg} x}{2}(x^2-1)-\frac{x}{2}\ln(1+x^2)+C_1x+C_2$.

105. $y=-\frac{\sin 2x}{8}+C_1x^2+C_2x+C_3$.

106. $y=\frac{3x^2\ln|x|}{2}+\frac{x^3}{3}+C_1x^2+C_2x+C_3$.

107. $y=xe^x-2e^x+x+3$. **108.** $y=2\ln|x+1|+1-x$.

109. $C_1x - C_1^2y = \ln|C_1x+1| + C_2$, $2y = x^2 + C$, $y = C$.

110. $9C_1^2(y-C_2)^2 = 4(C_1x+1)^3$; $y = \pm x + C$. **111.** $y = \dfrac{2}{5}x^2\sqrt{2x}$.

112. $y = C_1\sin x + C_2 - x - \dfrac{1}{2}\sin 2x$. **113.** $y = C_1(x+2)e^{-x} + C_2x + C_3$.

114. $y = C_1x^5 + C_2x^3 + C_3x^2 + C_4x + C_5$. **115.** $4C_1y = 4 + (C_1x+C_2)^2$.

116. $y = \dfrac{4}{x^2}$. **117.** $\ln\left|\operatorname{tg}\left(\dfrac{y}{2}+\dfrac{\pi}{6}\right)\right| = 2(x+1)$.

118. $\ln y = C_1\operatorname{tg}(C_1x+C_2)$, $\ln\left|\left(\ln y - C_1\right)/(\ln y + C_1)\right| = 2C_1x + C_2$,

$(C-x)\ln y = 1,\ y = C$.

119. $x = 3C_1t^2 + \ln C_2t,\ y = 2C_1t^3 + t;\ \ y = C$.

120. $x = \ln|t| + 2C_1t - C_2,\ \ y = t + C_1t^2 + C_3;\ \ y = C_1x + C_2$.

121. $C_1^2y + 1 = \pm\operatorname{ch}(C_1x+C_2)$; $C_1^2y - 1 = \sin(C_1x+C_2)$; $2y = (x+C)^2$; $y = 0$.

122. $y = 1 + \sin x$. **123.** Решения можно записать в трех формах:

$y = C_1\sin(C_2x+C_3)$, или $y = C_1\operatorname{sh}(C_2x+C_3)$,

или $y = C_1\operatorname{ch}(C_2x+C_3)$.

124. Линейно независима. **125**. Линейно зависима.

126. Линейно независима. **127**. Линейно зависима.

128. Линейно независима. **129**. Линейно зависима.

130. Линейно зависима. **131**. Линейно зависима.

132. Линейно зависима. **133**. Линейно зависима.

134. 1. **135.** 0. **136.** e^{-2x}. **137.** 0. **138.** $-8\sin^3 x$.

139. $-e^{-2x}$. **140.** $y'' + y' = 0$. **141.** $y'' - 4y' + 5y = 0$.

142. $y'' - \dfrac{6}{x}y' + \dfrac{12}{x^2}y = 0$. **143.** $y''' - y'' = 0$. **144.** $y''' + y' = 0$.

145. $y''' - y'' = 0$. **146.** $y'' - 8y' + 15y = 0$. **147.** $y''' - 2y'' + y' - 2y = 0$.

148. $y = C_1e^{5x} + C_2e^x$. **149.** $y = C_1e^{3x} + C_2e^{-x}$.

150. $y = C_1\dfrac{\cos x}{x} + C_2\dfrac{\sin x}{x}$. **151.** $C_1\left(\dfrac{1}{2}x\ln\left|\dfrac{1+x}{1-x}\right| - 1\right) + C_2x$.

152. $y = C_1x + C_2|\ln x|$. **153.** $y = C_1\sin x + C_2\sin^2 x$.

154. $y = C_1 \cos(\sin x) + C_2 \sin(\sin x)$. **155.** $y = \dfrac{C_1}{x} + C_2 x^3 + x^4$.

156. $y = \left(C_1 - x + \dfrac{x^2}{x} \right) e^x + C_2 x$. **157.** $y = C_1(\cos(e^{-x}) + C_2 \sin(e^{-x}) + e^{-x}$.

158. $y = \dfrac{C_1}{x} + C_2 \cdot e^{1/x} - \dfrac{\ln|x|}{x} + 1$. **159.** $y = C_1 \sin e^x + C_2 \cos e^x + x$.

160. $y = C_1 x^2 + C_2(2x - 1) + x^3$. **161.** $y = C_1 + C_2 e^{x^2} + (x^2 - 1)e^{x^2}$.

162. $y = C_1 + C_2 \operatorname{tg} x + \dfrac{1}{2}(1 + x \operatorname{tg} x)$.

163. $y = C_1 + C_2 x(\ln x - 1) + x(\ln^2 x - 2\ln|x| - 2)$.

164. $y = C_1 + C_2 \left(x + \dfrac{1}{2} \right) e^{-2x} - x^2$. **165.** $y = C_1 + C_2 \sin x + (\ln|\sin x| - 1) \sin x$.

166. $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{4x}$. **167.** $y = C_1 + C_2 e^{2x}$. **168.** $y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + C_3 e^{-x}$.

169. $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{4x} + C_3 e^{-3x}$. **170.** $y = C_1 + C_2 e^x + C_3 e^{-x} + C_4 e^{3x} + C_5 e^{-3x}$.

171. $y = e^{-x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$. **172.** $y = e^{x/2} \left(C_1 \cos \dfrac{\sqrt{3}}{2} x + C_2 \sin \dfrac{\sqrt{3}}{2} x \right)$.

173. $y = C_1 e^x + e^{-x/2} \left(C_2 \cos \dfrac{\sqrt{3}}{2} x + C_3 \sin \dfrac{\sqrt{3}}{2} x \right)$.

174. $y = C_1 e^{2x} + C_2 \cos 3x + C_3 \sin 3x$.

175. $y = e^{x/\sqrt{2}} \left(C_1 \cos \dfrac{x}{\sqrt{2}} + C_2 \dfrac{x}{\sqrt{2}} \right) + e^{-x/\sqrt{2}} \left(C_3 \cos \dfrac{x}{\sqrt{2}} + C_4 \sin \dfrac{x}{\sqrt{2}} \right)$.

176. $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + e^{x/2} \left(C_3 \cos \dfrac{\sqrt{3}}{2} x + C_4 \sin \dfrac{\sqrt{3}}{2} x \right) +$

$+ e^{-x/2} \left(C_5 \cos \dfrac{\sqrt{3}}{2} x + C_6 \sin \dfrac{\sqrt{3}}{2} x \right)$.

177. $y = e^{2x}(\mathrm{C}_1 + C_2 x + C_3 x^2)$. **178.** $y = C_1 e^{-x} + C_2 + C_3 x$.

179. $y = e^x(C_1 + C_2 x) + C_3 \cos x + C_4 \sin x$.

180. $y = e^{2x}(C_1 + C_2 x) + C_3 \cos 2x + C_4 \sin 2x$.

181. $y = (C_1 + C_2 x) \cos 2x + (C_3 + C_4 x) \sin 2x$.

182. $y = e^{-x/2}\left[(C_1 + C_2x)\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + (C_3 + C_4x)\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right].$

183. $y = C_1 + (C_2 + C_3x)\cos 2x + (C_4 + C_5x)\sin 2x$.

184. $y = C_1e^{-x} + (C_2 + C_3x)\cos x + (C_4 + C_5x)\sin x$.

185. $y = 2 + C_1\cos x + C_2\sin x + \cos x \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|.$

186. $y = e^x\left(C_1 + C_2x + \sqrt{4 - x^2} + x\arcsin\frac{x}{2}\right).$

187. $y = C_1\cos x + C_2\sin x - \dfrac{\cos 2x}{2\cos x}.$

188. $y = (C_1 + C_2x)e^x - e^x\ln\sqrt{1 + x^2} + e^x x \operatorname{arctg} x$.

189. $y = \dfrac{1}{x} + e^x(C_1 + C_2x)$. **190.** $y = -4\sqrt{x} + C_1e^x + C_2e^{-x}$.

191. $y = \left(C_1 + C_2x + \frac{1}{2}x^2\ln|x| - \frac{3}{4}x^2\right)e^{-2x}.$

192. $y = C_1 + C_2x + C_3e^{-x} + 1 - x - x\ln|x|$. **193.** $y_ч = Ax^2 + Bx + C$.

194. $y_ч = Ax^3 + Bx^2 + Cx$. **195.** $y_ч = Ax^4 + Bx^3 + Cx^2$.

196. $y_ч = Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx$. **197.** $y_ч = e^{-x}(Ax + B)$.

198. $y_ч = e^x(Ax^2 + Bx)$. **199.** $y_ч = A\cos x + B\sin x$.

200. $y_ч = (Ax^4 + Bx^3 + Cx^2)\cos 3x + (Dx^4 + Ex^3 + Fx^2)\sin 3x$.

201. $y_ч = e^{-x}[(Ax^2 + Bx)\cos x + (Cx^2 + Dx)\sin x]$.

202. $y_ч = Ae^x + Be^{-2x}.$

203. $y_ч = x(Ax + B) + Cxe^{-4x}$. **204.** $y_ч = Ax + B + C\cos x + D\sin x$.

205. $y_ч = Ae^x + xe^x(B\cos x + B\sin x)$. **206.** $y_ч = Ax^2 + Bxe^x$.

207. $y_ч = Ae^{2x} + x(B\cos 2x + C\sin 2x).$

208. $y_ч = A\cos x + B\sin x + C\cos 3x + D\sin 3x$.

209. $y_ч = Ax + B\cos 8x + C\sin 8x$. **210.** $y = -x^2 + x - 3 + C_1e^{-x} + C_2e^{-x}$.

211. $y = x^3 + x + C_1 + C_2e^{4x}$. **212.** $y = \dfrac{1}{2} + C_1e^{-2x} + C_2e^{-3x}$.

213. $y = 3x + C_1 + C_2e^{-x}$. **214.** $y = 2e^x + C_1\cos x + C_2\sin x$.

215. $y=2xe^x+C_1e^x+C_2e^{-x}$. **216.** $y=2x^2e^x+e^x(C_1+C_2x)$.

217. $y=e^x-1+C_1e^{-x}+C_2e^{3x}$. **218.** $y=3xe^{2x}+x^2+3x+\frac{7}{2}+C_1e^x+C_2e^{2x}$.

219. $y=\frac{1}{3}xe^{3x}+3x^2+2x+C_1+C_2e^{3x}$. **220.** $y=\frac{1}{2}x^2e^{-2x}+e^{-2x}(C_1+C_2x+C_3x^2)$.

221. $y=\frac{1}{2}x^3+x^2+C_1e^x+C_2+C_3x$.

222. $y=xe^x+C_1e^x+C_2e^{-x}+C_3\cos x+C_4\sin x$.

223. $y=-\sin x+2\cos x+C_1e^x+C_2e^{-x}$.

224. $y=-2\sin 2x+C_1\cos x+C_2\sin x$.

225. $y=3\sin 2x-2\cos 2x+e^{x/2}\left(C_1\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+C_2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$.

226. $y=-\frac{1}{4}x\cos 2x+C_1\cos 2x+C_2\sin 2x$.

227. $y=\frac{1}{2}(e^x+x\sin x)+C_1\cos x+C_2\sin x$.

228. $y=\frac{x}{2}\sin x-\frac{1}{3}\cos 2x+C_1\cos x+C_2\sin x$.

229. $y=e^x(x\cos x+\sin x)+C_1e^{2x}+C_2e^{-2x}$.

230. $y=x^2e^x\cos x+e^x(C_1\cos x+C_2\sin x)$.

231. $y=x^2\sin x+C_1\cos x+C_2\sin x$.

232. $y=\frac{3}{8}e^{2x}-\frac{1}{5}x\cos 2x+\frac{2}{5}x\sin 2x+C_1e^x+C_2\cos 2x+C_3\sin 2x$.

233. $y=x\cos x+2xe^{-x}-1+C_1e^x+C_2e^{-x}+C_3\cos x+C_4\sin x$.

234. $y=-\frac{x^2}{8}\cos x+(C_1+C_2x)\cos x+(C_3+C_4x)\sin x$.

235. $y=-\frac{1}{2}-\frac{1}{10}\cos 2x+C_1e^x+C_2e^{-x}$.

236. $y=\frac{1}{8}+\frac{1}{8}x\sin 2x+C_1\cos 2x+C_2\sin 2x$.

237. $y=-\frac{1}{30}\sin 4x+\frac{1}{6}\sin 2x+C_1\cos x+C_2\sin x$.

238. $y=\frac{1}{2}x\,\mathrm{sh}\,x+C_1\,\mathrm{ch}\,x+C_2\,\mathrm{sh}\,x$. **239.** $y=-\frac{x}{4}\cos 2x+\frac{1}{8}\sin 2x$.

240. $y=-x+\mathrm{ch}\,x$. **241.** $y=\frac{3}{2}x^2e^{-2x}$. **242.** $y=e^{2x}-e^{3x}+xe^{-x}$.

243. $y=x\cos x+x^2\sin x$. **244.** $y=xe^{3x}+x+e^{-x}$. **245.** $y=\mathrm{sh}\,x+x^2$.

246. $y=\cos x+2\sin x+e^{-x}+(2x-3)e^x$. **247.** $y'=z,\ z'=u,\ u'=xyz-z^3$.

248. $y'=u,\ u'=v,\ v'=w,\ w'=y^2$.

249. $y'=v,\ z'=w,\ u'=t,\ v'=v+w,\ w'=w+t,\ t'=t+v$.

250. $y'=v,\ z'=u,\ u'=2y-z,\ v'=w,\ w'=x+y-z$.

251. $y'=t,\ z'=x^2-uz,\ t'=z+u,\ u'=v,\ v'=w,\ w'=-xy$.

252. Да. **253.** Да. **254.** Нет. **255.** Да. **256.** Да. **257.** Да.

258. Да. **259**. Да. **260.** Нет. **261.** а) Да; б) Нет.

262. $C_1x^2=2t+C_2$, $y^2=C_1(2t+C_2)$.

263. $y^2=\dfrac{(C_1+C_2-x)^2}{2(C_2-x)}$, $z^2=\dfrac{(C_1-C_2+x)^2}{2(C_2-x)}$.

264. $y=-\dfrac{1}{x^2+C_1}$, $z=x(C_2-\ln|x|)$. **265.** $e^y-e^x=C_1,\ x=z\left(C_2-\dfrac{z}{2}\right)$.

266. $y=C_1(1+x^2)$, $z=\dfrac{C_2}{x}+\dfrac{C_1}{2}x+\dfrac{C_1x^2}{4}+\dfrac{x^2}{3}$.

267. $y=C_1x^2+\dfrac{1}{4C_1}$, $\dfrac{z^3}{3}-xz-\dfrac{C_1x^3}{3}-\dfrac{x}{4C_1}=C_2$;

$y=x,\ \dfrac{z^3}{3}-xz-\dfrac{x^2}{2}=C$; $y=-x,\ \dfrac{z^3}{3}-xz+\dfrac{x^2}{2}=C$.

268. $y=C_2e^{C_1x}$, $z=C_1\cdot C_2e^{C_1x}$. **269.** $y=C_2e^{C_1x^2}$, $z=\dfrac{e^{-C_1x^2}}{2C_1\cdot C_2}$.

270. $y=C_2e^{C_1x}$, $z=x+\dfrac{C_2}{C_1}e^{C_1x}$; $y=0,\ z=x+C$.

271. $y=\dfrac{x+C_1}{x+C_2}$, $z=\dfrac{(C_2-C_1)x}{(x+C_2)^2}$. **272.** $y_1=C_1\cdot e^{4x}$, $y_2=(2C_3x+C_2)e^{4x}$,

$y_3=C_3e^{4x}$, $y_4=(C_1e^x+C_4)e^{3x}$, $y_5=(C_1e^x+C_4x+C_5)e^{3x}$.

273. $y=x+\dfrac{1}{C_1C_2}e^{-C_1x}$, $z=C_2\cdot e^{C_1x}$; $y=x-e^x$, $z=e^{-x}$.

274. $z = C_1 y$, $y^3 = \dfrac{3x^2}{2C_1} + C_2$; $z = y$, $y^3 = \dfrac{3}{2}x^2 + 1$.

275. $\dfrac{1}{x+y} + t = C_1$, $\dfrac{1}{x-y} + t = C_2$. **276.** $x^2 - y^2 = C_1$, $x - y + t = C_2$.

277. $\operatorname{tg}(x+y) = t$, $\operatorname{tg}(x-y) = t$. **278.** $t^2 - x^2 = C_1$, $x^2 - y^2 = C_2$.

279. $x^2 + y^2 = C_1 x - t^2$, $y = C_2 x$. **280.** $\sin x - \sin y = C_1$, $\sin x - z = C_2$.

281. $x + z = C_1$, $(x+y+z)(y-3x-z) = C_2$.

282. $x^2 - 2y = C_1$, $6xy - 2x^3 - 3z^2 = C_2$.

283. $y^2 + z^2 = C_1$, $x(y-z) = C_2$. **284.** $x - y + z = C_1$, $\ln|x| + \dfrac{z}{y} = C_2$.

$x^2 + y^2 + z^2 = C_1$, $yz = C_2 x$. **285.** $x^2 + y + z^2 = C_1$,

$(y^2 - C_1)(z^2 - C_1) = C_2 y^2 z^2$. **286.** $y = C_1 e^{-2x}$, $z = C_2 e^{x}$.

287. $x = C_1$, $y = C_2 e^{-t}$. **288.** $x = C_3 e^t - 2C_2 e^{2t}$, $y = C_2 e^{2t}$, $z = C_1 e^{-t}$.

289. $x = e^{2t}\left(C_3 + C_2 t + \dfrac{C_1}{2} t^2\right)$, $y = e^{2t}(C_2 + C_1 t)$, $z = C_1 e^{2t}$.

290. $x = e^{2t}\left(C_1 \cos t + C_2 \sin t\right)$, $y = e^{2t}\left(C_1 \sin t - C_2 \cos t\right)$.

291. $x = C_1 \cos t + C_2 \sin t$, $y = \dfrac{1}{2}\left[(C_1 - C_2)\cos t + (C_1 + C_2)\sin t\right]$.

292. $x = C_2 e^{2t} + C_3 e^{3t}$, $y = \dfrac{C_1}{6} e^{-6t} + \dfrac{C_2}{2} e^{2t} + \dfrac{C_3}{3} e^{3t}$, $z = C_1 e^{-6t}$.

293. $x = (C_1 - C_2)\cos t + (C_1 + C_2)\sin t$, $y = C_1 \sin t - C_2 \cos t + C_3 e^t$,

$z = C_1 \cos t + C_2 \sin t + C_3 e^t$.

294. $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}$, $z = C_1 e^{2x} + 2C_2 e^{3x}$; $y = e^{2x} - e^{3x}$, $z = e^{2x} - 2e^{3x}$.

295. $y = C_1 e^{x} + C_2 e^{-2x}$, $z = 2C_1 e^{x} + 5C_2 e^{-2x}$; $y = e^{-2x}$, $z = 5e^{-2x}$.

296. $y = C_1 + C_2 e^{5x}$, $z = C_1 - 4C_2 e^{5x}$. **297.** $y = e^{2x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x)$,

$z = e^{2x}(C_1 \sin 3x - C_2 \cos 3x)$. **298.** $x = 5C_1 \cos 2t + 5C_2 \sin 2t$,

$y = (-4C_1 + 2C_2)\cos 2t - (2C_1 + 4C_2)\sin 2t$.

299. $x = -2C_1 e^t - 8C_2 e^{2t} - 3C_3 e^{3t}$, $y = C_1 e^t + 3C_2 e^{2t} + C_3 e^{3t}$,

$z = 2C_1 e^t + 7C_2 e^{2t} + 3C_3 e^{3t}$.

300. $x=(C_2+C_3)\cos t+(-C_2+C_3)\sin t$, $y=C_1e^t+C_2\cos t+C_3\sin t$,

$z=C_1e^t-C_2\sin t+C_3\cos t$; $x=\cos t$, $y=\dfrac{1}{2}(\cos t+\sin t)$,

$z=\dfrac{1}{2}(\cos t-\sin t)$.

301. $x=C_1e^{-t}+(7C_2+11C_3)\cos t+(-11C_2+7C_3)\sin t$,

$y=-2C_1e^{-t}+(15C_2+9C_3)\cos t+(-9C_2+15C_3)\sin t$,

$z=2C_1e^{-t}+(-2C_2+8C_3)\cos t+(-8C_2-2C_3)\sin t$.

302. $y=e^{-2x}(C_1+C_2x)$, $z=e^{-2x}\left[-C_1+C_2(1-x)\right]$.

303. $x=e^{-t}(C_1+C_2t)$, $y=e^{-t}\left[2C_1+C_2(2t-1)\right]$.

304. $x=C_1e^{-2t}+C_2e^t$, $y=-2C_1e^{-2t}+3C_2e^t-3C_3e^t$,

$z=-2C_1e^{-2t}+C_3e^t$. **305.** $x=C_1e^{-t}+(C_2t+C_2+C_3)e^t$,

$y=-2C_1e^{-t}+3C_2e^t$, $z=2C_1e^{-t}+(C_2t+C_3)e^t$.

306. $x=C_1+C_3e^{-t}$, $y=3C_1-3C_2-2C_3e^{-t}$, $z=C_2+2C_3e^{-t}$.

307. $x=C_1+C_2(t+1)+C_3e^{-t}$, $y=3C_2-2C_3e^{-t}$, $z=C_1+C_2t+2C_3e^{-t}$.

308. $y_1=x^2+C_1e^{2x}+C_2e^{3x}$, $y_2=x+2+C_1e^{2x}+2C_2e^{3x}$; $y_1=x^2$, $y_2=x+2$.

309. $y=2e^{2x}+C_1e^x+C_2e^{-x}$, $z=9e^{2x}+3C_1e^x+C_2e^{-x}$.

310. $y=xe^x+C_1e^x+C_2e^{-x}$, $z=(x+1)e^x+C_1e^x+3C_2e^{-x}$.

311. $x=2\cos t+3\sin 2t+2e^{-t/2}\left(C_1\cos(\sqrt{3}/2)t+C_2\sin(\sqrt{3}/2)t\right)$,

$y=7\sin 2t+e^{-t/2}\Big[\left(3C_1-\sqrt{3}C_2\right)\cos(\sqrt{3}/2)t+$

$+\left(3C_1-\sqrt{3}C_2\right)\cos(\sqrt{3}/2)t\Big]$.

312. $x=-t\cos t+C_1\cos t+C_2\sin t$,

$y=t(\cos t+\sin t)-(C_1-C_2)\cos t-(C_1+C_2)\sin t$;

$x=(-t+1)\cos t-\sin t$, $y=(t-2)\cos t+t\sin t$.

11.5. ЗНАКОЧЕРЕДУЮЩИЕСЯ РЯДЫ

Ряд называется *знакочередующимся*, если он имеет вид

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n\ ,\quad u_n \ge 0\,. \tag{11.8}$$

Теорема 7 (признак Лейбница). Если члены знакочередующегося ряда не возрастают по абсолютной величине с ростом n, т.е. начиная с некоторого n, верно неравенство $u_{n+1} \le u_n$ и $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$, то ряд (11.8) сходится, причем, если его сумма равна s, то $0 \le s \le u_1$.

Пример. Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n^2}$.

∇ Ряд знакочередующийся. Применим признак Лейбница (теорема 7). $u_n = \dfrac{1}{n^2}$, $u_{n+1} = \dfrac{1}{(n+1)^2}$. Очевидно, что $u_{n+1} = \dfrac{1}{(n+1)^2} < \dfrac{1}{n^2} = u_n$.

Кроме того, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2} = 0$. Выполнены оба условия признака Лейбница, следовательно, ряд сходится. #

Пример. Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}n}{6n-5}$.

∇ Дан знакочередующийся ряд. Члены этого ряда по абсолютной величине монотонно убывают. В самом деле,

$$u_n = \frac{n}{6n-5} > \frac{n+1}{6(n+1)-5} = u_{n+1},\quad \text{так как}\quad \frac{n}{6n-5} - \frac{n+1}{6(n+1)-5} =$$

$$= \frac{6n^2 + n - 6n^2 + 5n - 6n + 5}{(6n-5)(6n+1)} = \frac{5}{(6n-5)(6n+1)} > 0\,.$$

Однако $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\dfrac{n}{6n-5} = \dfrac{1}{6} \ne 0$. Значит, ряд расходится по необходимому признаку (теорема 1, следствие), по признаку Лейбница расходимость не установить. #

11.6. ЗНАКОПЕРЕМЕННЫЕ РЯДЫ

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ называется *знакопеременным*, если членами его являются любые действительные числа: $(\forall n)\ u_n \in R$.

Теорема 8 (признак абсолютной сходимости). Дан ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$, $u_n \in R$. Если сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n|$, то сходится и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$.

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ в этом случае называется *абсолютно сходящимся*.

Так как знакочередующийся ряд – частный случай знакопеременного ряда, то и к знакочередующемуся ряду можно применять признак абсолютной сходимости.

Пример. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\alpha}{(\ln 10)^n}$.

∇ Дан знакопеременный ряд. Применим к нему признак абсолютной сходимости. Составим ряд из абсолютных величин членов исходного ряда: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\sin n\alpha|}{(\ln 10)^n}$. Этот знакоположительный ряд сравним в непредельной форме с рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(\ln 10)^n}$, который представляет собой геометрическую прогрессию с $q=\frac{1}{\ln 10}<1$, следовательно, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(\ln 10)^n}$ сходится. Имеем очевидное неравенство: $\frac{|\sin n\alpha|}{(\ln 10)^n}\le\frac{1}{(\ln 10)^n}$, тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\sin n\alpha|}{(\ln 10)^n}$ также сходится, а значит, по признаку абсолютной сходимости исходный ряд сходится абсолютно.#

Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ сходится, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ расходится, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ называется *условно сходящимся.*

Пример. Исследовать на абсолютную или условную сходимость так называемый ряд Лейбница

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-...+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}+...=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\ . \tag{11.9}$$

∇ По признаку Лейбница (теорема 7) этот ряд сходится, так как для него выполняются оба условия этого признака: а) $u_{n+1}=\frac{1}{n+1}<\frac{1}{n}=u_n$ и б) $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$. Но ряд, составленный из абсолютных величин данного ряда $1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n}+...$, является гармоническим, который расходится (см. 11.4). Следовательно, ряд Лейбница сходится условно. #

Теорема 9. В сходящемся (абсолютно или условно) ряде можно группировать члены, не меняя их порядка. Иными словами, если сходится ряд $u_1+u_2+...+u_n+...$, то сходится и ряд

$(u_1+u_2+...+u_n)+(u_{n+1}+u_{n+2}+...+u_l)+(u_{l+1}+u_{l+2}+...+u_m)+...$, причем оба ряда имеют одну и ту же сумму.

Теорема 10. Абсолютно сходящийся ряд остается сходящимся и сохраняет сумму при любой перестановке его членов.

Теорема 11. В условно сходящемся ряде при соответствующей перестановке его членов можно сделать его сумму равной любому наперед заданному числу или сделать ряд расходящимся.

Произведением рядов $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = s_1$ и $\sum_{n=1}^{\infty} v_n = s_2$ называется ряд $\sum_{n=1}^{\infty} w_n$, где $w_n = u_1 v_n + u_2 v_{n-1} + ... + u_n v_1$.

Теорема 12. Если перемножаемые ряды сходятся абсолютно, то ряд-произведение сходится также абсолютно и имеет сумму, равную $s_1 \cdot s_2$.

Краткие рекомендации по применению тех или иных признаков сходимости к соответствующим рядам приведены в следующей таблице.

Знакоположительные ряды	Знакочередующиеся ряды	Знакопеременные ряды
1. Необходимый 2. Сравнения в непредельной форме 3. Сравнения в предельной форме 4. Даламбера 5. Коши радикальный 6. Коши интегральный	1. Необходимый. 2. Лейбница. 3. Абсолютной сходимости	1. Необходимый. 2. Абсолютной сходимости

Следует иметь в виду, что существуют и другие признаки сходимости рядов.

Задачи для самостоятельного решения

Найти сумму ряда, исходя из определения.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$. **2.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+3)}$. **3.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n+2^n}{6^n}$.

Доказать расходимость рядов с помощью необходимого признака.

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{2n+2}$. **5.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^4}$. **6.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{1000n+1}$.

Решить вопрос о сходимости рядов с помощью признаков сравнения.

7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n}{1+n^2}$. **8.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(n+1)}$. **9.** $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{\pi}{2^n}$. **10.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{\sqrt[4]{n^5}}$.

11. $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n^2+1}{n^2}\right)$. **12.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[4]{n+1}}{n\sqrt{2n+7}+\sqrt[3]{n}-2}$.

13. $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{1}{n}\cos\frac{1}{n}\operatorname{tg}\frac{1}{\sqrt{n}}$. **14.** $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)$.

Исследовать сходимость рядов с помощью признака Даламбера.

15. $\sum_{n=1}^{\infty} n\operatorname{tg}\frac{\pi}{2^{n+1}}$. **16.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot 3...(2n-1)}{3^n n!}$. **17.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!}{2^n n}$.

18. $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \sin\frac{\pi}{2^n}$. **19.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^n}$. **20.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n n!}{n^n}$.

Исследовать сходимость рядов с помощью признака Коши (радикального).

21. $\sum_{n=1}^{\infty} \arcsin^n \frac{1}{n}$. **22.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}}{3^n}$. **23.** $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n+1}{2n+1}\right)^{\frac{n}{2}}$.

Исследовать сходимость рядов с помощью интегрального признака Коши.

24. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln n}$. **25.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\ln^2(n+1)}$.

Выяснить, какие из рядов сходятся, какие расходятся.

26. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+\cos n\pi}{\sqrt[3]{3n^4+5}}$. **27.** $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{n+1}{n}}$. **28.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!}$.

29. $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{\pi}{2n}$. **30.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2-n+1}\right)$.

31. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg}^n \frac{1}{n}$. **32.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n2^n}$. **33.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+n^2}{1+n^3}\right)^2$. **34.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$.

35. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^n}{(2n)!} = 0$.

Исследовать сходимость следующих рядов. В случае сходимости исследовать, как ряды сходятся: абсолютно или условно.

36. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{(2n-1)^3}$. **37.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\ln(n+1)}$. **38.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\alpha}{n^2}$.

39. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n 2^n}$. **40.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n+1}{n}$. **41.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$.

42. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n - \ln n}$. **43.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^{n^2}}{n!}$. **44.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n^2+n}{2}} \frac{n}{2^n}$.

45. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{2n+1}{3n+1}\right)^n$.

46. Показать, что если ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ и $\sum b_n^2$ сходятся, то и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ абсолютно сходится.

47. Показать, что если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ абсолютно сходится, то и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n} a_n$ тоже абсолютно сходится.

48. Дан ряд $-1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{(-1)^n}{n!} + \ldots$. Оценить ошибку, допускаемую при замене суммы этого ряда суммой его первых четырех членов. Суммой первых пяти членов. Что можно сказать о знаке этих ошибок?

49. Сколько нужно взять членов ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$, чтобы вычислить его сумму с точностью до 0,01? до 0,001?

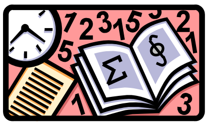
ОТВЕТЫ К ЗАДАЧАМ ГЛАВЫ 11

1. $s=\dfrac{1}{3}$. **2.** $s=\dfrac{11}{18}$. **3.** $s=\dfrac{3}{2}$.

7. Расходится. **8.** Расходится. **9.** Сходится. **10.** Сходится.
11. Сходится. **12.** Сходится. **13.** Сходится. **14.** Сходится.
15. Сходится. **16.** Сходится. **17.** Сходится. **18.** Сходится.
19. Сходится. **20.** Расходится. **21.** Сходится. **22.** Сходится.
23. Расходится. **24.** Расходится. **25.** Сходится. **26.** Сходится.
27. Расходится. **28.** Сходится. **29.** Расходится. **30.** Расходится.
31. Сходится. **32.** Расходится. **33.** Сходится **34.** Сходится.
36. Сходится абсолютно. **37.** Сходится условно.
38. Сходится абсолютно. **39.** Сходится абсолютно.
40. Расходится. **41.** Сходится условно. **42.** Сходится условно.
43. Расходится. **44.** Сходится абсолютно. **45.** Сходится абсолютно.

48. а) ошибка по модулю меньше $\dfrac{1}{120}$, ошибка отрицательная.

49. а) 99 членов; б) 999 членов.



ГЛАВА 12

ФУНЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ

12.1. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Ряд

$$f_1(x)+f_2(x)+\ldots+f_n(x)+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x), \qquad (12.1)$$

членами которого являются функции от x, определенные на множестве D, называется *функциональным рядом*. Если числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$ сходится, где $x_0 \in D$, то x_0 называется *точкой сходимости* ряда (12.1). Множество всех точек сходимости ряда (12.1) называется *областью сходимости* ряда (12.1). Если существует $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x)=S(x)$, где $S_n(x)=f_1(x)+f_2(x)+\ldots+f_n(x)$, $x\in X$, то говорят, что ряд (12.1) сходится на множестве X к $S(x)$. $S(x)$ называется *суммой ряда* (12.1). На языке «$\varepsilon-N$» это можно записать так:

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x)=S(x) \Leftrightarrow (\forall\varepsilon>0)\ (\forall x\in X)\ (\exists N=$$
$$=N(\varepsilon,x))\ (n>N \Rightarrow |S_n(x)-S(x)|<\varepsilon).$$

Для нахождения области сходимости ряда (12.1) можно использовать эталонные ряды и достаточные признаки сходимости числовых рядов.

Пример. Найти область сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^x}$.

∇ Данный ряд представляет собой обобщенный гармонический ряд, который сходится при $x>1$ и расходится при $x\le 1$. Областью сходимости ряда является интервал $(1;+\infty)$.#

Пример. Найти область сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln^n x$.

∇ Данный ряд является геометрической прогрессией, которая сходится, если $q=|\ln x|<1$. $|\ln x|<1 \Rightarrow -1<\ln x<1 \Rightarrow \dfrac{1}{e}<x<e$. Область сходимости ряда – интервал $\left(\dfrac{1}{e};\ e\right)$. #

Пример. Найти область сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{n\cdot 2^n}. \tag{а}$$

∇ Для нахождения области сходимости данного ряда используем признак Даламбера, который применим лишь к рядам с положительными членами. Составим ряд из абсолютных величин членов данного ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|x+2|^n}{n\cdot 2^n} \tag{б}$$

и к нему применим признак Даламбера (теорема 11.4). $q=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=$ $=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|x+2|^{n+1}n\cdot 2^n}{(n+1)2^{n+1}|x+2|^n}=\dfrac{|x+2|}{2}\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n+1}=\dfrac{|x+2|}{2}$. Ряд (б) будет сходиться, если $q=\dfrac{|x+2|}{2}<1\Rightarrow |x+2|<2\Rightarrow -2<x+2<2\Rightarrow -4<x<0$. Тогда ряд (а) будет сходиться, и притом абсолютно в интервале (–4, 0). При $x\in(-\infty,\ -4)\bigcup(0,\ +\infty)$ ряд (а) расходится, как не удовлетворяющий необходимому признаку сходимости $(q>1)$ [следствие из теоремы (11.1)]. Если $q=1$, то ответа о сходимости ряда признак Даламбера не дает и при $x=-4$ и $x=0$ ряд нужно исследовать особо. При x = –4 из ряда (а) получим числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-4+2)^n}{n\cdot 2^n}=$ $=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-2)^n}{n\cdot 2^n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n 2^n}{n\cdot 2^n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}$, который сходится (ряд Лейбница) [см. задачу раздела (11.6)]. При $x=0$ из ряда (а) получим $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n}{n\cdot 2^n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ – гармонический ряд, который расходится (раздел 11.2). Итак, областью сходимости ряда (а) будет промежуток [–4; 0). #

Задачи для самостоятельного решения

Найти область сходимости следующих рядов.

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n^2}$. **2.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n(n+1)x^n$. **3.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin nx}{n^2}$. **4.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^n\operatorname{tg}\dfrac{x}{2^n}$.

5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}e^{-n^2x}$. **6.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{1+x^{2n}}$. **7.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}10^n x^n$. **8.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n!\ x^n$.

9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\cdot 3^n x^n$. **10.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n+1)}{n+1} x^{n+1}$. **11.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^n x\right)^n$.

12. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{e^{nx}}$. **13.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x+5)^{n^2}}{(n+1)^n}$. **14.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}\left(\frac{x}{2x+1}\right)^n$.

15. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^{n^2}(x+2)^{n^2}$. **16.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)(2n-1)!}$.

17. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^2+1}}{n^2(5x+9)^{2n-1}}$. **18.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n n \cos^n x$. **19.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^{3n}(n!)^3}{(3n)!} tg^n x$.

12.2. РАВНОМЕРНАЯ СХОДИМОСТЬ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ РЯДОВ

Сходящийся в некотором промежутке X функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ называется *равномерно сходящимся* в этом промежутке к $S(x)$, если $(\forall\varepsilon>0)\ (\exists N=N(\varepsilon))\ (\forall x\in X)\ (n>N \Rightarrow |S_n(x)-S(x)|<\varepsilon)$.

Теорема 1 (признак Вейерштрасса). Дан ряд (12.1). Если существует такой знакоположительный сходящийся числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \tag{12.2}$$

что $(\forall x\in X)\ |f_n(x)|\le a_n$, то ряд (12.1) сходится равномерно в промежутке X.

Ряд (12.2) в этом случае называется *мажорирующим рядом* или *мажорантой*, а ряд (12.1) – *мажорируемым* сходящимся рядом (12.2).

Пример. Установить равномерную сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$ на любом отрезке.

∇ Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Он является знакоположительным, сходящимся (обобщенный гармонический, $p=2>1$). Для $(\forall x)$ справедливо неравенство $|\cos nx|\le 1 \Rightarrow \frac{|\cos nx|}{n^2}\le\frac{1}{n^2}$. Это значит, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$ мажорируем на $(-\infty,+\infty)$, а следовательно, сходится равномерно на любом отрезке. #

Пример. Показать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n\sqrt{n}}$ сходится равномерно на $[-1;1]$.

∇ Для значений $x\in[-1,\ 1]$ очевидно $\left|\frac{x^n}{n\sqrt{n}}\right|\le\frac{1}{n\sqrt{n}}$. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}$ – знакоположительный, сходящийся и, следовательно, по признаку Вейерштрасса ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n\sqrt{n}}$ сходится равномерно на $[-1;1]$. #

Задачи для самостоятельного решения

Пользуясь признаком Вейерштрасса, доказать равномерную сходимость следующих функциональных рядов в указанных промежутках.

20. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n!}$, $(-\infty,\ +\infty)$. **21.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{3^n\cdot n^3}$, $[-3;3]$.

22. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-n^2x^2}}{n^2}$, $(-\infty,\ +\infty)$. **23.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n-1}\sqrt{1+nx}}$, $[0;\ +\infty)$.

24. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n\ln n}{n^2\cdot 2^n}$, $[0;4]$.

12.3. СВОЙСТВА РАВНОМЕРНО СХОДЯЩИХСЯ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ РЯДОВ

Теорема 2. Если члены ряда (12.1) – функции непрерывные в некотором промежутке X и ряд сходится в этом промежутке равномерно, то сумма его $S(x)$ – функция также непрерывная в X.

Теорема 3. Если члены ряда (12.1) – функции непрерывные в X и ряд сходится равномерно в X, то ряд можно почленно интегрировать на любом отрезке $[a,\ b]\subset X$. Иначе говоря:

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)\Rightarrow\int_a^b S(x)dx=\int_a^b\left(\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)\right)dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b f_n(x)dx.$$

Теорема 4. Если: 1) ряд (12.1) сходится в некотором промежутке X к $S(x)$; 2) $(\forall n)$ $f_n'(x)$ – функции непрерывные в X; 3) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n'(x)$ сходится равномерно в X, то ряд (12.1) можно почленно дифференцировать в каждой точке промежутка X, т.е.

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \Rightarrow S'(x)=\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right)'=\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x).$$

Пример. Исходя из соотношения $\int\limits_2^{\infty}\frac{dx}{x^{n+1}}=\frac{1}{n\cdot 2^n}$, найти сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 2^n}$.

∇ Так как члены ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x^{n+1}}$ непрерывны в $[2,\ +\infty)$ и ряд сходится равномерно в этом промежутке по признаку Вейерштрасса (теорема 1): $\left|\frac{1}{x^{n+1}}\right|\le\frac{1}{2^{n+1}}$, т.е. ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x^{n+1}}$ мажорируем сходящимся рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n+1}}$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x^{n+1}}$ можно почленно интегрировать на $[2,+\infty)$, т.е. менять местами символы $\sum$ и $\int$.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 2^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\int\limits_2^{\infty}\frac{dx}{x^{n+1}}=\int\limits_2^{\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x^{n+1}}\right)dx=\int\limits_2^{\infty}\frac{1/x^2}{1-\frac{1}{x}}dx=\ln\left|1-\frac{1}{x}\right|\Bigg|_2^{\infty}=$$

$$=0-\ln\left(1-\frac{1}{2}\right)=-\ln\frac{1}{2}=\ln 2.\#$$

12.4. СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ. СВОЙСТВА СТЕПЕННЫХ РЯДОВ

Степенным рядом называется ряд вида

$$c_0+c_1x+c_2x^2+\ldots+c_nx^n+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n\ , \qquad (12.3)$$

т.е. ряд, членами которого являются степенные функции. Всякий степенной ряд (12.3) сходится в интервале $(-R,R)$. R называется *радиусом сходимости* ряда (12.3). Если R = 0, то ряд (12.3) сходится только в точке x = 0. Если $R=\infty$, то ряд (12.3) сходится на всей числовой оси. Если $0<R<\infty$, то *интервалом сходимости* является конечный интервал с центром в точке $x=0$.

Более общий вид степенного ряда:

$$c_0+c_1(x-x_0)+c_2(x-x_0)^2+\ldots+c_n(x-x_0)^n+\ldots\ . \qquad (12.4)$$

Интервал сходимости этого ряда симметричен относительно точки $x=x_0$: (x_0-R,x_0+R).

Теорема 5. На всяком отрезке $[-\rho,\rho]\subset(-R,R)$ ряд (12.3) сходится равномерно.

Теорема 6. Степенной ряд (12.3) можно почленно интегрировать на любом отрезке $[a,\ b]\subset(-R,\ R)$.

Таким образом, если $S(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_nx^n$, то $\int\limits_a^b S(x)dx=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\int\limits_a^b c_nx^ndx=$
$=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{c_n(b^{n+1}-a^{n+1})}{n+1}$.

Теорема 7. Ряд (12.3) можно почленно дифференцировать в каждой точке x его интервала сходимости сколько угодно раз, при этом радиус сходимости ряда не меняется.

$$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n \Rightarrow S'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(c_nx^n)'=\sum_{n=0}^{\infty}nc_nx^{n-1}\ .$$

Пример. Найти сумму ряда $x+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}+\ldots+\dfrac{x^n}{n}+\ldots$.

∇ Обозначим сумму этого ряда через $S(x)$:

$$S(x)=x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\ldots+\frac{x^n}{n}+\ldots\ .$$

Интервал сходимости этого ряда (–1; 1). На основании теоремы 7 его можно почленно дифференцировать в каждой точке интервала (–1; 1):

$$S'(x)=1+x+x^2+\ldots+x^{n-1}+\ldots\ .$$

Справа в этом равенстве – сумма геометрической прогрессии. Если $|q|=|x|<1$, то $S'(x)=\dfrac{1}{1-x}$, откуда $S(x)=\int\dfrac{dx}{1-x}=-\ln(1-x)+c$. Зная, что $S(0)=0$, получим $0=-\ln(1-0)+c\Rightarrow c=0\Rightarrow S(x)=-\ln(1-x)$.#

Пример. Найти сумму ряда $1-3x^2+5x^4-\ldots+(-1)^{n-1}(2n-1)x^{2n-2}+\ldots$.

∇ Обозначим сумму ряда через $S(x)$:

$$S(x)=1-3x^2+5x^4-\ldots+(-1)^{n-1}(2n-1)x^{2n-2}+\ldots\ .$$

Этот ряд сходится в интервале (–1; 1). На основании теоремы 6 его можно почленно интегрировать на любом отрезке $[0;\ x]\subset(-1;\ 1)$.

$$\int_0^x S(u)du=\int_0^x\left(\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}(2n-1)u^{2n-2}\right)du=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}(2n-1)\int_0^x u^{2n-2}du=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2n-1}{2n-1}u^{2n-1}\Big|_0^x=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{2n-1}=\frac{x}{1+x^2}\,.$$

Сумма последнего ряда – сумма геометрической прогрессии, для которой $a_1 = x;\ q = -x^2$. Таким образом, $\int\limits_0^x S(u)du = \dfrac{x}{1+x^2}$. Продифференцируем обе части этого равенства: $\left(\int\limits_0^x S(u)du\right)'_x = S(x)$ (производная интеграла с переменным верхним пределом интегрирования по этому пределу). $\left(\dfrac{x}{1+x^2}\right)' = \dfrac{1+x^2-x\cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \dfrac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$.

Итак, $1-3x^2+5x^4-...+(-1)^{n-1}(2n-1)x^{2n-2}+... = \dfrac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$. #

Задачи для самостоятельного решения

Найти сумму ряда в № 25 – 31.

25. $x+\dfrac{x5}{5}+...+\dfrac{x^{4n-3}}{4n-3}+...$. **26**. $\dfrac{x^2}{1\cdot 2}-\dfrac{x^3}{2\cdot 3}+...+(-1)^{n+1}\dfrac{x^{n+1}}{n(n+1)}+...$.

27. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n(n+1)x^n}{3^n}$. **28**. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(n^2+n)x^{n-1}}{2^{n-1}}$.

29. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{4n+3}}{(4n-1)(4n+3)}$. **30**. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(2n^2-2n+1)x^n$.

31. Исходя из соотношения $\int\limits_0^1 x^n dx = \dfrac{1}{n+1}$, найти сумму ряда:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{3n-2}$, б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{4n-3}$.

32. Доказать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin n^2 x}{n^2}$ сходится равномерно на $(-\infty;\ +\infty)$, но что его нельзя дифференцировать ни в какой точке этого интервала.

12.5. РЯДЫ ТЕЙЛОРА И МАКЛОРЕНА. РАЗЛОЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ В РЯД ТЕЙЛОРА И МАКЛОРЕНА

Пусть функция $y = f(x)$ имеет в т. x_0 и некоторой ее окрестности производные любого порядка. Ряд

$$f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+...+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+... =$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \qquad (12.5)$$

называется *рядом Тейлора* для функции $f(x)$. Если же для всех значений x из некоторой окрестности точки x_0 ряд сходится и имеет в качестве суммы функцию $f(x)$, т.е.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n = f(x),$$

то $f(x)$ называется *разложимой в ряд Тейлора* в окрестности точки x_0 (или по степеням $x-x_0$). Если $x_0 = 0$, то ряд Тейлора имеет вид

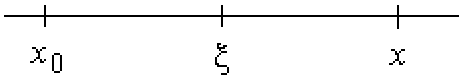
$$f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

и называется *рядом Маклорена*.

Теорема 8. Для того чтобы функция $y = f(x)$ была разложима в ряд Тейлора в окрестности точки x_0, необходимо и достаточно, чтобы $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$.

$R_n(x)$ – остаточный член формулы Тейлора. Записанный в форме Лагранжа, он имеет вид

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}, \quad \xi = x_0+\theta\cdot(x-x_0),\ 0<\theta<1$$



Теорема 9. Если $f(x)$ имеет в некотором промежутке, содержащем точку x_0, производные всех порядков, для которых $\left|f^{(n)}(x)\right| \le M$, то $R_n(x)\to 0$ при $n\to\infty$ и, значит, $f(x)$ разложима в этом промежутке в ряд Тейлора.

То же самое в символической записи:

$$\left(\forall x\in O(x_0,\varepsilon)\right)\ (\forall n)\ \left(\left|f^{(n)}(x)\right|\le M\right)\Rightarrow \lim_{n\to\infty} R_n(x)=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

При разложении $f(x)$ в ряд Тейлора применяют следующие приемы.

1. Непосредственное разложение $f(x)$ в ряд Тэйлора, которое состоит из трех этапов: а) формально составляют ряд Тэйлора, для чего находят $f^{(n)}(x)$ для любых n, вычисляют $f^{(n)}(x_0)$ и подставляют найденные значения в (12.5); б) находят область сходимости ряда (12.5); в) выясняют, для каких значений x из области сходимости ряда $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x)=0$, т.е. для каких x имеет место равенство:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

2. Использование готовых разложений:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots, \quad |x| < \infty;$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots, \quad |x| < \infty;$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots, \quad |x| < \infty;$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots, \quad -1 < x \le 1;$$

$$(1+x)^m = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{n!} x^n =$$

$$= 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!} x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!} x^3 + \ldots, \quad |x| < 1;$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots, \quad |x| < 1.$$

Пример. Разложить $y = \sin\frac{\pi x}{4}$ в ряд Тейлора в окрестности точки $x = 2$.

∇ Решим эту задачу двумя способами.

I способ. Используем непосредственное разложение функции в ряд Тейлора: а) $f(x) = \sin\frac{\pi x}{4}$;

$$f'(x) = \cos\frac{\pi x}{4} \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi x}{4}\right);$$

$$f''(x) = \frac{\pi}{4} \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi x}{4}\right) \cdot \frac{\pi}{4} = \left(\frac{\pi}{4}\right)^2 \sin\left(2 \cdot \frac{\pi}{2} + \frac{\pi x}{4}\right)$$

....

$$f^{(n)}(x) = \left(\frac{\pi}{4}\right)^n \sin\left(n\frac{\pi}{2} + \frac{\pi x}{4}\right)$$

....

Вычислим найденные производные в точке $x = 2$:

$$f(2) = 1; \quad f'(2) = 0 \quad f''(2) = -\left(\frac{\pi}{4}\right)^2; \quad f'''(2) = 0; \quad f^{\mathrm{IV}}(2) = \left(\frac{\pi}{4}\right)^4, \ldots,$$

$$f^{(n)}(2) = \left(\frac{\pi}{4}\right)^n \sin\left(\frac{\pi}{2}(n+1)\right), \ldots .$$

Составим формально ряд Тейлора:

$$1-\left(\frac{\pi}{4}\right)^2\frac{(x-2)^2}{2!}+\left(\frac{\pi}{4}\right)^4\frac{(x-2)^4}{4!}-...+\left(\frac{\pi}{4}\right)^n\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}(n+1)\right)}{n!}(x-2)^n+...=$$

$$=1-\left(\frac{\pi}{4}\right)^2\frac{(x-2)^2}{2!}+\left(\frac{\pi}{4}\right)^4\frac{(x-2)^4}{4!}-...+(-1)^n\left(\frac{\pi}{4}\right)^{2n}\frac{(x-2)^{2n}}{(2n)!}+... \, . \quad (12.6)$$

б) Найдем область сходимости ряда (12.6), используя признак Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{\pi}{4}\right)^{2n+2}(x-2)^{2n+2}(2n)!}{(2n+2)!\left(\frac{\pi}{4}\right)^{2n}(x-2)^{2n}}=\left(\frac{\pi}{4}\right)^2(x-2)^2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(2n+1)(2n+2)}=0<1.$$

Этот результат будет справедлив при любых x, следовательно, ряд (12.6) сходится на всей числовой оси: $|x|<\infty$.

в) Докажем, что при всех x ряд (12.6) сходится к $\sin\frac{\pi x}{4}$, для чего достаточно показать, что $R_n(x)\to 0$ при $n\to\infty$:

$$|R_n(x)|=\left|\left(\frac{\pi}{4}\right)^{n+1}\sin\left((n+1)\frac{\pi}{2}+\frac{\pi\xi}{4}\right)\frac{(x-2)^{n+1}}{(n+1)!}\right|\le\frac{\left(\frac{\pi}{4}|x-2|\right)^{n+1}}{(n+1)!}\to 0 \text{ при } n\to\infty$$

$\left((\forall\rho)\ \lim\limits_{n\to\infty}\frac{\rho^n}{n!}\right)$. Как результат решения задачи можем записать:

$$\sin\frac{\pi x}{4}=1-\left(\frac{\pi}{4}\right)^2\frac{(x-2)^2}{2!}+\left(\frac{\pi}{4}\right)^4\frac{(x-2)^4}{4!}-...+(-1)^n\left(\frac{\pi}{4}\right)^{2n}\frac{(x-2)^{2n}}{(2n)!}+...,\ |x|<\infty.$$

II способ. Разложим $f(x)=\sin\frac{\pi x}{4}$ в ряд Тейлора в окрестности точки $x = 2$, используя готовое разложение. Преобразуем $\sin\frac{\pi x}{4}$ следующим образом:

$$\sin\frac{\pi x}{4}=\sin\frac{\pi((x-2)+2)}{4}=\sin\left(\frac{\pi(x-2)}{4}+\frac{\pi}{2}\right)=\cos\frac{\pi(x-2)}{4}.$$

В ряд Маклорена для $\cos x$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-...+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+...,\ |x|<\infty \quad (12.7)$$

справа и слева вместо x подставим $\frac{\pi(x-2)}{4}$, получим:

$$\sin\frac{\pi x}{4}=\cos\frac{\pi(x-2)}{4}=1-\left(\frac{\pi}{4}\right)^2\frac{(x-2)^2}{2!}+\left(\frac{\pi}{4}\right)^4\frac{(x-2)^4}{4!}-...+$$

$$+(-1)^n\left(\frac{\pi}{4}\right)^{2n}\frac{(x-2)^{2n}}{(2n)!}+...,\ |x|<\infty; \qquad (12.8)$$

(так как в (12.7) $-\infty<x<\infty\Rightarrow\left|\dfrac{\pi(x-2)}{4}\right|<\infty\Rightarrow|x|<\infty$). #

При разложении функции в ряд часто используют почленное дифференцирование и интегрирование рядов.

Пример. Разложить в ряд Маклорена $y=\mathrm{arctg}x$.

∇ Предварительно разложим в ряд Маклорена функцию $y=\dfrac{1}{1+x^2}$, для чего в разложении $\dfrac{1}{1-x}=1+x+x^2+...+x^n+...,\ |x|<1$ заменим x на $-x^2$.

$$\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-...+(-1)^n x^{2n}+...,\ |x|<1.$$

Поэтому $\mathrm{arctg}\,x=\displaystyle\int_0^x\frac{1}{1+x^2}dx=\int_0^x(1-x^2+x^4-...+(-1)^n x^{2n}+...)dx=$

$$=\int_0^x dx-\int_0^x x^2dx+\int_0^x x^4dx-...+\int_0^x(-1)^n x^{2n}dx+...=$$

$$=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-...+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+...,\ |x|\le 1$$

(получившийся ряд сходится и в граничных точках). #

Задачи для самостоятельного решения

Следующие функции разложить в ряд Маклорена.

33. $\dfrac{1}{2+x}$. **34**. $\ln(1-x)$. **35**. $\dfrac{1}{\sqrt{e^x}}$. **36**. $\mathrm{sh}\,x$. **37**. $\cos 5x$.

38. $\arcsin x$. **39**. $(x^3+2\mathrm{ctg}\,x)\sin x$. **40**. $\sin^2 2x$. **41**. 2^{-x^2}.

42. $\dfrac{3^{x^2}-1}{x^2}$. **43**. $\dfrac{2}{1-3x^2}$. **44**. $\dfrac{1}{\sqrt[5]{1+x}}$. **45**. $\ln(1-x+x^2)$.

46. $\dfrac{x^2}{\sqrt[3]{1+3x^2}}$. **47**. $\dfrac{4x+3}{x^2-3x+2}$.

Следующие функции разложить в ряд Тейлора в окрестности точки x_0.

Указать область сходимости найденного ряда к своей сумме.

48. $\ln x;\ x_0=1$. **49**. $\sqrt{x};\ x_0=2$. **50**. $\dfrac{1}{3+x};\ x_0=-2$.

51. $\dfrac{1}{\sqrt{4+x}};\ x_0=-3$. **52**. $\cos^2 x;\ x_0=\dfrac{\pi}{3}$. **53**. $\dfrac{1}{(3-x)^2};\ x_0=1$.

54. $\dfrac{1}{x^2-4x+3};\ x_0=-2$. **55**. $\ln\dfrac{1}{x^2-2x+2};\ x_0=1$.

56. $3^x;\ x_0=-1$.

12.6. ПРИЛОЖЕНИЯ СТЕПЕННЫХ РЯДОВ

Если некоторое число S разложено в ряд

$$S=u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots \qquad (12.9)$$

и

$$S\approx u_1+u_2+\ldots+u_n,$$

то поправка на отбрасывание всех остальных членов выразится остатком

$$\Delta=u_{n+1}+u_{n+2}+\ldots\ .$$

Как произвести *оценку погрешности*?

1. Если ряд (12.9) – знакочередующийся, то остаток Δ имеет знак своего первого члена u_{n+1} и $|\Delta|<|u_{n+1}|$.

2. Если ряд (12.9) – знакоположительный, то остаток Δ либо оценивают с помощью остаточного члена формулы Тейлора, либо пытаются найти легко суммируемый тоже знакоположительный ряд, члены которого были бы больше членов интересующего нас остатка, и оценивают остаток ряда (12.9) суммой найденного ряда.

Обычно ищут десятичное приближение числа S, в то время как члены ряда могут и не быть десятичными дробями. При обращении их в десятичную дробь возникает новая погрешность, которую тоже нужно учесть.

Пример. Какова величина допущенной ошибки, если приближенно положить $e\approx 2+\dfrac{1}{2!}+\dfrac{1}{3!}+\dfrac{1}{4!}$?

∇ Ошибка будет суммой знакоположительного ряда

$$\Delta=\frac{1}{5!}+\frac{1}{6!}+\ldots+\frac{1}{n!}+\ldots\ . \qquad (12.10)$$

а) Оценим эту ошибку, заменив члены ряда (12.10) членами геометрической прогрессии, которые будут больше членов ряда (12.10):

$$\Delta=\sum_{n=5}^{\infty}\frac{1}{n!}=\frac{1}{4!}\sum_{n=5}^{\infty}\frac{4!}{n!}=\frac{1}{4!}\sum_{n=5}^{\infty}\frac{1}{n(n-1)\ldots5}<\frac{1}{4!}\sum_{n=5}^{\infty}\frac{1}{5^{n-4}}=\frac{1}{4!}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{5^{n+1}}=$$

$$=\frac{1}{1\cdot2\cdot3\cdot4}\cdot\frac{1/5}{1-1/5}=\frac{1}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot4}=\frac{1}{96}<0{,}011.$$

б) Оценим эту же ошибку с помощью остаточного члена формулы Маклорена

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}.$$ В нашем случае $f(x)=e^x;\ x=1;\ n=4.$

$$\Delta=R_5(x)=\left.\frac{e^{\theta x}}{5!}\cdot x^5\right|_{x=1}<\frac{e^{\theta}}{5!}<\frac{e}{5!}<\frac{3}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}=0{,}025.\ \#$$

Пример. Вычислить $\int\limits_0^2\frac{\sin x}{x}dx$ с точностью до 0,001 (предполагаем, что $\left.\frac{\sin x}{x}\right|_{x=0}=1$).

$$\nabla\ \frac{\sin x}{x}=\frac{1}{x}\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots\right)=1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}+\ldots,\ x\neq0.$$

Проинтегрируем полученное разложение на [0, 2]:

$$\int\limits_0^2\frac{\sin x}{x}dx=\int\limits_0^2\left(1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}+\ldots\right)dx=\int\limits_0^2dx-\int\limits_0^2\frac{x^2}{3!}dx+$$

$$+\int\limits_0^2\frac{x^4}{5!}dx-\int\limits_0^2\frac{x^6}{7!}dx+\ldots=2-\frac{2^3}{3\cdot3!}+\frac{2^5}{5\cdot5!}-\frac{2^7}{7\cdot7!}+\frac{2^9}{9\cdot9!}-\ldots.\qquad(12.11)$$

Получили знакочередующийся ряд. Если для вычисления интеграла $\int\limits_0^2\frac{\sin x}{x}dx$ взять 4 члена ряда (12.11), то ошибка Δ_1, которая получается за счет отбрасывания членов ряда, начиная с пятого, не будет превосходить первого из отброшенных членов, т.е. $\Delta_1<\frac{2^9}{9\cdot9!}<\frac{1}{6000}$. Вычисления нужно вести с 4 знаками после запятой, тогда ошибка Δ_2, которая получается при обращении II, III и IV членов ряда (12.11) в десятичные дроби, будет меньше $\frac{3}{10000}$: $\Delta_2<\frac{3}{10000}$. Общая ошибка $\Delta=\Delta_1+\Delta_2<0{,}001$. $\int\limits_0^2\frac{\sin x}{x}dx\approx1{,}605$.

Результат округлен до III знака после запятой. #

Пример. Найти общее решение дифференциального уравнения $y''-xy=0$ в виде степенного ряда.

∇ Так как $x = 0$ не является особой точкой для данного дифференциального уравнения, то решение его можно искать в виде ряда

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}C_nx^n=C_0+C_1x+C_2x^2+\ldots+C_nx^n+\ldots\ .\qquad(12.12)$$

Продифференцируем ряд (12.12) дважды:

$$y' = C_1 + 2C_2x + 3C_3x^2 + \ldots + nC_nx^{n-1} + (n+1)C_{n+1}x^n + (n+2)C_{n+2}x^{n+1} + \ldots$$

$$y'' = 2C_2 + 2\cdot 3C_3x + \ldots + n(n-1)C_nx^{n-2} + (n+1)nC_{n+1}x^{n-1} +$$
$$+(n+2)(n+1)C_{n+2}x^n + \ldots \,. \qquad (12.13)$$

Подставим в уравнение вместо y и y'' соответственно ряды (12.12) и (12.13):

$$2C_2 + 2\cdot 3C_3x + \ldots + (n-1)nC_nx^{n-2} + n(n+1)C_{n+1}x^{n-1} + (n+1)(n+2)C_{n+2}x^n + \ldots -$$
$$-xC_0 - x^2C_1 - x^3C_2 - \ldots - C_{n-2}x^{n-1} - C_{n-1}x^n - C_nx^{n+1} - \ldots = 0$$

или

$$2C_2 + x(2\cdot 3C_3 - C_0) + x^2(3\cdot 4C_4 - C_1) + \ldots + x^{n-1}(n(n+1)C_{n+1} - C_{n-2}) +$$
$$+x^n((n+1)(n+2)C_{n+2} - C_{n-1}) + \ldots = 0\,.$$

Приравнивая коэффициенты при всех степенях x к нулю, получаем: $C_2 = 0;\ C_3 = \dfrac{C_0}{2\cdot 3};\ C_4 = \dfrac{C_1}{3\cdot 4};\ C_5 = \dfrac{C_2}{4\cdot 5} = 0$.

$$5\cdot 6C_6 - C_3 = 0 \Rightarrow C_6 = \frac{C_3}{5\cdot 6} = \frac{C_0}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6},$$

$$6\cdot 7C_7 - C_4 = 0 \Rightarrow C_7 = \frac{C_4}{6\cdot 7} = \frac{C_1}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7} \text{ и т.д.}$$

$$y = C_0 + C_1x + \frac{C_0}{2\cdot 3}x^3 + \frac{C_1}{3\cdot 4}x^4 + \frac{C_0}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6}x^6 + \frac{C_1}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7}x^7 + \ldots$$

$$y = C_0\left(1 + \frac{x^3}{2\cdot 3} + \frac{x^6}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6} + \ldots\right) + C_1\left(x + \frac{x^4}{3\cdot 4} + \frac{x^7}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7} + \ldots\right).\ \#$$

Пример. Применяя метод последовательных дифференцирований, найти 5 членов разложения в ряд решения дифференциального уравнения

$y'' = (y')^2 + xy$ при начальных условиях $y(0) = 4;\ y'(0) = -2$.

∇ Точка $x = 0$ не является особой точкой данного дифференциального уравнения, поэтому решение можно искать в виде

$$y = y(0) + y'(0)x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \frac{y'''(0)}{3!}x^3 + \frac{y^{\mathrm{IV}}}{4!}x^4 + \ldots \qquad (12.14)$$

(разложение в окрестности $x = 0$!). Здесь $y(0) = 4;\ y'(0) = -2$.

Из уравнения $y''(0) = (y'(0))^2 + 0\cdot y(0) = (-2)^2 = 4$.

Из уравнения $y''' = 2y'y'' + y + xy'$

$$y'''(0) = 2(-2)\,4 + 4 + 0\,(-2) = -12,$$

$$y^{\mathrm{IV}}=2(y'')^2+2y'y'''+2y'+xy'',$$
$$y^{\mathrm{IV}}=2\cdot 4^2+2(-2)(-12)+2(-2)+0\cdot 4=76.$$

Подставим в (12.14) $y(0)$, $y'(0)$, $y''(0)$, $y'''(0)$, $y^{\mathrm{IV}}(0)$:

$$y=4-2x+\frac{4}{2!}x^2-\frac{12}{3!}x^3+\frac{76}{4!}x^4+\ldots$$

или

$$y=4-2x+2x^2-2x^3+\frac{19}{6}x^4+\ldots\ .\ \#$$

Задачи для самостоятельного решения

57. Вычислить приближенное значение $\sqrt[3]{e}$, взяв 3 члена разложения в ряд Маклорена функции $f(x)=e^x$, оценить погрешность.

58. Вычислить приближенное значение $\sin 18^\circ$, взяв 3 члена разложения в ряд Маклорена функции $f(x)=\sin x$, оценить погрешность.

Вычислить приближенно с указанной степенью точности Δ.

59. $\frac{1}{e}$; $\Delta=0{,}0001$. **60**. $\cos 10^\circ$; $\Delta=0{,}0001$. **61**. $\sqrt[3]{80}$; $\Delta=0{,}001$.

62. $\sqrt[4]{90}$; $\Delta=0{,}001$. **63**. $\ln 5$; $\Delta=0{,}001$. **64**. π; $\Delta=0{,}00001$.

Следующие интегралы вычислить с точностью до 0,001.

65. $\int\limits_0^{1/4} e^{-x^2}dx.$ **66**. $\int\limits_0^{1/2}\sqrt{1+x^3}\,dx.$

67. $\int\limits_0^{1/2}\frac{\ln(1+x^2)}{x^2}dx.$ **68**. $\int\limits_2^{4} e^{1/x}dx.$

69. Вычислить приближенно $\int\limits_{\pi/6}^{\pi/4}\frac{\cos x}{x}dx$, взяв 3 первых члена разложения подынтегральной функции в ряд. Оценить погрешность.

70. Найти 6 первых членов разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения $y''-(1+x^2)y=0$, удовлетворяющего начальным условиям: $y(0)=-2;\ y'(0)=2$.

71. Записать в виде степенного ряда частное решение дифференциального уравнения $y''-xy'+y-1=0;\ y(0)=0;\ \ y'(0)=0$.

Записать в виде степенного ряда общее решение дифференциального уравнения.

72. $y''+xy'-x^2y=0$ (шесть первых членов)

73. $y''-x^2y=0$. **74**. $(1+x^2)y''+y=0$.

75. Найти 3 члена разложения в ряд частного решения уравнения $y'=xy+\ln(y+x);\ y(1)=0.$

ОТВЕТЫ К ЗАДАЧАМ ГЛАВЫ 12

1. $[-1;\ 1]$. **2.** $(-1;\ 1)$. **3.** $(-\infty;\ +\infty)$. **4.** $(-2;\ 2)$. **5.** $(0;\ +\infty)$.

6. $x \neq \pm 1$. **7.** $\left(-\frac{1}{10};\ \frac{1}{10}\right)$. **8.** $\{0\}$. **9.** $\left(-\frac{1}{3};\ \frac{1}{3}\right)$. **10.** $[-1;\ 1)$.

11. $\left(-\frac{1}{e};\ \frac{1}{e}\right)$. **12.** $(0;\ +\infty)$. **13.** $[-6;\ -4]$. **14.** $(-\infty;-1)\cup\left(-\frac{1}{3};+\infty\right)$.

15. $\left(-\frac{5}{2};-\frac{3}{2}\right)$. **16.** $(-\infty;\ +\infty)$. **17.** $(-\infty;-2)\cup\left(-\frac{8}{5};\ +\infty\right)$.

18. $\left(\frac{\pi}{3}+\pi k;\ \frac{2\pi}{3}+\pi k\right),\ k\in Z$. **19.** $|x-k\pi|<\frac{\pi}{4},\ k\in Z.$

25. $\frac{1}{2}\operatorname{arctg} x+\frac{1}{4}\ln\frac{1+x}{1-x}.$ **26.** $(x+1)\ln(x+1)-x$.

27. $\frac{9}{(x+3)^2},\ |x|<3.$ **28.** $\frac{16}{(2-x)^3},\ |x|<2.$

29. $-\frac{x^3}{4}+\frac{x^4-1}{16}\left(\ln\frac{1+x}{1-x}-2\operatorname{arctg} x\right).$ **30.** $\frac{5x^2-2x+1}{(1-x)^3},\ |x|<1.$

31. а) $\frac{1}{3}\left(\ln 2+\frac{\pi}{\sqrt{3}}\right).$ б) $\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\ln\left(1+\sqrt{2}\right)+\frac{\pi}{2}\right).$

33. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{2^{n+1}},\ |x|<2.$ **34.** $-\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n},\ -1\le x<1.$

35. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{2^n n!},\ |x|<\infty.$ **36.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},\ |x|<\infty.$

37. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 5^{2n} x^{2n}}{(2n)!},\ |x|<\infty.$ **38.** $x+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)},\ |x|\le 1.$

39. $2-x^2+\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-2)(2n-1)2n+2}{(2n)!}x^{2n},\ x\neq k\pi.$

40. $\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(4x)^{2n}}{(2n)!}(-1)^{n-1},\ |x|<\infty$. **41**. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\ln^n 2}{n!}x^{2n},\ |x|<\infty$.

42. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}\ln^{n+1}3}{(n+1)!},\ |x|<\infty$. **43**. $2\sum_{n=0}^{\infty}3^n x^{2n},\ |x|<\frac{1}{\sqrt{3}}$.

44. $1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 1\cdot 6\cdot 11...(5n-4)}{5^n\cdot n!}x^n$.

45. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{3n}}{n}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n},\ -1<x\le 1$.

46. $x^2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 1\cdot 4\cdot 7...(3n-2)}{n!}x^{2n+2},\ |x|\le\frac{1}{\sqrt{3}}$.

47. $\sum_{n=0}^{\infty}\left(7-\frac{11}{2^{n+1}}\right)x^n,\ |x|<1$. **48**. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(x-1)^n}{n},\ 0<x\le 2$.

49. $\sqrt{2}\left(1+\frac{x-2}{4}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(2n-3)!!}{4^n n!}(x-2)^n\right),\ 0\le x\le 4$.

50. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(x+2)^n,\ -3<x<-1$.

51. $1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n-1)!!}{2^n\cdot n!}(x+3)^n,\ -4<x\le 2$.

52. $\frac{1}{4}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}}{n!}\sin\left(\frac{2}{3}\pi+(n-1)\frac{\pi}{2}\right)\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^n,\ |x|<\infty$.

53. $\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{2^n}(x-1)^n,\ -1<x<3$.

54. $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{6\cdot 3^n}-\frac{1}{10\cdot 5^n}\right)(x+2)^n,\ -5<x<1$.

55. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}(x-1)^{2n},\ 0\le x\le 2$.

56. $\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\ln^n 3\,(x+1)^n}{n!},\ |x|<\infty$. **57**. 1,39, Δ = 0,01.

58. 0,3090, Δ = 0,0001. **59**. 0,3679. **60**. 0,9848. **61**. 4,309.

62. 3,079. **63**. 1,609. **64**. 3,14159. **65**. 0,245. **66**. 0,508.

67. 0,481. **68**. 2,835. **69**. 0,3230, $\Delta = 0{,}0001$.

70. $-2+2x-x^2+\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^4}{4}+\dfrac{7}{60}x^5+\ldots$.

71. $\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^4}{4!}+\dfrac{3x^6}{6!}+\dfrac{5x^8}{8!}+\ldots+\dfrac{(2n-1)x^{2n+2}}{(2n+2)!}+\ldots$.

72. $C_1\left(1+\dfrac{x^4}{12}+\ldots\right)+C_2\left(x-\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{3x^5}{40}+\ldots\right)$.

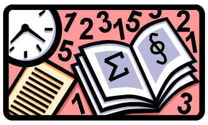
73. $C_0\left(1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{4n}}{(3\cdot4)(7\cdot8)\ldots(4n-1)4n}\right)+$

$+C_1\left(x+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{4n+1}}{(4\cdot5)(8\cdot9)\ldots(4n)(4n+1)}\right)$.

74. $C_0\left(1-\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{1+1\cdot2}{4!}x^4-\dfrac{(1+1\cdot2)(1+3\cdot4)}{6!}x^6+\ldots\right)+$

$+\ C_1\left(x-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{1+2\cdot3}{5!}x^5-\dfrac{(1+2\cdot3)(1+4\cdot5)}{7!}x^7+\ldots\right)$.

75. $\dfrac{(x-1)^2}{2}+\dfrac{(x-1)^3}{6}+\dfrac{(x-1)^4}{6}+\ldots$.



ГЛАВА 13

РЯДЫ ФУРЬЕ. ИНТЕГРАЛ ФУРЬЕ

13.1. ОРТОГОНАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ ФУНКЦИЙ. ОСНОВНАЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКАЯ СИСТЕМА ФУНКЦИЙ (ОТС)

Пусть на $[a;\ b]$ заданы функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ такие, что $f(x)\varphi(x)$ – интегрируемая на $[a;\ b]$ функция. *Функции* $f(x)$ и $\varphi(x)$ называются *ортогональными* на $[a;\ b]$, если $\int\limits_a^b f(x)\varphi(x)dx = 0$.

Бесконечная *система* функций

$$\varphi_1(x),\ \varphi_2(x),...,\ \varphi_n(x),... \tag{13.1}$$

называется *ортогональной* на $[a,\ b]$, если $(\forall m,\ n)(m \neq n)$ $\int\limits_a^b \varphi_m(x)\varphi_n(x)dx = 0$ и $\int\limits_a^b \varphi_m^2(x)dx > 0$. Эти функции попарно ортогональны на $[a;\ b]$.

Примеры ортогональных систем:

а) основная тригонометрическая система (ОТС):

$$1,\ \cos x,\ \sin x,\ \cos 2x,\ \sin 2x, \ldots,\ \cos nx,\ \sin nx, \ldots \tag{13.2}$$

ортогональна на $[-\pi;\ \pi]$;

б) система функций:

$$\sin x,\ \sin 2x, \ldots,\ \sin nx, \ldots \tag{13.3}$$

ортогональна на $[0;\ \pi]$;

в) тригонометрическая система (ТС):

$$1, \cos\frac{\pi x}{l},\ \sin\frac{\pi x}{l},\ \cos\frac{2\pi x}{l},\ \sin\frac{2\pi x}{l},...,\ \cos\frac{n\pi x}{l},\ \sin\frac{n\pi x}{l},... \tag{13.4}$$

ортогональна на $[-l;\ l]$.

13.2. РЯД ФУРЬЕ ПО ОРТОГОНАЛЬНОЙ СИСТЕМЕ ФУНКЦИЙ

Пусть задана произвольная, ортогональная на $[a; b]$ система функций (13.1).

Ряд

$$C_1\varphi_1(x)+C_2\varphi_2(x)+\ldots+C_n\varphi_n(x)+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}C_n\varphi_n(x) \qquad (13.5)$$

называется *рядом Фурье* для функции $f(x)$ по системе (13.1), если

$$C_m=\frac{\int_a^b f(x)\varphi_m(x)dx}{\int_a^b \varphi_m^2(x)dx}, \qquad (13.6)$$

C_m, вычисленные по формуле (13.6), называются *коэффициентами Фурье*.

13.3. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ РЯДЫ ФУРЬЕ

а) Ряд Фурье по ТС (13.4)

Теорема 1 (Дирихле). Если $f(x)$ – периодическая функция с $T = 2l$, кусочно-гладкая на $(-l;\ l)$ (на этом интервале $f(x)$ и $f'(x)$ имеют не более конечного числа точек разрыва, притом лишь первого рода), то *тригонометрический ряд Фурье* по ТС (13.4) для $f(x)$

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}, \qquad (13.7)$$

где $$a_0=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)dx;\quad a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx;$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx;\ \ n=1,2,3 \qquad (13.8)$$

сходится к $f(x)$, если x – точка непрерывности $f(x)$ и к $\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$, если x – точка разрыва $f(x)$, где $f(x-0)$ и $f(x+0)$ – соответственно левый и правый пределы $f(x)$ в точке x:

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}=$$

$$=\begin{cases} f(x), \text{ если } x - \text{точка непрерывности } f(x), \\ \dfrac{f(x-0)+f(x+0)}{2}, \text{ если } x - \text{точка разрыва } f(x), \end{cases}$$

$a_0,\ a_n,\ b_n$ – называются *коэффициентами Фурье*.

Функция $F(x)$, совпадающая с $f(x)$ в $(-l;\ l)$ и удовлетворяющая условию $(\forall x)\ F(x+2l)=F(x)$, называется *периодическим продолжением* $f(x)$ на всю ось Ox.

В ряд Фурье можно разложить и непериодическую кусочно-гладкую функцию, заданную лишь в интервале $(-l;\ l)$, вычисляя коэффициенты $a_0,\ a_n,\ b_n$ по формулам (13.8). Полученный ряд будет сходиться на всей числовой оси, а его суммой будет $F(x)$ – периодическое продолжение $f(x)$ на ось Ox.

При вычислении коэффициентов Фурье в формулах (13.8) интервал интегрирования $(-l;\ l)$ можно заменить любым интервалом $(a;\ a+2l)$ длины $2l$.

б) Неполные ряды Фурье

Если $f(x)$ – четная функция, то

$$a_0=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)dx;\ a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx;\ b_n=0. \qquad (13.9)$$

Ряд Фурье примет вид: $\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\cos\dfrac{n\pi x}{l}$.

Если $f(x)$ – нечетная функция, то

$$a_0=a_n=0;\ b_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{\pi n x}{l}dx, \qquad (13.10)$$

и ряд Фурье принимает вид $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n\sin\dfrac{n\pi x}{l}$.

в) Функцию $f(x)$, кусочно-гладкую в интервале $(0;\ l)$, можно разложить в ряд Фурье только по косинусам или по синусам. Для этого достаточно продолжить $f(x)$ четным или соответственно нечетным образом на интервал $(-l;\ 0)$ и для полученной на $(-l;\ l)$ функции составить ряд Фурье. Коэффициенты Фурье будут при этом вычисляться по формулам соответственно (13.9) или (13.10).

г) Комплексная форма тригонометрического ряда Фурье для $f(x)$, периодической с $T = 2l$, а также для $f(x)$, заданной на $(-l;\ l)$, имеет вид

$$\frac{1}{2}\sum_{-\infty}^{\infty}c_n e^{i\frac{n\pi x}{l}}, \qquad c_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)e^{-i\frac{n\pi x}{l}}dx.$$

Связь между $a_0,\ a_n,\ b_n$ и c_n следующая:

$$c_0=a_0;\ c_n=a_n-ib_n;\ a_n=\operatorname{Re}c_n;\ b_n=-\operatorname{Im}c_n.$$

Пример. Разложить в ряд Фурье периодическую (с периодом $T=2\pi$) функцию $f(x)$, определенную равенствами: $f(x)=\begin{cases} C_1, & -\pi<x<0, \\ C_2, & 0<x<\pi. \end{cases}$

∇ Начертим график заданной функции (рис. 13.1).

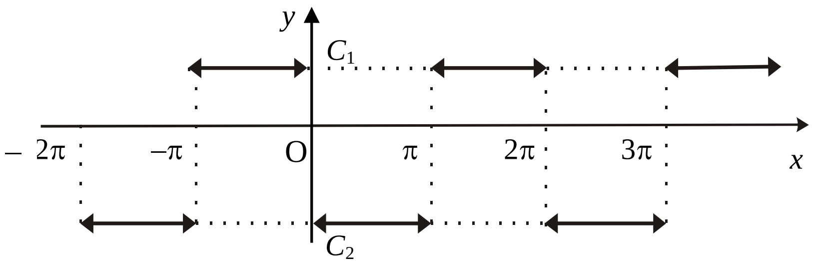


Рис. 13.1

$f(x)$ является кусочно-гладкой на $(-\pi;\ \pi)$, периодической с $T=2l=2\pi$. Ряд Фурье будет иметь вид: $\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n\cos nx+b_n\sin nx$;

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} C_1dx+\int_{0}^{\pi} C_2dx\right)=C_1+C_2;$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} C_1\cos nxdx+\int_{0}^{\pi} C_2\cos nxdx\right)=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\frac{C_1}{n}\sin nx\Big|_{-\pi}^{0}+\frac{C_2}{n}\sin nx\Big|_{0}^{\pi}\right)=0;$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nxdx=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} C_1\sin nxdx+\int_{0}^{\pi} C_2\sin nxdx\right)=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(-\frac{C_1}{n}\cos nx\Big|_{-\pi}^{0}-\frac{C_2}{n}\cos nx\Big|_{0}^{\pi}\right)=-\frac{1}{n\pi}\left(C_1-C_1\cos n\pi+C_2\cos n\pi-C_2\right)=$$

$$=\frac{1}{n\pi}\left((C_2-C_1)-(C_2-C_1)(-1)^n\right)=\frac{C_2-C_1}{n\pi}(1-(-1)^n).$$

Запишем ряд Фурье:

$$\frac{C_1+C_2}{2}+\frac{C_2-C_1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{n}\sin nx=\begin{cases} C_1, & -\pi<x<0, \\ C_2, & 0<x<\pi, \\ \dfrac{C_1+C_2}{2}, & x=0;\ \pm\pi \end{cases}$$

(сумма ряда записана в соответствии с теоремой 1: в точках непрерывности $f(x)$ ряд Фурье сходится к $f(x)$, а в точках разрыва $f(x)$ – к среднему арифметическому односторонних пределов $f(x)$ в этих точках). #

Пример. Разложить в ряд Фурье по косинусам $f(x)=\sin\frac{x}{2}$ на отрезке [0, 2].

∇ Продолжим $f(x)$ четным образом на [–2, 0], а затем построим периодическое продолжение функции, заданной на [–2, 2] на всю ось Ox (рис. 13.2).

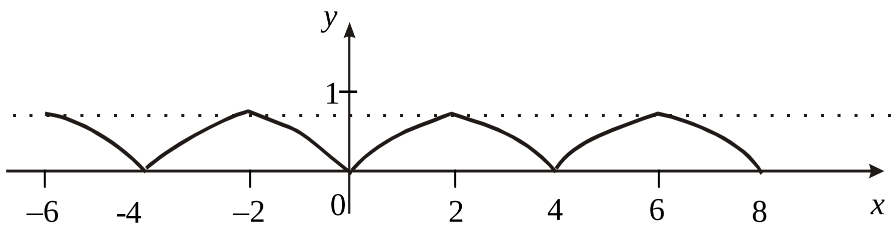


Рис. 13.2

Получим непрерывную на $(-\infty,\ +\infty)$ функцию; $l = 2$.

Ряд Фурье имеет вид: $\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{2}$;

$$a_0=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)dx=\frac{2}{2}\int_0^2 \sin\frac{x}{2}dx=2\cos\frac{x}{2}\Big|_0^2=2(\cos 1-1);$$

$$a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx=\frac{2}{2}\int_0^2 \sin\frac{x}{2}\cos\frac{n\pi x}{2}dx=$$

$$=\left(-\frac{\cos\frac{1+n\pi}{2}x}{2\cdot\frac{1+\pi n}{2}}-\frac{\cos\frac{1-\pi n}{2}x}{\frac{2(1-\pi n)}{2}}\right)\Bigg|_0^2=$$

$$=-\frac{\cos(1+n\pi)}{1+n\pi}-\frac{\cos(1-n\pi)}{1-n\pi}+\frac{1}{1+n\pi}+\frac{1}{1-n\pi}=$$

$$=-\frac{\cos 1\cdot(-1)^n}{1+n\pi}-\frac{\cos 1\cdot(-1)^n}{1-n\pi}+\frac{1}{1+n\pi}+\frac{1}{1-n\pi}=\frac{2-2(-1)^n\cos 1}{1-n^2\pi^2}.$$

Ряд Фурье: $\cos 1-1+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n\cos 1}{1-n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi x}{2}=\sin\frac{x}{2}$, $0\le x\le 2$. #

Пример. Представить рядом Фурье в комплексной форме периодическую функцию $f(x)$ $(T = 2\pi)$, определенную для $0 \le x < 2\pi$ равенством $f(x) = e^x$.

∇ Построим график данной функции (рис. 13.3).

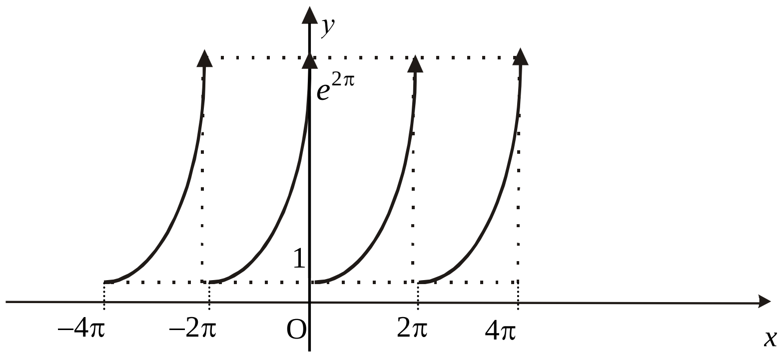


Рис. 13.3

Функция является кусочно-гладкой на $[0;\ 2\pi]$, следовательно, ее можно разложить в ряд Фурье, который будет иметь вид $\frac{1}{2}\sum\limits_{-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$.

$$c_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi} f(x)e^{-inx}dx = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi} e^x e^{-inx}dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi} e^{x(1-in)}dx = \frac{1}{\pi(1-in)}e^{x(1-in)}\Big|_0^{2\pi} = \frac{1}{\pi(1-in)}\left(e^{2\pi - i2\pi n} - 1\right) = \frac{e^{2\pi}-1}{\pi(1-in)}.$$

Ряд Фурье: $$\frac{e^{2\pi}-1}{2\pi}\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1-in}\,e^{inx} = \begin{cases} e^x, & 0 < x < 2\pi; \\ \dfrac{e^{2\pi}+1}{2}, & x = 0;\ \ 2\pi. \end{cases} \qquad \#$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Разложить в ряд Фурье на $(0;\ 2\pi)$ функцию $f(x) = \dfrac{\pi - x}{2}$.

2. Разложить в ряд Фурье периодическую $(T = 2\pi)$ функцию $f(x)$, определенную на $\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{3\pi}{2}\right]$ равенствами $f(x) = \begin{cases} \cos x, & -\dfrac{\pi}{2} < x \le \dfrac{\pi}{2}, \\ 0, & \dfrac{\pi}{2} < x \le \dfrac{3\pi}{2}. \end{cases}$

3. Разложить в ряд Фурье на $(-\pi,\ \pi)$ $f(x)=x\cos x$.

4. Разложить в интервале $(0;\ \pi)$ по синусам $f(x)=\dfrac{\pi}{4}$. Полученное разложение использовать для суммирования числовых рядов: а) $1-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{7}+\ldots$; б) $1-\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{7}-\dfrac{1}{11}+\dfrac{1}{13}-\ldots$.

5. Дана функция $f(x)=x^2$. Разложить ее в ряд Фурье: а) в $(-\pi;\pi)$; б) в $(0;\ 2\pi)$; в) в $(0;\ \pi)$ по синусам; г) в интервале $(0;\ \pi)$ так, чтобы сумма ряда тождественно равнялась нулю для всех $x\in(-\pi;\ 0)$.

6. Разложить в ряд Фурье $f(x)=|x|$ на [–1; 1].

7. Разложить в ряд Фурье $f(x)=\begin{cases} x, & 0\le x\le 1,\\ 1, & 1<x<2,\\ 3-x, & 2\le x\le 3\end{cases}$

на [0; 3].

8. Разложить в ряд Фурье по косинусам $f(x)=\sin\dfrac{x}{2}$ на [0; 2].

9. Доказать справедливость равенства

$$|\cos x| = \frac{2}{\pi}+\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1}\cos 2nx .$$

10. Представить рядом Фурье в комплексной форме периодическую функцию $f(x)$ $(T=2\pi)$, определенную для $0\le x\le 2\pi$ равенством $f(x)=e^x$. Воспользовавшись полученным рядом Фурье в комплексной форме, записать в действительной форме ряд Фурье этой функции.

11. Разложить в ряд Фурье $f(x)$ (с периодом 2π) в комплексной форме: $f(x)=\begin{cases} 0, & -\pi<x<0,\\ e^{-x}, & 0<x<\pi.\end{cases}$

12. Разложить в ряд Фурье $f(x)=\operatorname{ch}x$ на $[-\pi;\ \pi]$.

13. Разложить в ряд Фурье $f(x)=\operatorname{sh}x$ на $(-\pi;\ \pi)$.

13.4. ИНТЕГРАЛ ФУРЬЕ. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ

Теорема 2. Если $f(x)$: 1) абсолютно интегрируемая на $(-\infty;\ +\infty)$ функция, т.е. удовлетворяющая условию $\int\limits_{-\infty}^{\infty}|f(x)|\,dx<+\infty$; 2) кусочно-гладкая на каждом конечном отрезке, то ее *интеграл Фурье*

$$\int\limits_0^{+\infty}\left(a(\alpha)\cos\alpha x+b(\alpha)\sin\alpha x\right)d\alpha\,, \tag{13.11}$$

где

$$a(\alpha)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos\alpha t dt\,, \tag{13.12}$$

$$b(\alpha)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(t)\sin\alpha t dt\,, \tag{13.13}$$

равен $f(x)$ в каждой точке непрерывности $f(x)$ и $\dfrac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$ в каждой точке разрыва $f(x)$.

Если $f(x)$ – четная, то

$$a(\alpha)=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}f(t)\cos\alpha t dt\,,\;\; b(\alpha)=0\,. \tag{13.14}$$

Если $f(x)$ – нечетная, то

$$a(\alpha)=0\,;\;\; b(\alpha)=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}f(t)\sin\alpha t dt\,. \tag{13.15}$$

Для представления интегралом Фурье функции, заданной лишь в промежутке $[0;+\infty)$ и продолженной четным образом на $(-\infty;\,0)$, используем формулы (13.14), а продолженной нечетным образом – формулы (13.15).

Если $a(\alpha)$ и $b(\alpha)$, найденные по формулам (13.14), подставить в (13.11), то получим двойной интеграл Фурье для четной функции $f(x)$:

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\cos\alpha t d\alpha\int\limits_0^{+\infty}f(t)\cos\alpha t dt\,.$$

Положив

$$\varphi(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^{+\infty}f(t)\cos xt dt\,, \tag{13.16}$$

получим

$$f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^{+\infty}\varphi(t)\cos xt dt\,. \tag{13.17}$$

Равенство (13.16) называется косинус-преобразованием $f(x)$, а (13.17) – косинус-преобразованием $\varphi(x)$.

Аналогично, если $f(x)$ – нечетная, то

$$\varphi(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^{+\infty}f(t)\sin xt dt \tag{13.18}$$

называется синус-преобразованием $f(x)$, а

$$f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_{0}^{+\infty}\varphi(t)\sin xt dt \qquad (13.19)$$

называется синус-преобразованием $\varphi(x)$.

Комплексная форма интеграла Фурье имеет вид

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}c(\alpha)e^{i\alpha x}d\alpha\ , \qquad (13.20)$$

где

$$c(\alpha)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-i\alpha t}dt\,. \qquad (13.21)$$

Связь между $a(\alpha),\ b(\alpha)$ и $c(\alpha)$: $c(\alpha)=\pi(a(\alpha)-ib(\alpha)),\ -\infty<\alpha<+\infty$.

Функция $c(\alpha)$ называется *спектральной характеристикой* функции $f(x)$, $|c(\alpha)|$ называется *спектром* функции $f(x)$.

Функция $c(\alpha)$ называется также преобразованием Фурье функции $f(t)$, в этом случае ее обычно обозначают

$$F(\alpha)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-i\alpha t}dt\,.$$

Пример. Представить интегралом Фурье функцию

$$f(x)=\begin{cases}|x|, & |x|<1,\\ 0, & |x|>1,\\ \dfrac{1}{2}, & |x|=1.\end{cases}$$

∇ Построим график данной функции (рис. 13.4).

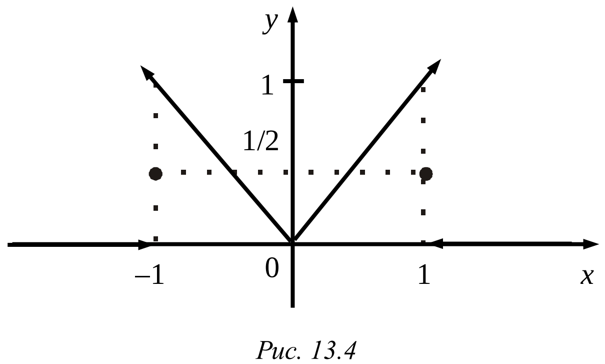


Рис. 13.4

Данная функция: 1) имеет 2 точки разрыва I рода $(x = \pm 1)$; 2) абсолютно интегрируема на всей оси Ox: $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|dx =$ $= 2\int\limits_0^1 xdx = x^2\Big|_0^1 = 1$; 3) функция – четная, поэтому на основании (13.14) $b(\alpha) = 0$; $a(\alpha) = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{+\infty} f(t)\cos\alpha t dt =$

$$= \frac{2}{\pi}\int\limits_0^1 t\cos\alpha t dt = \frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{\alpha^2}\cos\alpha t + \frac{t}{\alpha}\sin\alpha t\right)\Bigg|_0^1 =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{\alpha^2}\cos\alpha + \frac{1}{\alpha}\sin\alpha - \frac{1}{\alpha^2}\right) = \frac{2}{\pi\alpha^2}(\alpha\sin\alpha + \cos\alpha - 1).$$

Данная функция является непрерывной в интервалах $(-\infty; -1)$; $(-1;\ 1)$; $(1;\ +\infty)$, кроме того, в точках разрыва среднее арифметическое односторонних пределов функции совпадает со значением ее в этих точках, поэтому можно записать интеграл Фурье

$$\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\infty}\frac{\alpha\sin\alpha + \cos\alpha - 1}{\alpha^2}\cos\alpha x d\alpha = \begin{cases} |x|, & |x| < 1, \\ 0, & |x| > 1, \\ \frac{1}{2}, & |x| = 1. \end{cases} \ \#$$

Пример. Показать, что спектральной характеристикой функции $f(x) = \begin{cases} e^{-ax}, & x > 0 \\ 0, & x < 0, \end{cases}$, $a > 0$ является функция $c(\alpha) = \frac{1}{a + i\alpha}$. Построить график спектра $f(x)$.

∇ Построим график данной функции (рис. 13.5).

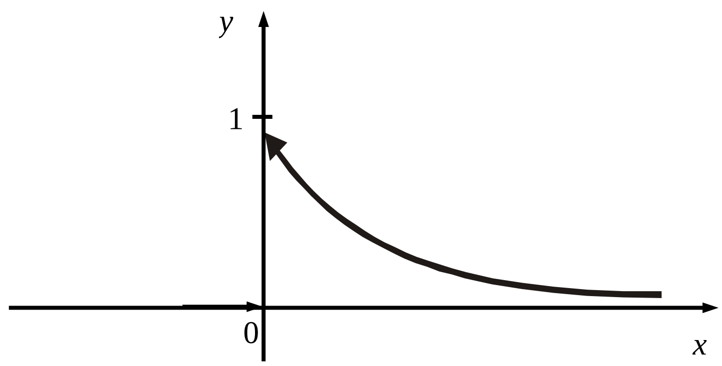


Рис. 13.5

Найдем $c(\alpha)$ по формуле (13.21) $c(\alpha)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\alpha x}dx=\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-ax}e^{-i\alpha x}dx=$

$$=\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-x(a+i\alpha)}dx=-\frac{1}{a+i\alpha}e^{-x(a+i\alpha)}\Big|_0^{+\infty}=\frac{1}{a+i\alpha}.$$

Спектр $f(x)$ – это $\left|\left(c(\alpha)\right|\right.$. $\left|c(\alpha)\right|=\dfrac{1}{\left|a+i\alpha\right|}=\dfrac{1}{\sqrt{a^2+\alpha^2}}$.

Построим график $\left|c(\alpha)\right|$ (рис. 13.6).

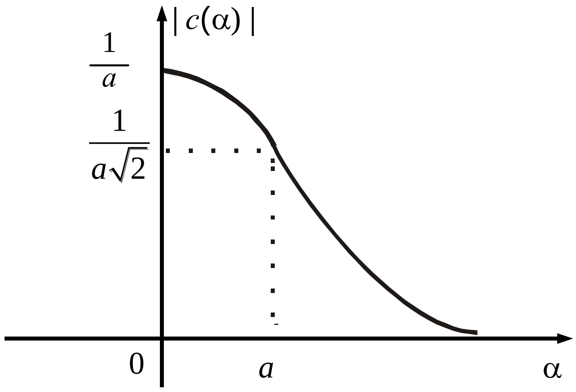


Рис. 13.6

Задачи для самостоятельного решения

В задачах 14 – 17 представить интегралом Фурье следующие функции.

14. $f(x)=\begin{cases}\operatorname{sgn} x, & |x|<1,\\ 0, & |x|>1.\end{cases}$ **15.** $f(x)=\begin{cases}x, & |x|\le 1,\\ 0, & |x|>1.\end{cases}$

16. $f(x)=\begin{cases}\cos x, & |x|\le \dfrac{\pi}{2},\\ 0, & |x|>\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$ **17.** $f(x)=\begin{cases}-x-2, & -2<x<-1,\\ x, & -1<x<1,\\ -x+2, & 1<x<2,\\ 0, & |x|>2.\end{cases}$

18. Функцию $f(x)=e^{-x}$, $0<x<+\infty$ представить интегралом Фурье, продолжая ее: 1) четным образом, 2) нечетным образом на промежуток $(-\infty, 0)$. Найти значения интегралов $\int\limits_0^{\infty}\dfrac{\cos x}{1+x^2}dx$ и $\int\limits_0^{\infty}\dfrac{x\sin x}{1+x^2}dx$.

19. Используя результат задачи 18, представить интегралами Фурье функции: 1) $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$; 2) $f(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$.

20. Написать интеграл Фурье в комплексной форме для функций: 1) $f(x)=e^{-a|x|}$; 2) $f(x)=xe^{-a|x|}$, $(a>0)$.

21. Вычислить спектр прямоугольного импульса высотой h и длительностью τ и построить график спектра (рис. 13.7).

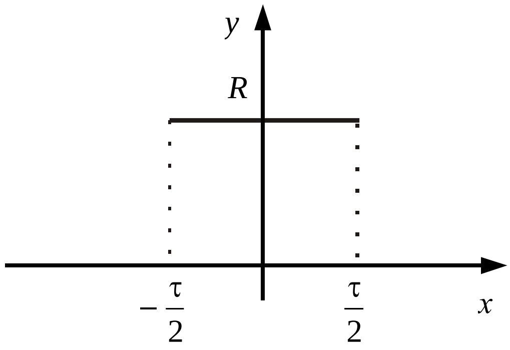


Рис. 13.7

22. Записать преобразование Фурье для следующих функций:

1) $f(t)=e^{-|t|}$; 2) $f(t)=te^{-|t|}$.

ОТВЕТЫ К ЗАДАЧАМ ГЛАВЫ 13

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin nx}{n}$, $0<x<2\pi$.

2. $\dfrac{1}{\pi}+\dfrac{1}{2}\cos x+\dfrac{2}{\pi}\left(\dfrac{1}{3}\cos 2x-\dfrac{1}{15}\cos 4x+\ldots+(-1)^{n+1}\dfrac{1}{4n^2-1}\cos 2nx+\ldots\right)$.

3. $-\dfrac{1}{2}\sin x+2\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{(-1)^n\cdot n}{n^2-1}\sin nx$.

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin(2n-1)x}{2n-1}$; а) $\dfrac{\pi}{4}$; б) $\dfrac{\pi}{2\sqrt{3}}$.

5. а) $\frac{1}{3}\pi^2+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx$; б) $\frac{4}{3}\pi^2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2}\cos nx-\frac{4\pi}{n}\sin nx$;

в) $\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n-1-2\pi n^2}{n^3}\sin nx$;

г) $\frac{\pi^2}{6}+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{\pi n^3}((-1)^n-1)-\frac{\pi}{n}\right)\sin nx$.

6. $\frac{1}{2}-\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)\pi x}{(2n-1)^2}$. **7.** $\frac{2}{3}+\frac{3}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\frac{2\pi n}{3}-1}{n^2}\cos\frac{2\pi nx}{3}$.

8. $1-\cos 1+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+(-1)^{n+1}\cos 1}{1-n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi x}{2}$.

10. $\frac{e^{2\pi}-1}{2\pi}\sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{1+in}{1+n^2}e^{inx}$; $\frac{e^{2\pi}-1}{\pi}\left(\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{1+n^2}-\frac{n\sin nx}{1+n^2}\right)$.

11. $\frac{1}{2\pi}\sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{1+(-1)^{n+1}e^{-\pi}}{1+in}e^{inx}$. **12.** $\frac{\operatorname{sh}\pi}{\pi}\sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{1+n^2}e^{inx}$.

13. $\frac{i\operatorname{sh}\pi}{\pi}\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{1+n^2}e^{inx}$. **14.** $\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos\alpha}{\alpha}\sin\alpha x\,d\alpha$.

15. $\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha^2}-\frac{\cos\alpha}{\alpha}\right)\sin\alpha x\,d\alpha$. **16.** $\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\cos\alpha\frac{\pi}{2}}{1-\alpha^2}\cos\alpha x\,d\alpha$.

17. $\frac{4}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{(1-\cos\alpha)\sin\alpha}{\alpha^2}\sin\alpha x\,d\alpha$.

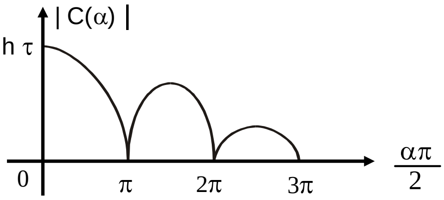
18. 1) $\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\cos\alpha x}{1+\alpha^2}d\alpha$; $x\ge 0$; 2) $\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\alpha\sin\alpha x}{1+\alpha^2}d\alpha$; $x>0$;

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2e}; \qquad \int_0^{+\infty} \frac{x\sin x}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2e}.$$

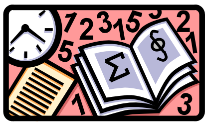
19. 1) $\int\limits_0^{+\infty} e^{-\alpha}\cos\alpha x d\alpha$; 2) $\int\limits_0^{+\infty} e^{-\alpha}\sin\alpha x d\alpha$.

20. 1) $\dfrac{a}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{1}{a^2+\alpha^2} e^{i\alpha x} d\alpha$; 2) $-i\,\dfrac{2a}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{\alpha}{\left(a^2+\alpha^2\right)^2} e^{i\alpha x} d\alpha$.

21. $\left|c(\alpha)\right| = h\tau\left|\dfrac{\sin\alpha\,\frac{\tau}{2}}{\alpha\,\frac{\tau}{2}}\right|$



22. 1) $\dfrac{2}{1+\alpha^2}$; 2) $-4i\,\dfrac{\alpha}{(1+\alpha^2)^2}$.



Г Л А В А 14

КРАТНЫЕ, КРИВОЛИНЕЙНЫЕ, ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

14.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ КРАТНОГО ИНТЕГРАЛА. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДВОЙНОГО И ТРОЙНОГО ИНТЕГРАЛОВ

Пусть: 1) в ограниченной замкнутой области $E \subset R^m = \{x_1, x_2, \dots x_m\}$ «объема» $V(E)$ задана ограниченная функция $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$; 2) $\tau = \{E_1, E_2, \dots, E_n\}$ – разбиение области $E = \bigcup\limits_{i=1}^{n} E_i$ на подобласти E_i с объемами ΔE_i $\left(V(E) = \sum\limits_{i=1}^{n} \Delta E_i\right)$ и диаметрами d_i, $\overline{d} = \sup\{d_i\}$ – диаметр разбиения; 3) зафиксируем точки $M\ (\xi_1^i, \xi_2^i, \dots, \xi_m^i) \in E_i$, $i = 1, 2, \dots, n$; 4) построим *интегральную сумму*

$$I_n = \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta E_i .$$

Определение. Конечный предел I интегральной суммы I_n при $\overline{d} \to 0$, не зависящий ни от способа разбиения области E, ни от выбора точек M_i, называется *m-кратным интегралом* от функции f по области E и обозначается

$$I = \iint\limits_{E} \dots \int f(x_1, x_2, \dots, x_m)dE$$

или

$$I = \iint\limits_{E} \dots \int f(x_1, x_2, \dots, x_m)dx_1 dx_2 \dots dx_m . \qquad (14.1)$$

Таким образом, по определению

$$I = \iint\limits_{E} \dots \int f(x_1, x_2, \dots, x_m)dE = \lim_{\substack{n\to\infty \\ (\overline{d}\to 0)}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_1^i, \xi_2^i, \dots, \xi_m^i)\Delta E_i . \qquad (14.2)$$

В этом случае функция $f(x_1, \dots, x_m)$ называется *интегрируемой* в E.

При $m = 2$ $(m = 3)$ для ограниченной функции f в замкнутой области $S \subset R^2 = \{(x, y)\}$ $(V \subset R^3 = \{(x, y, z)\})$ кратный интеграл (14.1) называется *двойным* (*тройным*) *интегралом*, а соответствующее определение (14.2) примет вид

$$I = \iint\limits_S f(x, y)dS = \iint\limits_S f(x, y)dxdy = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta S_i ,$$

где точка $M_i(\xi_i, \eta_i) \in S_i$,

$$\left(I = \iiint\limits_V f(x, y, z)dV = \iiint\limits_V f(x, y, z)dxdydz = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta V_i ,\right.$$

где точка $M_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \in V_i$).

14.2. ДВОЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

14.2.1. ОБЛАСТИ НА ПЛОСКОСТИ

Определение. Область $S \subset R^2 = \{(x, y)\}$ назовем *правильной в направлении Oy*, если прямая, проходящая через любую внутреннюю точку из S параллельно оси Oy, пересекает границу области ровно в двух точках (рис. 14.1).

Область S будет правильной в направлении Oy , если существуют функции $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$, определенные и непрерывные на $[a; b]$ и такие, что координаты точек, принадлежащих S, удовлетворяют условиям: $a \le x \le b,\ \ \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)$; тогда символически можно записать:

$$S: \ \{a \le x \le b; \quad \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)\}. \tag{14.3}$$

Область S будет *правильной в направлении Ox*, если существуют функции $\psi_1(y)$ и $\psi_2(y)$, определенные и непрерывные на $[c; d]$ и такие, что координаты точек, принадлежащих S , удовлетворяют условиям: $\psi_1(y) \le x \le \psi_2(y),\ \ c \le y \le d$ (рис. 14.2); тогда символически

$$S:\{c \le y \le d; \quad \psi_1(y) \le x \le \psi_2(y)\}. \tag{14.4}$$

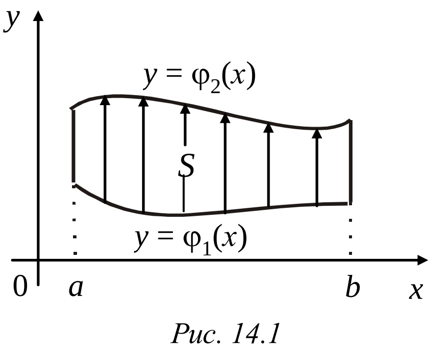


Рис. 14.1

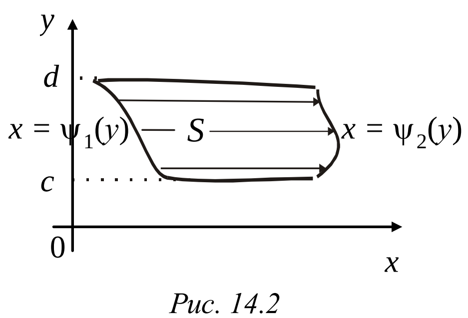


Рис. 14.2

Область называется *правильной*, если она правильная в обоих направлениях Ox и Oy.

Пример 1. Область S задана уравнениями границы: $y=x/2$, $y=x$, $x=2$.

Изобразить указанную область и записать как правильную.

∇ Область S – треугольник, ограниченный прямыми $OA: y=x/2$, $OB: y=x$, $AB: x=2$ (рис. 14.3). Точки пересечения прямых есть $O(0;0)$, $A(2;1)$, $B(2;2)$.

а) Область S – правильная в направлении Oy и любая прямая L, проходящая через внутреннюю точку области, пересекает прямую $OA: y=x/2$ и прямую $OB: y=x$. Поэтому в силу (14.3) область задается системой неравенств: $S:\{0\le x\le 2;\ x/2\le y\le x\}$.

б) Эта же область является правильной и в направлении Ox, но для задания ее системой неравенств необходимо область S разбить на две части S_1 и S_2 (рис. 14.4). Выразим в уравнениях границы x через независимую переменную y : $OB: x=y$, $OA: x=2y$. Для определения границ изменения переменной y проведем прямые, параллельные оси Ox. Прямая L_1 пересекает прямую $OB: x=y$ и прямую $OA: x=2y$; прямая L_2 пересекает прямую $OB: x=y$ и прямую $AB: x=2$. Итак, $S=S_1\bigcup S_2$, и в силу (14.4) $S_1:\{0\le y\le 1;\ y\le x\le 2y\}$, $S_2:\{1\le y\le 2;\ y\le x\le 2\}$. #

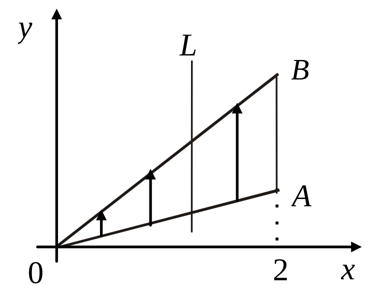


Рис. 14.3

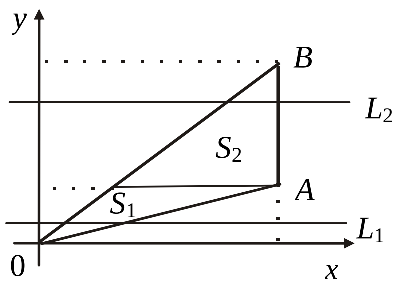


Рис. 14.4

Пример 2. Точки из области D удовлетворяют неравенству $x^2+y^2\le ax$ $(a>0)$, т.е. D: $\{x^2+y^2\le ax\}$. Изобразить данную область и записать как правильную.

∇ Преобразуя неравенство $x^2+y^2\le ax$, получим $(x-a/2)^2+$ $+y^2\le a^2/4$. Геометрически область D есть круг радиуса $a/2$ с центром в точке $C(a/2;\ 0)$. Из уравнения границы $x^2+y^2=ax$ следует $y=\pm\sqrt{ax-x^2}$ или $x=(a/2)\pm\sqrt{(a^2/4)-y^2}$. Область D может быть записана как правильная в направлении Oy (любая прямая, проходящая через внутреннюю точку D параллельно Oy, пересекает полуокружность OKL: $y=-\sqrt{ax-x^2}$ и полуокружность OML: $y=+\sqrt{ax-x^2}$

[рис. 14.5)], в силу (14.3) $D:\{\ 0\le x\le a;\ \ -\sqrt{ax-x^2}\le y\le\sqrt{ax-x^2}\}$. Область D можно записать как правильную в направлении Ox (прямая, проходящая через внутреннюю точку D параллельно Ox, пересекает полуокружность $KOM: x=(a/2)-\sqrt{(a^2/4)-y^2}$ и полуокружность $KLM: x=(a/2)+\sqrt{(a^2/4)-y^2}$ (рис. 14.6)), и в силу (14.4): (D): $\{-a/2\le y\le a/2;\ \ (a/2)-\sqrt{(a^2/4)-y^2}\le x\le(a/2)+$ $+\sqrt{(a^2/4)-y^2}\}$. #

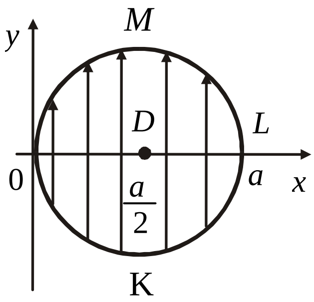


Рис. 14.5

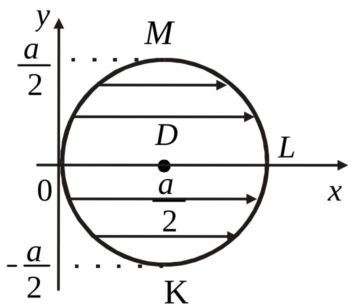


Рис. 14.6

Задачи для самостоятельного решения

Изобразить указанные области и записать как правильные в направлении Oy.

1. S – параллелограмм со сторонами $x = 3$, $x = 5$, $3x - 2y + 4 = 0$, $3x - 2y + 1 = 0$.

2. Область D задана неравенствами $y\ge x^2,\ y\le 4-x^2$.

3. Область D – треугольник со сторонами $y = x$, $y = 2x$, $x+y=6$.

14.2.2. ПОВТОРНЫЙ ИНТЕГРАЛ

Определение. *Повторный интеграл* $\int\limits_a^b dx\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy$ есть приращение первообразной $F(x,y)$ для $f(x,y)$ по переменному y, проинтегрированное по переменному x, т.е.

$$\int\limits_a^b dx\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy=\int\limits_a^b\left[F(x,y)\Big|_{y=y_1(x)}^{y=y_2(x)}\right]dx=$$

$$=\int\limits_a^b\left[F(x,y_2(x))-F(x,y_1(x))\right]dx.$$

Определение. *Повторный интеграл* $\int\limits_c^d dy \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y)dx$ есть приращение первообразной $\Phi(x, y)$ для $f(x, y)$ по переменному x, проинтегрированное по переменному y, т.е.

$$\int\limits_c^d dy \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y)dx = \int\limits_c^d \left[\Phi(x, y)\Big|_{x=x_1(y)}^{x=x_2(y)} \right] dy =$$

$$= \int\limits_c^d \left[\Phi(x_2(y), y) - \Phi(x_1(y), y) \right] dy .$$

Пример 3. Вычислить повторный интеграл $\int\limits_1^2 dx \int\limits_x^{x^2} (x-2y)dy$.

$\nabla \int\limits_1^2 dx \int\limits_x^{x^2} (x-2y)dy = \Big|$, интегрируя внутренний интеграл по y, полагаем x постоянным $\Big| = \int\limits_1^2 dx \left(x\int\limits_x^{x^2} dy - 2\int\limits_x^{x^2} ydy \right) =$

$$= \int\limits_1^2 \left[x\left(y\Big|_x^{x^2} \right) - 2\left(y^2/2\Big|_x^{x^2} \right) \right] dx =$$

$$= \int\limits_1^2 \left[x(x^2-x) - (x^4-x^2) \right] dx = \int\limits_1^2 (x^3-x^4)dx =$$

$$= \left(x^4/4 - x^5/5 \right) \Big|_1^2 = -49/20 . \#$$

Задачи для самостоятельного решения

Вычислить повторные интегралы.

4. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^1 (x+y)dy$. **5.** $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{x^2}^{x} xy^2 dy$ **6.** $\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^a \rho^2 \sin^2 \varphi d\rho$.

7. $\int\limits_a^A dx \int\limits_b^B f(x, y)dy$, если $f(x, y) = F''_{xy}(x, y)$.

14.2.3. ВЫЧИСЛЕНИЕ ДВОЙНОГО ИНТЕГРАЛА В ДЕКАРТОВЫХ КООРДИНАТАХ

Теорема 14.1. Если: 1) функция $f(x,y)$ интегрируема в правильной в направлении Oy области S: $\{a \le x \le b,\ y_1(x) \le y \le y_2(x)\}$, т.е. существует двойной интеграл $\iint\limits_S f(x, y)dS$, 2) существует повторный интеграл $\int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y)dy$, то

$$\boxed{\iint\limits_S f(x, y)dS = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y)dy} \qquad (14.5)$$

Теорема 14.2. Если: 1) функция $f\,(x,\ y)$ интегрируема в правильной в направлении Ox области $S:\{\,c \le y \le d,\ x_1(y) \le x \le x_2(y)\}$, т.е. существует двойной интеграл $\iint\limits_S f(x, y)dS$, 2) существует повторный интеграл $\int\limits_c^d dy \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y)dx$, то

$$\boxed{\iint\limits_S f(x, y)dS = \int\limits_c^d dx \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y)dx} \qquad (14.6)$$

Из приведенных выше теорем следует, что *при вычислении повторного интеграла можно изменять порядок интегрирования.*

Пример 4. Изменить порядок интегрирования в интеграле $\int\limits_0^1 dy \int\limits_y^{2-y} f(x, y)dx$.

∇ Так как из (14.6) имеем $\int\limits_0^1 dy \int\limits_y^{2-y} f(x, y)dx = \iint\limits_D f(x, y)dxdy$,

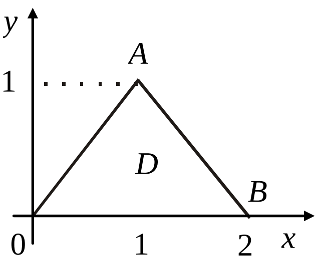


Рис. 14.7

то правильная в направлении Ox область D ограничена линиями $x = y$, $x = 2 - y$, $y = 0$, $y = 1$ (линия $y = 1$ выродилась в точку) (рис. 14.7). Эта область является правильной и в направлении Oy. Так как участок OAB границы состоит из отрезков прямых OA: $y = x,\ x \in [0; 1]$ и AB: $y = 2 - x,\ x \in [1; 2]$, то $D = D_1 \cup D_2$, где [см. (14.3)] $D_1 : \{0 \le x \le 1;\ 0 \le y \le x\}$, D_2: $\{1 \le x \le 2;\ \ 0 \le y \le 2 - x\}$.

Итак, $\int\limits_0^1 dy \int\limits_y^{2-y} f dx = \iint\limits_{D=D_1\cup D_2} f dx dy = \iint\limits_{D_1} f dx dy + \iint\limits_{D_2} f dx dy =$

$$= \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^x f(x, y) dy + \int\limits_1^2 dx \int\limits_0^{2-x} f(x, y) dy . \#$$

Пример 5. Вычислить $I = \iint\limits_D (x + y^2) dx dy$ по области D, ограниченной линиями $y = x^2$ и $y = \sqrt{x}$.

∇ Изобразим область D. Для отыскания точек пересечения парабол $y = x^2$ и $y = \sqrt{x}$ решаем уравнение $x^2 = \sqrt{x} \Rightarrow x^4 = x \Rightarrow$ $\Rightarrow x^4 - x = 0 \Rightarrow x(x-1)(x^2 + x + 1) = 0$, отсюда имеем действительные корни $x_1 = 0$, $x_2 = 1$. Таким образом, параболы пересекаются в точках $O(0; 0)$, $A(1; 1)$ (рис. 14.8). Рассматривая область D как правильную в направлении Oy (рис. 14.8*а*), имеем [см. (14.3)] D: $\{0 \le x \le 1;\ x^2 \le y \le \sqrt{x}\}$. По формуле (14.3)

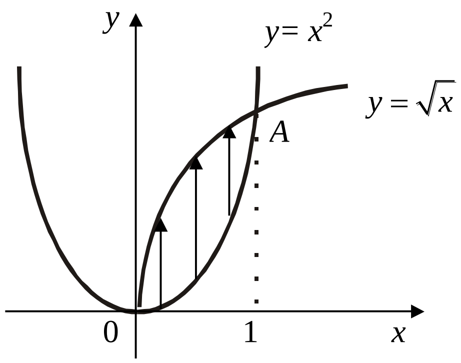


Рис. 14.8а

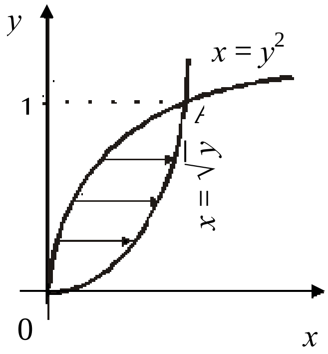


Рис. 14.8б

$$I = \iint\limits_D (x + y^2) dx dy = \int\limits_0^1 dx \int\limits_{x^2}^{\sqrt{x}} (x + y^2) dy =$$

$$= \int\limits_0^1 dx \left[\left(xy + \frac{y^3}{3} \right) \Bigg|_{y=x^2}^{y=\sqrt{x}} \right] =$$

$$= \int\limits_0^1 \left(\frac{4}{3} x\sqrt{x} - x^3 - \frac{1}{3} x^6 \right) dx = \left(\frac{8}{15} x^{5/2} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^7}{21} \right) \Bigg|_0^1 = \frac{33}{140} .$$

Если область D рассматривать как правильную в направлении Ox (рис. 14.8*б*), то [см. (14.4)] D: $\{ 0 \le y \le 1;\ y^2 \le x \le \sqrt{y}\}$. По формуле (14.6)

$$I=\iint_D (x+y^2)dxdy=\int_0^1 dy\int_{y^2}^{\sqrt{y}}(x+y^2)dx=$$

$$=\int_0^1 dy\left[\left(\frac{x^2}{2}+y^2x\right)\Bigg|_{x=y^2}^{x=\sqrt{y}}\right]=\int_0^1\left(\frac{y}{2}+y^{5/2}-\frac{3}{2}y^4\right)dy=$$

$$=\left(\frac{y^2}{4}+\frac{2}{7}y^{7/2}-\frac{3}{10}y^5\right)\Bigg|_0^1=\frac{33}{140}.\ \#$$

Задачи для самостоятельного решения

Изменить порядок интегрирования в следующих повторных интегралах.

8. $\int_0^1 dy\int_y^{\sqrt{y}} f(x,y)dx$. **9.** $\int_0^r dx\int_x^{\sqrt{2rx-x^2}} f(x,y)dy$.

10. $\int_1^e dx\int_0^{\ln x} f(x,y)dy$. **11.** $\int_0^\pi dx\int_0^{\sin x} f(x,y)dy$.

Перейти от двойного интеграла $\iint_D f(x,y)dxdy$ по конечной области D к повторному интегралу и расставить пределы интегрирования.

12. Область D – параллелограмм со сторонами $x=3,\ x=5,$ $3x-2y+4=0,\ \ 3x-2y+1=0$.

13. $D:\{x^2+y^2\le 1;\ x\ge 0;\ y\ge 0\}$. **14.** $D:\{(x-2)^2+(y-3)^2\le 4\}$.

15. D – треугольник со сторонами $y=x,\ y=2x,\ x+y=6$.

16. $D:\{y-2x\le 0;\ 2y-x\ge 0,\ xy\le 2\}$.

17. D – треугольник с вершинами $O(0;\,0),\ A(2;\,1),\ B(-2;\,1)$.

18. D – сегмент, ограниченный линиями $y=x^2,\ y=1$.

Вычислить двойные интегралы.

19. $\iint_D e^{x+y}dxdy,\ D:\{0\le x\le 1;\ 0\le y\le 2\}$. **20.** $\iint_D x^3y^2dxdy,$ D – круг $x^2+y^2\le R^2$.

21. $\iint_D (x^2+y)dxdy,\ D$ – область, ограниченная линиями $y=x^2,\ y^2=x$.

22. $\iint\limits_D \frac{x^2}{y^2}\,dxdy,\ D$ – область, ограниченная линиями $x=2,\ y=x,\ xy=1$.

23. $\iint\limits_D \cos(x+y)dxdy,\ D$ – область, ограниченная линиями $x=0,\ y=\pi,\ y=x$.

24. $\iint\limits_D \sqrt{1-x^2-y^2}\,dxdy,\ D$ – четверть круга $x^2+y^2\le 1$, лежащая в первом квадранте.

25. $\iint\limits_D xy^2dxdy,\ D$ – область, ограниченная параболой $y^2=2px$ и прямой $x=p/2$.

26. $\iint\limits_D y^2dxdy$, если D ограничена осью абсцисс и первой аркой циклоиды $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$, $0\le t\le 2\pi$.

14.2.4. ЗАМЕНА ПЕРЕМЕННЫХ В ДВОЙНОМ ИНТЕГРАЛЕ

Пусть функции $x=x(u,v),\ y=y(u,v)$ осуществляют взаимно однозначное непрерывно дифференцируемое отображение области P плоскости O_1uv на область S плоскости Oxy. Тогда существует обратное непрерывно дифференцируемое отображение $u=u(x,y)$, $v=v(x,y)$ области S на область P, если *якобиан преобразования*

$$J(u,v)=\frac{D(x,y)}{D(u,v)}=\begin{vmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_v & y'_v \end{vmatrix}\ne 0\ \ \forall (u,v)\in P.$$

Величины u и v можно рассматривать как прямоугольные координаты для точек области P и в то же время как *криволинейные координаты* точек области S. Точки плоскости Oxy, для которых одна из координат u и v сохраняет постоянное значение, образуют *координатную линию*. Всего будет два семейства таких линий.

Теорема 14.3. Пусть $x=x(u,v),\ y=y(u,v)$ есть дифференцируемое преобразование области P из плоскости O_1uv на область S из плоскости Oxy. Тогда справедливо равенство

$$\boxed{\iint\limits_S f(x,y)dS=\iint\limits_P f(x(u,v),y(u,v))\,|J(u,v)|\,dudv} \qquad (14.7)$$

З а м е ч а н и е. Равенство (14.7) сохраняет справедливость, когда условие взаимно однозначного соответствия между областями S и P нарушается в отдельных точках или вдоль отдельных линий.

Переход в двойном интеграле к полярным координатам

Формулы

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi \tag{14.8}$$

преобразуют полярные координаты ρ, φ точки в декартовы координаты этой точки и переводят область $P_0 : \{0 \le \varphi < 2\pi;\ 0 \le \rho < \infty\}$ (или область $P_0 : \{-\pi < \varphi \le \pi;\ 0 \le \rho < \infty\}$) на всю плоскость Oxy.

Обратное преобразование декартовых координат в полярные осуществляется по формулам:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi = \operatorname{arcctg} x / y + \pi \cdot \delta(y), \quad \delta(y) = \begin{cases} 0 & \text{при } y > 0, \\ 1 & \text{при } y < 0. \end{cases}$$

Фиксируя в последних формулах ρ и φ, получим координатные линии из разных семейств: окружность с центром в точке $O(0;\ 0)$ и луч, исходящий из точки $O(0;\ 0)$.

Якобиан преобразования

$$J(\rho, \varphi) = \frac{D(x,\ y)}{D(\rho,\ \varphi)} = \begin{vmatrix} x'_\rho & x'_\varphi \\ y'_\rho & y'_\varphi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -\rho \sin \varphi \\ \sin \varphi & \rho \cos \varphi \end{vmatrix} = \rho,$$

и формула (14.7) принимает вид

$$\boxed{\iint\limits_S f(x,\ y)dxdy = \iint\limits_P f(\rho \cos \varphi,\ \rho \sin \varphi)\rho d\rho d\varphi} \tag{14.9}$$

Рекомендация. К полярным координатам целесообразно переходить, когда в подынтегральное выражение или в уравнения границы области интегрирования входит комбинация $x^2 + y^2$.

В некоторых случаях при вычислении двойного интеграла удобно перейти от декартовых координат к *обобщенным полярным координатам* ρ, φ $(0 \le \rho < \infty,\ 0 \le \varphi < 2\pi\ (-\pi < \varphi \le \pi))$ по формулам

$$x = a\rho\cos\varphi, \quad y = b\rho\sin\varphi, \tag{14.10}$$

a, b – постоянные, $a > 0,\ b > 0$. Тогда

$$|J| = ab\rho, \quad dxdy = ab\rho d\rho d\varphi . \tag{14.11}$$

Пример 6. Записать в полярной системе координат область S, заданную в декартовой системе координат неравенством $x^2 + y^2 \le R^2$ (круг радиуса R с центром в точке $O(0;\ 0)$).

∇ Перейдем от декартовых координат x, y к полярным ρ, φ по формулам $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$. Подставим x и y в исходное неравенство, получим: $\rho^2 \cos^2 \varphi + \rho^2 \sin^2 \varphi \le R^2$ или $0 \le \rho \le R$. На координату φ дополнительных ограничений не накладывается, по-

этому $0 \le \varphi < 2\pi$ (или $-\pi < \varphi \le \pi$).
В полярной системе координат круг записывается неравенствами:

$$P: \{0 \le \varphi \le 2\pi;\ 0 \le \rho \le R\}. \#$$

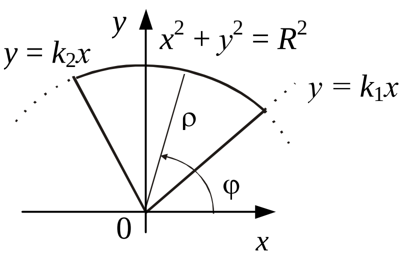


Рис. 14.9

Пример 7. Записать в полярной системе координат область S – часть круга, ограниченную линиями $x^2 + y^2 = R^2$, $y = k_1x$, $y = -k_2x$ ($y \ge 0$), k_1, k_2 – постоянные, $k_1 > 0, k_2 > 0$.

∇ Изобразим область S (рис. 14.9). Запишем заданные линии в полярных координатах, которые связаны с декартовыми формулами $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$:

1) $x^2 + y^2 = R^2 \Rightarrow \rho^2\cos^2\varphi + \rho^2\sin^2\varphi = R^2,\ \rho = R$;

2) $y = k_1x \Rightarrow \rho\sin\varphi = k_1\rho\cos\varphi,\ \operatorname{tg}\varphi = k_1,\ \varphi = \operatorname{arctg}k_1$;

3) $y = -k_2x \Rightarrow \rho\sin\varphi = -k_2\rho\cos\varphi,\ \operatorname{tg}\varphi = -k_2,\ \varphi = \pi - \operatorname{arctg}k_2$.

Область $S \subset Oxy$ переходит в область $P \subset O\rho\varphi$.

В полярной системе координат заданная область определяется системой неравенств: $P: \{\operatorname{arctg}k_1 \le \varphi \le \pi - \operatorname{arctg}k_2;\ 0 \le \rho \le R\}$. #

Пример 8. Вычислить двойной интеграл $I = \iint\limits_S (y+2)dxdy$, S – множество точек, удовлетворяющих неравенству $x^2 + y^2 \le 4x$.

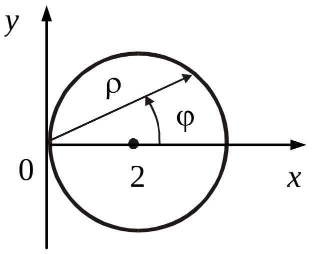


Рис. 14.10

∇ Границей области является линия $x^2 + y^2 = 4x$ или $(x-2)^2 + y^2 = 4$ – окружность радиуса 2 с центром в точке $C(2;\ 0)$ (рис. 14.10).

Наличие в уравнении границы комбинации $x^2 + y^2$ наводит на мысль, что для вычисления двойного интеграла удобно перейти к полярным координатам ρ, φ по формулам $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, $dxdy = \rho d\rho d\varphi$. Уравнение границы $x^2 + y^2 - 4x = 0$ переходит в уравнение $\rho^2\cos^2\varphi + \rho^2\sin^2\varphi - 4\rho\cos\varphi = 0$ или $\rho(\rho - 4\cos\varphi) = 0$. Отсюда $\rho = 0$ (соответствует полюсу O) и $\rho = 4\cos\varphi$ – уравнение окружности. Так как всегда $\rho \ge 0$ (по смыслу ρ), то из $\rho = 4\cos\varphi$ следует $\cos\varphi \ge 0$, отсюда получаем $-\dfrac{\pi}{2} \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2}$ (этот же результат можно усмотреть из рисунка). Итак, в полярных координатах область интегрирования есть $P: \left\{-\dfrac{\pi}{2} \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2};\ 0 \le \rho \le 4\cos\varphi\right\}$. Тогда по формуле (14.9)

$$I=\iint\limits_S (y+2)dxdy=\iint\limits_P (\rho\sin\varphi+2)\rho d\rho d\varphi=\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^{4\cos\varphi} (\rho^2\sin\varphi+2\rho)d\rho=$$

$$=\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi\left(\frac{\rho^3}{3}\sin\varphi+\rho^2\right)\Bigg|_{\rho=0}^{\rho=4\cos\varphi}=\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(\frac{64}{3}\cos^3\varphi\sin\varphi+16\cos^2\varphi\right)d\varphi=$$

$$=-\frac{64}{3}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^3\varphi d\cos\varphi+8\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}(1+\cos 2\varphi)d\varphi=-\frac{16}{3}\cos^4\varphi\Bigg|_{-\pi/2}^{\pi/2}+$$

$$+8\left(\varphi+\frac{1}{2}\sin 2\varphi\right)\Bigg|_{-\pi/2}^{\pi/2}=8\pi\,.\ \#$$

Пример 9. Вычислить $I=\iint\limits_D \frac{y}{x}dxdy$, где $D:\{1\le x^2/a^2+y^2/b^2\le 2;$ $y\ge 0;\ y\le bx/a\}$.

∇ Область D ограничена линиями: $x^2/a^2+y^2/b^2=1-$ эллипс с полуосями a и b, $x^2/2a^2+y^2/2b^2=1-$ эллипс с полуосями $a\sqrt{2}$ и $b\sqrt{2}$, $y=0$ – прямая (ось Ox), $y=bx/a-$ прямая (рис. 14.11).

Анализ границы области указывает на целесообразность перехода к обобщенным полярным координатам по формулам (14.10), (14.11): $x=a\rho\cos\varphi$, $y=b\rho\sin\varphi$, $dxdy=ab\rho d\rho d\varphi$. Уравнения границы области в координатах ρ, φ будут: 1) $x^2/a^2+y^2/b^2=1\Rightarrow\rho=1$; 2) $x^2/2a^2+y^2/2b^2=1\Rightarrow\ \rho=\sqrt{2}$; 3) $y=0\Rightarrow\varphi=0$; 4) $y=bx/a\Rightarrow\varphi=\pi/4$. Итак, область интегрирования в координатах ρ, φ есть

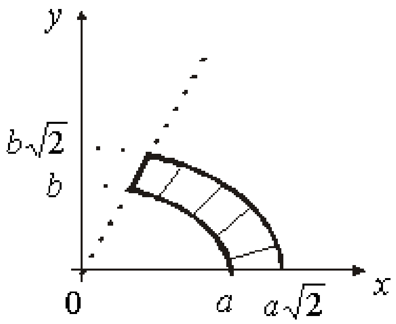


Рис. 14.11

$$P:\left\{0\le\varphi\le\pi/4;\ 1\le\rho\le\sqrt{2}\right\}.$$

Тогда $I=\iint\limits_D\frac{y}{x}dxdy=\iint\limits_P\frac{b\rho\sin\varphi}{a\rho\cos\varphi}ab\rho d\rho d\varphi=$

$$=b^2\int\limits_0^{\pi/4}\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}d\varphi\int\limits_0^{\sqrt{2}}\rho d\rho=-b^2\left[(\ln|\cos\varphi|)\Big|_0^{\pi/4}\right](\rho^2/2)\Big|_1^{\sqrt{2}}=(b^2\ln 2)/4\,.\ \#$$

Задачи для самостоятельного решения

Перейти в двойном интеграле $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ к полярным координатам ρ, φ и расставить пределы интегрирования в порядке: внешнее – по φ, внутреннее – по ρ:

27. D – область, ограниченная окружностями $x^2+y^2=4x$, $x^2+y^2=8x$ и прямыми $y=x$, $y=2x$.

28. D – область, являющаяся общей частью двух кругов $x^2+y^2\le ax$ и $x^2+y^2\le by$.

29. D – меньший из двух сегментов, на которые прямая $x+y=2$ рассекает круг $x^2+y^2\le 4$.

30. D – внутренняя часть правой петли лемнискаты Бернулли $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$.

31. D: $\{x\ge 0,\ y\ge 0,\ (x^2+y^2)^3\le 4a^2x^2y^2\}$.

32. D: $\left\{\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}\le 1\right\}$. *Указание*. Перейти к обобщенным полярным координатам.

33. D – область, ограниченная линией $(x^2+y^2/3)^2=x^2y$. *Указание*. Перейти к обобщенным полярным координатам.

34. $\int\limits_{R/2}^{2R}dy\int\limits_0^{\sqrt{2Ry-y^2}}f(x,y)dx$. **35.** $\int\limits_0^2 dx\int\limits_x^{x\sqrt{3}}f(\sqrt{x^2+y^2})dy$.

36. $\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^{x^2}f(x,y)dy$.

С помощью перехода к полярным координатам вычислить интегралы:

37. $\int\limits_0^R dx\int\limits_0^{\sqrt{R^2-x^2}}\ln(1+x^2+y^2)dy$. **38.** $\iint\limits_{D:\{x^2+y^2\le R^2\}}(h-2x-3y)dxdy$.

39. $\iint\limits_{D:\{x^2+y^2\le Rx\}}\sqrt{R^2-x^2-y^2}dxdy$. **40.** $\iint\limits_D \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}dxdy$, D – часть кольца $x^2+y^2\ge 1$, $x^2+y^2\le 9$, $y\ge x/\sqrt{3}$, $y\ge x\sqrt{3}$.

41. $\iint\limits_D \sin\sqrt{x^2+y^2}dxdy,\ D:\{\pi^2\le x^2+y^2\le 4\pi^2\}$.

Вычислить, перейдя к обобщенным полярным координатам, интегралы:

42. $\iint\limits_D xydxdy,\ D:\left\{\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\le 1,\ x\ge 0,\ y\ge 0\right\}.$

43. $\iint\limits_D \sqrt{xy}dxdy,\ D$ – область, ограниченная линией

$\left(x^2/2+y^2/3\right)^4 = xy\sqrt{6}$.

14.3. ТРОЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

14.3.1. ОБЛАСТИ В ПРОСТРАНСТВЕ

Определение. Область $V\subset R^3$ назовем *правильной в направлении* Oz (*правильной в направлении* Ox, *правильной в направлении* Oy), если прямая, проходящая через внутреннюю точку области V параллельно оси Oz (параллельно оси Ox, параллельно оси Oy), пересекает границу области ровно в двух точках.

Область V будет *правильной в направлении* Oz, если существуют функции $z_1(x,\ y)$ и $z_2(x,\ y)$, заданные в S и такие, что координаты точек, принадлежащих V, удовлетворяют условиям: $(x,\ y)\in S,\ z_1(x,\ y)\le z\le z_2(x,\ y)$. Тогда символически записывают:

$$V:\left\{(x,\ y)\in S,\ z_1(x,\ y)\le z\le z_2(x,\ y)\right\}. \qquad (14.12)$$

Если, в свою очередь, область S – правильная в направлении Oy [см. (14.3)], то

$$V:\left\{a\le x\le b,\ \varphi_1(x)\le y\le \varphi_2(x),\ z_1(x,\ y)\le z\le z_2(x,\ y)\right\}. \qquad (14.13)$$

Если область S правильная в направлении Ox [см. (14.4)], то

$$V:\left\{c\le y\le d,\ \psi_1(y)\le x\le \psi_2(y),\ z_1(x,\ y)\le z\le z_2(x,\ y)\right\}. \qquad (14.14)$$

Задания. 1. Записать символически правильную в направлении Oy область $V\subset R^3$, если ее проекция на плоскость Oxz, в свою очередь, есть правильная область.

2. Записать символически правильную в направлении Ox область $V\subset R^3$, если ее проекция на плоскость Oyz есть правильная область.

Пример 10. Область V ограничена поверхностями $x^2+y^2 = (z-2)^2$ и $z = 0$. Изобразить область и записать как правильную: а) в направлении Oz, б) в направлении Ox.

∇ Область V – круговой конус с боковой поверхностью, описываемой уравнением конической поверхности $x^2+y^2=(z-2)^2$, основанием, лежащим на плоскости $z = 0$, с вершиной в точке $M(0; 0; 2)$ и осью, совпадающей с Oz (рис. 14.12). Область V – правильная во всех направлениях Ox, Oy, Oz. При $z = 0$ из уравнения $x^2+y^2=(z-2)^2$ имеем $x^2+y^2=2^2$ – уравнение окружности радиуса 2; таким образом, в основании конуса круг.

а) Рассмотрим область V как правильную в направлении Oz. Из уравнения $x^2+y^2=(z-2)^2$ имеем $z=2\pm\sqrt{x^2+y^2}$. Для точек области V имеем: $0\le z\le 2-\sqrt{x^2+y^2}$. Проекция области V на плоскость Oxy есть $S:\left\{x^2+y^2\le 4\right\}$ (рис. 14.13), поэтому в силу (14.12) $V:\left\{(x,\ y)\in S;\ 0\le z\le 2-\sqrt{x^2+y^2}\right\}$, где $S:\left\{x^2+y^2\le 4\right\}$. Так как S – правильная область, то [см. (14.3)] $S:\left\{-2\le x\le 2;\ -\sqrt{4-x^2}\le y\le\sqrt{4-x^2}\right\}$ или [см. (14.4)] $S:\left\{-2\le y\le 2;\ -\sqrt{4-y^2}\le x\le\sqrt{4-y^2}\right\}$. Поэтому требуемая запись будет [см. (14.13)] $V:\left\{-2\le x\le 2;\ -\sqrt{4-x^2}\le y\le\sqrt{4-x^2};\ 0\le z\le 2-\sqrt{x^2+y^2}\right\}$ или [см. (14.4)] $V:\left\{-2\le y\le 2;\ -\sqrt{4-y^2}\le x\le\sqrt{4-y^2};\ 0\le z\le 2-\sqrt{x^2+y^2}\right\}$.

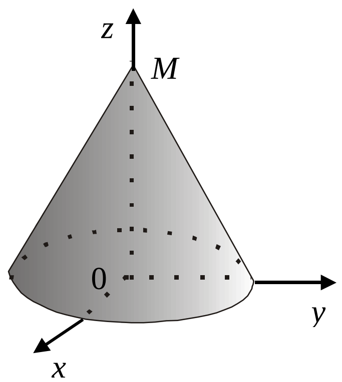


Рис. 14.12

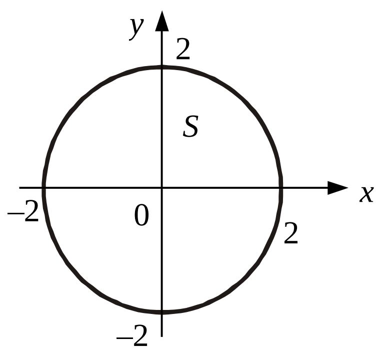


Рис. 14.13

б) Рассматривая область V как правильную в направлении Ox, из уравнения $x^2+y^2=(z-2)^2$ имеем $x=\pm\sqrt{(z-2)^2-y^2}$. Линии пересечения плоскости Oyz и конической поверхности находятся из решения системы уравнений: $x=0,\quad x^2+y^2-(z-2)^2=0$;

в результате имеем $\begin{cases} x = 0, \\ z = \pm y + 2, \end{cases}$ – прямые в плоскости Oyz. Итак, проекцией V на плоскость Oyz является область D – треугольник со сторонами $z = y + 2$, $z = -y + 2$, $z = 0$ (рис. 14.14), поэтому в силу (14.12) $V:\left\{(y,\ z) \in D;\ -\sqrt{(z-2)^2-y^2} \le x \le \sqrt{(z-2)^2-y^2}\right\}$, где $D:\{z \le y+2,\ z \le -y+2,\ z \ge 0\}$.

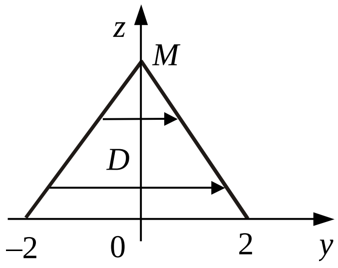


Рис. 14.14

Так как область D – правильная, то, рассматривая ее как правильную в направлении Oy, имеем $D:\{0 \le z \le 2,\ z-2 \le y \le -z+2\}$, а потому

$$V:\begin{cases} 0 \le z \le 2,\ z-2 \le y \le -z+2, \\ -\sqrt{(z-2)^2-y^2} \le x \le \sqrt{(z-2)^2-y^2}. \end{cases} \quad \#$$

Задачи для самостоятельного решения

Изобразить указанные ниже области $V \subset R^3 = \{(x,\ y,\ z)\}$ и записать как правильные: а) в направлении Oz, б) в направлении Ox.

44. Область V ограничена поверхностями $x+2y+3z=6$, $z=0,\ y=0,\ x=0$.

45. Область V ограничена поверхностями $x^2+y^2+(z-R)^2=R^2$.

46. Область V ограничена поверхностями $z=x^2+y^2,\ z=4$.

14.3.2. ВЫЧИСЛЕНИЕ ТРОЙНОГО ИНТЕГРАЛА В ДЕКАРТОВЫХ КООРДИНАТАХ

Пусть правильная в направлении Oz область V ограничена снизу и сверху непересекающимися поверхностями $z=z_1(x,y)$ и $z=z_2(x,y)$, а с боков – цилиндрической поверхностью $F(x, y) = 0$ с образующими, параллельными оси Oz, т.е. $V:\{(x,\ y) \in S;$ $z_1(x,\ y) \le z \le z_2(x,\ y\}$, где S – проекция V на плоскости Oxy.

Теорема 14.4. Пусть: 1) в области $V:\{(x,\ y) \in S;$ $z_1(x,y) \le z \le z_2(x,y)\}$ задана функция $f(x, y,z)$, интегрируемая по Риману, т.е. существует тройной интеграл $\iiint\limits_V f dV$; 2) существует повторный интеграл $\iint\limits_S dS \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f dz$. Тогда справедлива формула

$$\boxed{\iiint\limits_V f(x,\ y,\ z)dV = \iint\limits_S dS \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,\,y,\,z)dz} \qquad (14.15)$$

З а м е ч а н и е. Цилиндрическая поверхность $F(x,y)=0$, ограничивающая *V*, может частично или полностью вырождаться в пространственную линию.

Задания. Записать формулы, связывающие тройной интеграл с повторным, в случаях, когда: 1) область *V* правильная в направлении *Ox* проецируется на плоскость *Oyz*; 2) область *V* правильная в направлении *Oy* проецируется на плоскость *Oxz*.

Пример 11. Вычислить $I=\iiint\limits_V (x+2y+2z)dV$, где область *V* ограничена поверхностями: $y=x^2,\ x=y^2,\ z=y,\ z=0$.

∇ Поверхности $y=x^2$ и $x=y^2$ есть параболические цилиндры с образующими, параллельными *Oz*; $z=y,\ z=0$ – плоскости. Область *V* – правильная в направлении *Oz*, а потому $0\le z\le y$ для точек, принадлежащих *V* (рис. 14.15).

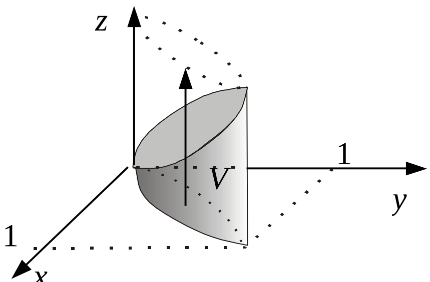


Рис. 14.15

Проекция *V* на плоскость *Oxy* есть правильная область *S*, ограниченная линиями $y=x^2$ и $x=y^2$ (рис. 14.16), а потому, например [см. (14.3)], $S:\{0\le x\le 1;\ x^2\le y\le\sqrt{x}\}$ и в силу (14.13) $V:\{0\le x\le 1,\ x^2\le y\le\sqrt{x},\ 0\le z\le y\}$. Тогда по формуле (14.15)

$$I=\iiint\limits_V (x+2y+2z)dV = \iint\limits_S dxdy\int\limits_0^y (x+2y+2z)dz =$$

$$=\iint\limits_S dxdy(xz+2yz+z^2)\Big|_{z=0}^{z=y} = \Big|\ \text{см. (14.5)}\ \Big| =$$

$$=\int_0^1 dx\int_{x^2}^{\sqrt{x}}(xy+3y^2)dy=\int_0^1 dx(xy^2/2+y^3)\Big|_{y=x^2}^{y=\sqrt{x}}=$$

$$=\int_0^1(x^2/2+x^{3/2}-x^5/2-x^6)dx=$$

$$=(x^3/6+2x^{5/2}/5-x^6/12-x^7/7)\Big|_0^1=143/420.\ \#$$

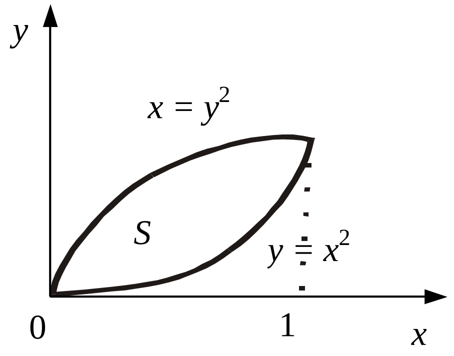


Рис. 14.16

Задачи для самостоятельного решения

Вычислить интегралы.

47. $\int\limits_0^{e-1} dx \int\limits_0^{e-x-1} dy \int\limits_e^{x+y+e} \dfrac{\ln(z-x-y)}{(x-e)(x+y-e)}dz$.

48. $\iiint\limits_\Omega \dfrac{dxdydz}{(x+y+z+1)^3}$, Ω – область, ограниченная плоскостями $x=0,\ y=0,\ z=0,\ x+y+z=1$.

49. $\iiint\limits_V xydxdydz$, V – область, ограниченная гиперболическим параболоидом $z=xy$ и плоскостями $x+y=1,\ z=0\ (z\ge 0)$.

50. $\iiint\limits_V y\cos(z+x)dxdydz$, V – область, ограниченная цилиндром $y=\sqrt{x}$ и плоскостями $y=0,\ z=0$ и $x+z=\pi/2$.

51. $\iiint\limits_V xyzdxdydz$, V – область, ограниченная поверхностями $y=x^2,\ x=y^2,\ z=xy,\ z=0$.

14.3.3. ЗАМЕНА ПЕРЕМЕННЫХ В ТРОЙНОМ ИНТЕГРАЛЕ

Пусть функции $x = x(u, v, w)$, $y = y(u, v, w)$, $z = z(u, v, w)$ осуществляют взаимно однозначное непрерывно дифференцируемое отображение области Ω из пространства *Ouvw* на область V пространства *Oxyz*. Тогда существует обратное непрерывно дифференцируемое отображение $u = u(x, y, z)$, $v = v(x, y, z)$, $w = w(x, y, z)$ области V на область Ω, если якобиан преобразования

$$J(u, v, w) = \begin{vmatrix} x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \\ x'_w & y'_w & z'_w \end{vmatrix} \neq 0 \qquad \forall (u, v, w) \in \Omega .$$

Величины u, v, w можно рассматривать как прямоугольные координаты для точек области Ω и в то же время как *криволинейные координаты* точек области V. Точки пространства *Oxyz* , для которых одна из координат u, v, w сохраняет постоянное значение, образуют координатную поверхность. Всего будет три семейства таких поверхностей.

Теорема 14.5. Пусть $x = x(u, v, w)$, $y = y(u, v, w)$, $z = z(u, v, w)$ есть дифференцируемое преобразование области Ω из пространства *Ouvw* в область V из пространства *Oxyz*. Тогда

$$\boxed{\begin{gathered}\iiint\limits_V f(x, y, z)dxdydz = \\ = \iiint\limits_\Omega f(x(u,v,w),\ y(u,v,w),\ z(u,v,w)) \left| J(u,v,w) \right| dudvdw\end{gathered}} \quad (14.16)$$

З а м е ч а н и е. Последнее равенство сохраняет справедливость, когда условие взаимно однозначного соответствия между областями V и Ω нарушается в отдельных точках или вдоль отдельных линий, или на отдельных поверхностях.

ПЕРЕХОД В ТРОЙНОМ ИНТЕГРАЛЕ К ЦИЛИНДРИЧЕСКИМ КООРДИНАТАМ

Формулы $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, $z = z$ преобразуют цилиндрические координаты ρ, φ, z точки M в декартовы координаты этой точки и переводят область изменения криволинейных координат $\Omega_0 : \{0 \le \rho < \infty,\ 0 \le \varphi < 2\pi,\ -\infty < z < \infty\}$ (или $\Omega_0 : \{0 \le \rho < \infty,$ $-\pi < \varphi \le \pi,\ -\infty < z < \infty\}$) на все пространство *Oxyz*. Геометрически: ρ – радиус-вектор OM точки P – проекции точки M на плоскость *Oxy*; φ – угол между *Ox* и *OP*; z – аппликата точки M (рис. 14.17).

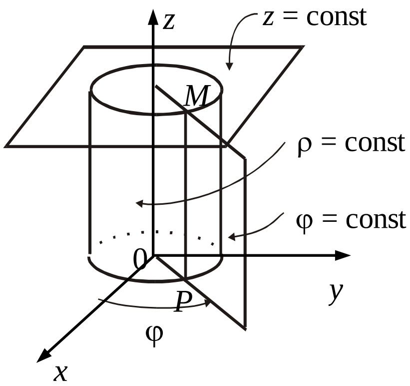


Рис. 14.17

Обратное преобразование задается формулами:

$$\rho=\sqrt{x^2+y^2},\ \ \varphi=\operatorname{arcctg}\frac{x}{y}+\pi\delta(y),$$

$$z=z,\quad \delta(y)=\begin{cases}0 \text{ при } y>0,\\ 1 \text{ при } y<0.\end{cases}$$

Фиксируя в последних формулах ρ,φ,z, получим тройку координатных поверхностей: круговой цилиндр с осью Oz, полуплоскость, исходящую из оси Oz, и плоскость, параллельную плоскости Oxy (рис. 14.17). Якобиан преобразования

$$J(\rho,\varphi,z)=\begin{vmatrix}x'_\rho & y'_\rho & z'_\rho\\ x'_\varphi & y'_\varphi & z'_\varphi\\ x'_z & y'_z & z'_z\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi & 0\\ -\rho\sin\varphi & \rho\cos\varphi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=\rho.$$

При переходе в тройном интеграле к цилиндрическим координатам формула (14.16) примет вид

$$\boxed{\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz=\iiint\limits_\Omega f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi,z)\rho d\rho d\varphi dz}\,,\qquad(14.17)$$

где Ω – область изменения цилиндрических координат точек области V из $Oxyz$.

ПЕРЕХОД К СФЕРИЧЕСКИМ КООРДИНАТАМ

Формулы $x=r\cos\varphi\sin\psi$, $y=r\sin\varphi\sin\psi$, $z=r\cos\psi$ преобразуют сферические координаты r,φ,ψ точки M в декартовы координаты этой точки и переводят область $\Omega_0:\{0\le r<\infty,\ \ 0\le\varphi<2\pi,\ \ 0\le\psi\le\pi\}$ (или $\Omega_0:\{0\le r<\infty,\ \ -\pi<\varphi\le\pi,\ \ 0\le\psi\le\pi\}$) изменения сферических координат на все пространство $Oxyz$. Геометрически: r – радиус-вектор OM точки M; φ – угол между осью Ox и проекцией радиуса-вектора r на плоскость Oxy; ψ – угол между осью Oz и радиусом-вектором r, отсчитываемый по ходу стрелки часов (рис. 14.18). Обратное преобразование имеет вид

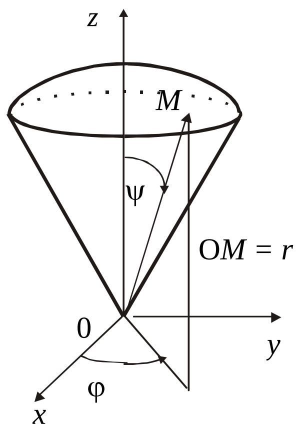


Рис. 14.18

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,, \quad \varphi = \operatorname{arcctg}\frac{x}{y} + \pi\delta(y)\,,$$

$$\psi = \arccos\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\,, \quad \delta(y) = \begin{cases} 0 \text{ при } y > 0, \\ 1 \text{ при } y < 0. \end{cases}$$

Фиксируя в последних формулах r, φ, ψ, получим тройку координатных поверхностей: сферу, полуплоскость, полуконус соответственно (рис. 14.18). Якобиан преобразования

$$J(r,\varphi,\psi) = \begin{vmatrix} x'_r & y'_r & z'_r \\ x'_\varphi & y'_\varphi & z'_\varphi \\ x'_\psi & y'_\psi & z'_\psi \end{vmatrix} = -r^2 \sin\psi\,.$$

При переходе в тройном интеграле к сферическим координатам справедлива формула

$$\boxed{\begin{gathered}\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \\ = \iiint\limits_\Omega f(r\cos\varphi\sin\psi,\ r\sin\varphi\sin\psi,\ r\cos\psi)r^2\sin\psi dr d\varphi d\psi\end{gathered}}\,, \qquad (14.18)$$

где Ω – область изменения сферических координат точек области V из $Oxyz$.

Пример 12. Вычислить тройной интеграл $I = \iiint\limits_V z dxdydz$, где $V: \{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \le R;\ z \ge \sqrt{x^2 + y^2}\}$.

∇ Область V ограничена полусферой $z = \sqrt{R^2 - (x^2 + y^2)}$ и полуконусом $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ (рис. 14.18). Для удобства вычисления тройного интеграла перейдем к сферическим координатам по формулам: $x = r\cos\varphi\sin\psi$, $y = r\sin\varphi\sin\psi$, $z = r\cos\psi$, при этом $dxdydz = r^2\sin\psi dr d\varphi d\psi$. Неравенства, описывающие V, преобразуются: а) $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \le R \Rightarrow r^2 \le R^2 \Rightarrow 0 \le r \le R$;

б) $z \ge \sqrt{x^2 + y^2} \Rightarrow r\cos\psi \ge r\sin\psi \Rightarrow \operatorname{tg}\psi \le 1 \Rightarrow 0 \le \psi \le \pi/4$.

Так как нет ограничений на φ, то $0 \le \varphi \le 2\pi$. В итоге область интегрирования в сферических координатах есть $\Omega: \left\{ 0 \le \varphi \le 2\pi;\ 0 \le \psi \le \frac{\pi}{4};\ 0 \le r \le R \right\}$ (этот же результат можно было усмотреть из чертежа). Тогда по формуле (14.18) $I = \iiint\limits_V z dxdydz =$

$$= \iiint\limits_{\Omega} r\cos\psi r^2 \sin\psi dr d\varphi d\psi = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi/4} \cos\psi \sin\psi d\psi \int\limits_0^R r^3 dr =$$ (повторный интеграл «расщепился» в произведение определенных интегралов) =

$$= \left(\varphi\Big|_0^{2\pi}\right)\left(\frac{\sin^2\psi}{2}\Bigg|_0^{\pi/4}\right)\left(\frac{r^4}{4}\Bigg|_0^{R}\right) = \frac{\pi R^4}{8}.\ \#$$

Пример 13. Вычислить тройной интеграл $I = \iiint\limits_V z(x^2+y^2)dxdydz$, где V ограничена полусферой $z = -\sqrt{R^2-x^2-y^2}$, цилиндром $x^2+y^2=R^2$ и плоскостью $z=a$ $(a>0)$.

∇ Тело V и проекция его на плоскость Oxy $S:\left\{x^2+y^2 \le R^2\right\}$ – круг радиуса R изображены на рис. 14.19 и 14.20. Для вычисления I перейдем к цилиндрическим координатам ρ, φ, z по формулам $x=\rho\cos\varphi,\ y=\rho\sin\varphi,\ z=z,\ dxdydz=\rho d\varphi d\rho dz$. Поверхности, ограничивающие V, преобразуются: а) $z=-\sqrt{R^2-x^2-y^2} \Rightarrow z=-\sqrt{R^2-\rho^2}$; б) $x^2+y^2=R^2 \Rightarrow \rho=R$; в) $z = a$. Так как нет ограничений на координату φ, то $0 \le \varphi \le 2\pi$ (или $-\pi \le \varphi \le \pi$). Область интегрирования в цилиндрических координатах есть $\Omega:\left\{0\le\varphi\le 2\pi,\ 0\le\rho\le R,\ -\sqrt{R^2-\rho^2}\le z\le a\right\}$.

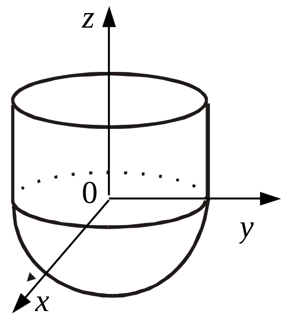


Рис. 14.19

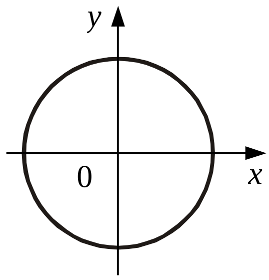


Рис. 14.20

Тогда по формуле (14.17)

$$I = \iiint\limits_V z(x^2+y^2)dxdydz = \iiint\limits_{\Omega} z\rho^3 d\rho d\varphi dz =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^R \rho^3 d\rho \int\limits_{-\sqrt{R^2-\rho^2}}^{a} zdz = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^R \rho^3 d\rho \left(\frac{z^2}{2}\Bigg|_{-\sqrt{R^2-\rho^2}}^{a}\right) =$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \left[(a^2-R^2)\rho^3+\rho^5\right]d\rho=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\varphi\Big|_0^{2\pi}\right)\left[(a^2-R^2)\rho^4/4+\rho^6/6\right]\Big|_0^R=\pi R^4(3a^2-R^2)/12.\ \#$$

Задачи для самостоятельного решения

Перейти в тройном интеграле $\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz$ к цилиндрическим координатам ρ,φ,z или сферическим координатам r,φ,ψ и расставить пределы интегрирования.

52. V – область, находящаяся в первом октанте и ограниченная поверхностями $x^2+y^2=R^2,\ z=0,\ z=1,\ y=x,\ y=x\sqrt{3}$.

53. V – область, ограниченная поверхностями $x^2+y^2=2x,$ $z=0,\ z=x^2+y^2$.

54. $V:\left\{x^2+y^2+z^2\le R^2;\ x\ge 0;\ y\ge 0;\ z\ge 0\right\}$.

55. $V:\left\{x^2+y^2+z^2\le R^2;\ x^2+y^2+(z-R^2)\le R^2\right\}$.

Перейдя к цилиндрическим или сферическим координатам, вычислить интегралы.

56. $\int\limits_0^2 dx \int\limits_0^{\sqrt{2x-x^2}} dy \int\limits_0^a z\sqrt{x^2+y^2}dz$. **57.** $\int\limits_{-R}^{R} dx \int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} dy \int\limits_0^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} (x^2+y^2)dz$.

58. $\int\limits_0^{a/\sqrt{2}} dy \int\limits_y^{\sqrt{a^2-y^2}} dx \int\limits_0^{(x^2-y^2)/a} \sqrt{x^2+y^2}dz$. **59.** $\int\limits_{-a}^{a} dx \int\limits_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} dy \int\limits_{h(x^2+y^2)/a}^{a} \frac{dz}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

60. $\iiint\limits_V (x^2+y^2)dxdydz$, где $V:\{z\ge 0,\ R_1^2\le x^2+y^2+z^2\le R_2^2\}$.

61. $\iiint\limits_V \frac{dxdydz}{\sqrt{x^2+y^2+(z-2)^2}}$, где $V:\{x^2+y^2\le 1;\ -1\le z<1\}$.

62. $\iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}dxdydz$, где область V ограничена поверхностью $x^2+y^2+z^2=z$.

14.4. НЕКОТОРЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ДВОЙНЫХ И ТРОЙНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

1. *Площадь фигуры.* а) Для плоской фигуры $S \subset Oxy$

$$s = \iint_S dS = \iint_S dxdy. \tag{14.19}$$

б) Площадь части искривленной поверхности рассматривается в разделе 14.6 этой главы.

2. *Объем тела V*: $\{(x,y) \in S_{xy};\ f_1(x,y) \le z \le f_2(x,y)\}$ (S_{xy} – проекция V на плоскость Oxy):

$$v = \iint_{S_{xy}} [\, f_2(x,\, y) - f_1(x,\, y)\,]\, dxdy \tag{14.20}$$

или

$$v = \iiint_V dV = \iiint_V dxdydz\ . \tag{14.21}$$

3. *Масса.* а) Если $\gamma = \gamma(x,\, y)$ – поверхностная плотность массы плоской фигуры $S \subset Oxy$, то

$$m = \iint_S \gamma(x,\, y) dS\ . \tag{14.22}$$

б) если $\gamma = \gamma(x,\, y,\, z)$ – объемная плотность массы тела $V \subset Oxyz$, то

$$m = \iiint_V \gamma(x,\, y,\, z) dV\ . \tag{14.23}$$

Для однородных фигур и тел плотность γ примем равной единице.

4. *Статические моменты и координаты центра тяжести.* а) Для плоской фигуры $S \subset Oxy$ с плотностью $\gamma = \gamma(x, y)$ и массой m статические моменты относительно координатных осей Oy и Ox соответственно:

$$M_y = \iint_S x\gamma dS\,, \qquad M_x = \iint_S y\gamma dS\,;$$

координаты центра тяжести:

$$x_c = M_y / m\,, \qquad y_c = M_x / m\,.$$

б) Для тела V с плотностью $\gamma = \gamma(x, y, z)$ и массой m статические моменты относительно координатных плоскостей Oyz, Oxz, Oxy:

$$M_{yz} = \iiint_V x\gamma dV\,, \qquad M_{xz} = \iiint_V y\gamma dV\,, \qquad M_{xy} = \iiint_V z\gamma dV\,;$$

координаты центра тяжести:

$$x_c = M_{yz} / m\,,\ \ y_c = M_{xz} / m\,,\ \ z_c = M_{xy} / m\,.$$

Пример 14. Найти массу пластинки $D:\{1 \le x^2/9 + y^2/4 \le 2;$ $y \ge 0,\ y \le 2x/3\}$ с поверхностной плотностью $\gamma = y/x$.

∇ По формуле (14.22) $m = \iint\limits_D \gamma(x,\, y)dxdy = \iint\limits_D (y\,/\,x)dxdy$.

Область D и подынтегральная функция совпадают с областью интегрирования и функцией из примера 9 в разд. 14.2.4 при $a = 3,\ b = 2$; там же вычислен этот двойной интеграл, поэтому $m = (b^2 \ln 2)/4$ и при $b = 2$ $m = \ln 2$. #

Пример 15. Найти массу тела. $V:\left\{\sqrt{x^2+y^2+z^2} \le R;\ z \ge \sqrt{x^2+y^2}\right\}$, если объемная плотность $\gamma = az$ $(a > 0)$.

∇ По формуле (14.23) $m = \iiint\limits_V \gamma(x,\, y,\, z)dV = a\iiint\limits_V zdxdydz = aI$.

Тройной интеграл I по данной области V вычислен в примере 12 из разд. 14.3.3, $I = \pi R^4/8$, и потому $m = a\pi R^4/8$.#

Пример 16. Найти объем тела $V:\left\{r_1^2 \le x^2+y^2+z^2 \le r_2^2;\right.$ $\left.-\sqrt{(x^2+y^2)/a^2} \le z \le \sqrt{(x^2+y^2)/b^2};\ -k_1x \le y \le k_2x\right\}$, $(a,\, b,\, k_1,\, k_2 > 0)$.

∇ Из формулы (14.21) $v = \iiint\limits_V dxdydz$. Тело V ограничено сферами, полуконусами и плоскостями (рис. 14.21).

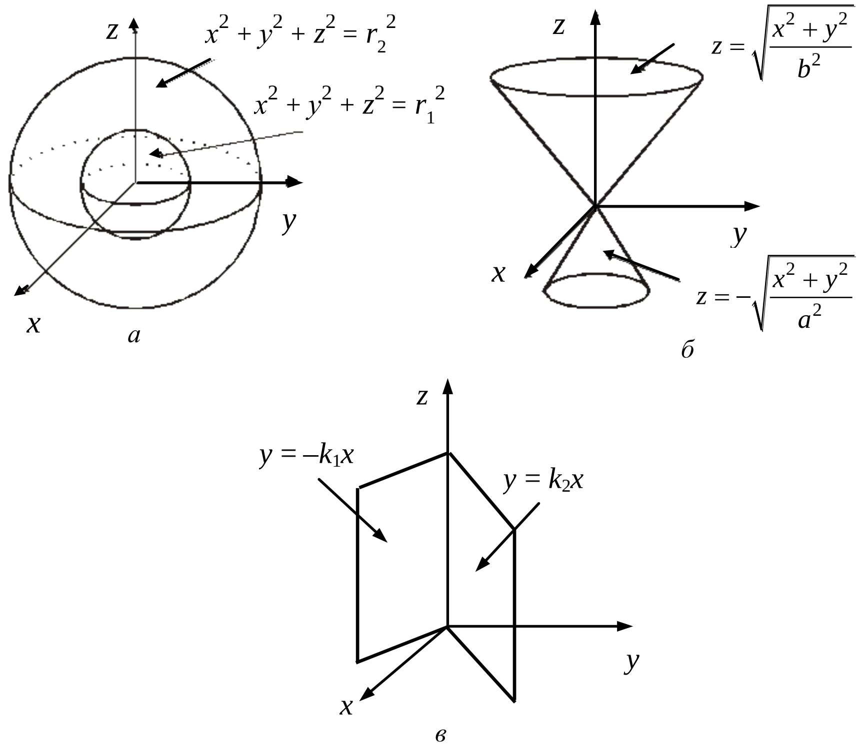


Рис. 14.21

Из анализа уравнений и вида поверхностей следует целесообразность перехода к сферическим координатам r, φ, ψ по формулам: $x = r\cos\varphi\sin\psi$, $y = r\sin\varphi\sin\psi$, $z = r\cos\psi$. Поверхности, ограничивающие V, преобразуются:

1) $x^2 + y^2 + z^2 = r_1^2 \Rightarrow r = r_1$;

2) $x^2 + y^2 + z^2 = r_2^2 \Rightarrow r = r_2$;

3) $z = -\sqrt{(x^2 + y^2)a^2} \Rightarrow \operatorname{tg}\psi = -a$ или $\psi = \pi - \operatorname{arctg} a$;

4) $z = \sqrt{(x^2 + y^2)b^2} \Rightarrow \operatorname{tg}\psi = b,\ \psi = \operatorname{arctg} b$;

5) $y = -k_1 x \Rightarrow \varphi = -\operatorname{arctg} k_1$; 6) $y = k_2 x \Rightarrow \varphi = \operatorname{arctg} k_2$.

Область изменения сферических координат точек области V есть $\Omega : \{r_1 \le r \le r_2;\ -\operatorname{arctg} k_1 \le \varphi \le \operatorname{arctg} k_2;\ \operatorname{arctg} b \le \psi \le \pi - \operatorname{arctg} a\}$.

Тогда в силу формулы (14.18) $v = \iiint\limits_V dxdydz = \iiint\limits_\Omega r^2 \sin\psi dr d\varphi d\psi$ =

$$= \left(\int\limits_{-\operatorname{arctg} k_1}^{\operatorname{arctg} k_2} d\varphi \right) \left(\int\limits_{r_1}^{r_2} r^2 dr \right) \left(\int\limits_{\operatorname{arctg} b}^{\pi - \operatorname{arctg} a} \sin\psi\, d\psi \right) =$$

$$= \frac{1}{3}(r_2^3 - r_1^3)(\operatorname{arctg} k_2 + \operatorname{arctg} k_1)(\cos(\operatorname{arctg} a) + \cos(\operatorname{arctg} b)).\ \#$$

Задачи для самостоятельного решения

Вычислить объемы тел, ограниченных заданными поверхностями.

63. $z = x^2 + y^2 + 1,\ x = 4,\ y = 4,\ z = 0$.

64. $y = \sqrt{x},\ y = 2\sqrt{x},\ z = 0,\ x + z = 6$.

65. $z = 9 - y^2,\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0,\ 3x + 4y = 12\ \ (y \ge 0)$.

66. $2y^2 = x,\ x/4 + y/2 + z/4 = 1,\ z = 0$.

67. $x^2/4 + y^2 = 1,\ z = 12 - 3x - 4y,\ z = 1$.

68. $z = x^2 - y^2$ – гиперболический параболоид, $z = 0,\ x = 3$.

69. $z = (x-1)^2 + y^2,\ z + 2x = 2$. **70.** $z = x^2 + y^2,\ z = x + y$.

71. $x^2 + y^2 + z^2 = 4,\ x^2 + y^2 = 3z$. **72.** $x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ x^2 + y^2 + z^2 = 16,$ $x^2 + y^2 = z^2,\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0\ \ (x \ge 0, y \ge 0, z \ge 0)$.

73. Найти массу квадратной пластинки со стороной a , если плотность пластинки в каждой точке пропорциональна расстоянию этой точки от одной из вершин и равна γ_0 в центре квадрата.

Найти координаты центра тяжести однородных пластинок, ограниченных кривыми:

74. $ay = x^2,\ x + y = 2a\ \ (a > 0)$. **75.** $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a},\ y = 0,\ x = 0$.

76. $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2xy\ \ (x > 0, y > 0)$. **77.** $\rho = a(1 + \cos\varphi)$ – кардиоида, $\varphi = 0$.

Найти координаты центра тяжести однородных тел, ограниченных поверхностями/

78. $x = 0,\ y = 0,\ z = 0,\ x = 2,\ y = 4,\ x + y + z = 8$ (усеченный параллелепипед).

79. $z = y^2 / 2, y = 0,\ z = 0,\ 2x + 3y - 12 = 0$.

80. $z = (x^2 + y^2) / 2a,\ x^2 + y^2 + z^2 = 3a^2\ \ (z \geq 0)$.

14.5. КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

14.5.1. КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ ПЕРВОГО РОДА (КИ-1)

Пусть: 1) в точках простой (без точек самопересечения), спрямляемой (т.е. имеющей длину) кривой l из пространства $R^3 = \{(x, y, z)\}$ определена ограниченная скалярная функция $f(x, y, z)$; 2) $\{l_1, l_2, ..., l_n\}$– произвольное разбиение кривой l на элементарные дуги l_i с длинами Δl_i; 3) $M_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \in l_i\ \ (i = 1, 2, ..., n)$– произвольный набор точек; 4) $I_n = \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\ \Delta l_i$– интегральная сумма, соответствующая данному разбиению кривой l и выбору точек M_i.

Определение. Конечный предел интегральной суммы I_n при $\lambda \to \infty\ \ (\lambda = \sup\{\Delta l_i\})$, не зависящий ни от способа разбиения кривой l, ни от выбора точек M_i, называется *криволинейным интегралом первого рода* от функции $f(x, y, z)$ по кривой l:

$$\lim_{n\to\infty} I_n = \int\limits_l f(x, y, z)dl .$$

ВЫЧИСЛЕНИЕ КИ-1

Теорема 14.6. Если кривая l задана *параметрическими уравнениями:* $x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t),\ t_1 \le t \le t_2$, где $x(t), y(t), z(t)$ – непрерывно дифференцируемые по t функции и возрастание длины L дуги кривой соответствует возрастанию t, то в предположении существования определенного интеграла имеет место равенство

$$\boxed{\int_l f(x,y,z)dl = \int_{t_1}^{t_2} f(x(t),y(t),z(t))\sqrt{x_t'^2 + y_t'^2 + z_t'^2}\,dt}\,. \qquad (14.24)$$

Следствия. а) Если плоская кривая l задана *явно*: $y = y(x),\ a \le x \le b,$ и $f = f(x,\ y)$, то

$$\boxed{\int_l f(x,\ y)dl = \int_a^b f(x,\ y(x))\sqrt{1 + y'^2(x)}dx}\,. \qquad (14.25)$$

б) Если плоская кривая l задана в *полярных координатах*: $\rho = \rho(\varphi),\ \varphi_1 \le \varphi \le \varphi_2$, то

$$\boxed{\int_l f(x,\ y)dl = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} f(\rho(\varphi)\cos\varphi,\ \rho(\varphi)\sin\varphi)\sqrt{\rho^2 + \rho_\varphi'^2}\,d\varphi}\,. \qquad (14.26)$$

НЕКОТОРЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ КИ-1

1. *Масса материальной линии.* Пусть $\gamma = \gamma(x,\ y,\ z)$, $(x,\ y,\ z) \in l$ – линейная плотность массы материальной линии l. Тогда масса этой линии есть

$$m = \int_l \gamma(x,y,z)dl\,. \qquad (14.27)$$

2. *Длина* пространственной (или плоской) кривой l есть L:

$$L = \int_l dl\,.$$

3. *Статические моменты и координаты центра тяжести.*

а) Для *плоской* линии $l \subset Oxy$ с плотностью $\gamma = \gamma(x,\ y)$ и массой m статические моменты относительно координатных осей Oy и Ox:

$$M_y = \int_l x\gamma dl\,, \qquad M_x = \int_l y\gamma dl\,;$$

координаты центра тяжести:

$$x_c = M_y / m\,, \qquad y_c = M_x / m\,.$$

б) Для *пространственной* линии l с плотностью $\gamma = \gamma(x, y, z)$ и массой m статические моменты относительно плоскостей Oyz, Oxz и Oxy:

$$M_{yz} = \int_l x\gamma dl, \qquad M_{xz} = \int_l y\gamma dl, \qquad M_{xy} = \int_l z\gamma dl;$$

координаты центра тяжести:

$$x_c = M_{yz}/m, \qquad y_c = M_{xz}/m, \qquad z_c = M_{xy}/m.$$

Пример 17. Вычислить КИ-1 $I = \int_l (x^2 - 2y^2)dl$, где l – прямолинейный отрезок, соединяющий точки $A(0;\,2)$ и $B(3;\,4)$.

∇ Уравнения отрезка прямой AB в параметрической форме:
$\dfrac{x - x_A}{x_B - x_A} = \dfrac{y - y_A}{y_B - y_A} = t$, $\quad \dfrac{x}{3} = \dfrac{y-2}{2} = t$ или $x = 3t,\ y = 2t + 2,\ 0 \le t \le 1$.

Тогда $dl = \sqrt{x_t'^2 + y_t'^2}dt = \sqrt{13}dt$ и из (14.24) имеем $I = \int_{AB} (x^2 - 2y^2)dl =$

$$= \int_0^1 \left[(3t)^2 - 2(2t+2)^2\right]\sqrt{13}dt = \sqrt{13}\int_0^1 (t^2 - 16t - 8)dt =$$

$$= \sqrt{13}\,(t^3/3 - 8t^2 - 8t)\Big|_0^1 = -47\sqrt{13}/3.$$

З а м е ч а н и е. В случае явного задания отрезка прямой $AB: y = 2x/3 + 2,\ 0 \le x \le 3$ следует воспользоваться формулой (14.25). #

Пример 18. Вычислить КИ-1 $I = \int_l \sqrt{x^2 + y^2}dl$, где l – кривая, заданная уравнением $x^2 + y^2 = 2y$ при условии $x \le 0$.

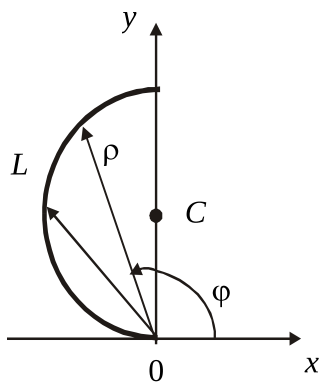


Рис. 14.22

∇ Для построения кривой l преобразуем уравнение ее к виду $x^2 + (y-1)^2 = 1$; таким образом, l есть полуокружность с центром в точке $C(0;\,1)$ радиуса 1, расположенная слева от оси Oy (рис. 14.22).

Наличие комбинации $x^2 + y^2$ в подынтегральной функции и в уравнении l наводит на мысль провести вычисления в полярных координатах, которые связаны с декартовыми координатами формулами

$$x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi.$$

Тогда из $x^2+y^2=2y$ получаем $\rho=2\sin\varphi$ – уравнение l в полярных координатах; из рис. 14.22 (или условий $x\le 0$, $y\ge 0$, $\rho\ge 0$) следует $\pi/2\le\varphi\le\pi$;

$$\sqrt{x^2+y^2}=\rho=2\sin\varphi;$$

$$dl=\sqrt{\rho^2+\rho_\varphi'^2}\,d\varphi=\sqrt{4\sin^2\varphi+4\cos^2\varphi}\,d\varphi=$$

$= 2d\varphi$, и из (14.26) $I=\int\limits_{(L)}\sqrt{x^2+y^2}\,dl=$

$$=4\int\limits_{\pi/2}^{\pi}\sin\varphi d\varphi=-4\cos\varphi\Big|_{-\pi/2}^{\pi}=4.\ \#$$

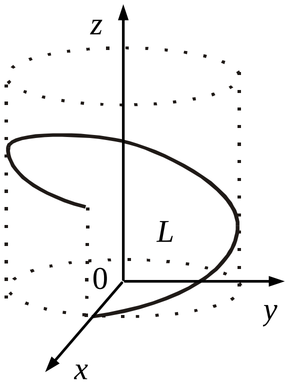


Рис. 14.23

Пример 19. Найти массу одного витка материальной винтовой линии $L: x=R\cos t$, $y=R\sin t$, $z=at$ (рис. 14.23), если линейная плотность в точке обратно пропорциональна квадрату расстояния этой точки от начала координат.

∇ По условию задачи плотность $\gamma=k(x^2+y^2+z^2)^{-1}=$ $=k(R^2\cos^2 t+R^2\sin^2 t+a^2t^2)^{-1}=k(R^2+a^2t^2)^{-1}$, где k – коэффициент пропорциональности, $k>0$. Для одного витка $0\le t\le 2\pi$. Из формул (14.27) и (14.24) имеем:

$$m=\int\limits_L\gamma(x,y,z)dl=\Big|dl=\sqrt{x_t'^2+y_t'^2+z_t'^2}\,dt=$$

$$=\sqrt{R^2\sin^2 t+R^2\cos^2 t+a^2}\,dt=\sqrt{R^2+a^2}\,dt\Big|=$$

$$=k\sqrt{R^2+a^2}\int\limits_0^{2\pi}\frac{dt}{R^2+a^2t^2}=\frac{k\sqrt{R^2+a^2}}{Ra}\operatorname{arctg}\frac{at}{R}\Bigg|_0^{2\pi}=$$

$$=(k\sqrt{R^2+a^2}/Ra)\operatorname{arctg}(2\pi a/R).\ \#$$

Задачи для самостоятельного решения

Вычислить криволинейные интегралы первого рода.

81. $\int\limits_l\dfrac{dl}{x-y}$, где l – отрезок прямой $y=x/2-2$, заключенный между точками $A(0;\,-2)$ и $B(4;\,0)$.

82. $\int\limits_l xydl$, где l – контур прямоугольника с вершинами: $A(0;\,0)$, $B(4;\,0)$, $C(4;\,2)$, $D(0;\,2)$.

83. $\int\limits_l y\,dl$, где l – дуга параболы $y^2 = 2px$, отсеченная параболой $x^2 = 2py$.

84. $\int\limits_l \sqrt{2y}\,dl$, где l – первая арка циклоиды $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$.

85. $\int\limits_l x\sqrt{x^2 - y^2}\,dl$, где l – половина лемнискаты $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$ $(x \geq 0)$.

86. $\int\limits_l \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}\,dl$, где l – часть спирали Архимеда $\rho = 2\varphi$, заключенная внутри круга радиуса R с центром в точке $O(0;0)$.

87. $\int\limits_l (2z - \sqrt{x^2 + y^2})\,dl$, где l – первый виток конической винтовой линии $x = t\cos t$, $y = t\sin t$, $z = t$.

88. $\int\limits_l (x + y)\,dl$, где l – четверть окружности $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $x = y$, лежащая в первом октанте.

89. $\int\limits_l xy\,dl$, где l – дуга гиперболы $x = a\operatorname{ch} t$, $y = a\operatorname{sh} t$ $(0 \leq t \leq t_0)$.

90. $\int\limits_l (x^{4/3} + y^{4/3})\,dl$, где l – дуга астроиды $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ в первом квадранте.

91. Найти массу первого витка винтовой линии $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = bt$, плотность которой в каждой точке равна квадрату полярного радиуса этой точки.

92. Найти массу линии $x = e^t\cos t$, $y = e^t\sin t$, $z = e^t$, от точки, соответствующей t = 0, до произвольной точки, если плотность в каждой точке обратно пропорциональна квадрату полярного радиуса и в точке $(1;\,0;\,1)$ равна единице.

93. Найти массу дуги параболы $y^2 = 2px$ $(0 \leq x \leq p/2)$, если линейная плотность в текущей точке равна $|y|$.

Вычислить координаты центра тяжести дуги однородной кривой.

94. $y = a\operatorname{ch}(x/a)$, от точки $A(0;a)$ до точки $B(b;\,h)$.

95. $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ $(0 \leq t \leq \pi)$.

96. $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = bt$ $(0 \leq t \leq \pi)$.

14.5.2. КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ ВТОРОГО РОДА (КИ-2)

Пусть: 1) в точках непрерывной кривой *AB* из пространства $R^3 = \{(x, y, z)\}$ определены ограниченные скалярные функции $P(x, y, z),\ Q(x, y, z),\ R(x, y, z)$; 2) $\{l_1, l_2, ..., l_n\}$ – произвольное разбиение кривой *AB* на элементарные дуги l_i с длинами Δl_i и проекциями $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $\Delta y_i = y_i - y_{i-1}$, $\Delta z_i = z_i - z_{i-1}$ на соответствующие оси координат; 3) $M_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \in l_i$ $(i = 1, 2, ..., n)$ – произвольный набор точек; 4) $I_n = \sum\limits_{i=1}^{n} P(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta x_i + Q(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta y_i + $ $+ R(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta z_i$ – интегральная сумма, соответствующая данному разбиению и данному выбору точек.

Определение. Конечный предел интегральной суммы I_n при $\lambda \to \infty$ $\left(\lambda = \sup\{\Delta l_i\}\right)$, не зависящий ни от способа разбиения *AB*, ни от выбора точек M_i, называется *криволинейным интегралом второго рода* от функций P, Q, R по пути *AB*:

$$\lim_{\lambda \to 0} I_n = \int\limits_{AB} P(x, y, z)dx + \quad + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz .$$

Механически КИ-2 представляет собой *работу переменной силы* $\vec{F} = \{P, Q, R\}$, точка приложения которой описывает кривую *AB*.

ВЫЧИСЛЕНИЕ КИ-2

Теорема 14.7. Если линия *AB* задана в параметрической форме: $x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t),\ t_1 \le t \le t_2$, где $x(t), y(t), z(t)$ – непрерывно дифференцируемые функции, и при изменении параметра t от t_1 к t_2 кривая описывается именно от точки A к точке B, то

$$\boxed{\begin{aligned}&\int\limits_{AB} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz = \\ &= \int\limits_{t_1}^{t_2} [P(x(t), y(t), z(t))x'_t + Q(x(t), y(t), z(t))y'_t + \\ &+ R(x(t), y(t), z(t))z'_t]\, dt\end{aligned}}\ , \qquad (14.28)$$

причем КИ-2 существует, если существует определенный интеграл.

Следствия. а) Для плоской линии *AB*: $x = x(t),\ y = y(t),\ t_1 \le t \le t_2$ и функций $P(x, y), Q(x, y),\ (x, y) \in AB$:

$$\int_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_{t_1}^{t_2} \left[P(x(t), y(t))x'_t + Q(x(t), y(t))y'_t \right] dt .$$

б) Для заданной явно плоской линии $AB: y = y(x),\ a \le x \le b$

$$\int_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_a^b [P(x, y(x)) + Q(x, y(x))y'_x] dx . \quad (14.29)$$

НЕЗАВИСИМОСТЬ КИ-2 ОТ ПУТИ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

Теорема 14.8. Если функции $P(x, y, z),\ Q(x, y, z),\ R(x, y, z)$ непрерывны вместе со своими частными производными первого порядка в некоторой замкнутой ограниченной поверхностно односвязной области *V*, то равносильны следующие четыре утверждения:

1) $\oint_l Pdx + Qdy + Rdz = 0$, где l – замкнутый контур, лежащий внутри *V*;

2) $\int_l Pdx + Qdy + Rdz$ не зависит от выбора пути интегрирования;

3) $Pdx + qdy + Rdz$ есть полный дифференциал некоторой однозначной функции $\varphi(x, y, z)$, заданной в точках *V*;

4) выполняются равенства: $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$, $\dfrac{\partial P}{\partial z} = \dfrac{\partial R}{\partial x}$, $\dfrac{\partial R}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial z}$.

Функция $\varphi(x, y, z)$ может быть найдена, например, по формуле

$$\varphi(x,y,z) = \int_{(x_0,y_0,z_0)}^{(x,y,z)} d\varphi(x,y,z) = \int_{x_0}^{x} P(x,y,z)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_0,y,z)dy + \int_{z_0}^{z} R(x_0,y_0,z)dz + c , \quad (14.30)$$

где $(x_0,\ y_0,\ z_0)$ – некоторая фиксированная точка области *V*, c – произвольная постоянная.

СВЯЗЬ МЕЖДУ КИ-1 И КИ-2

Пусть спрямляемая (не имеющая особых точек) линия *AB* имеет в каждой точке касательную, положительное направление которой составляет с осями координат углы $\alpha,\ \beta,\ \gamma$. Тогда

$$\int_{AB} Pdx + Qdy + Rdz = \int_{AB} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)dl .$$

СВЯЗЬ КИ-2 С ДВОЙНЫМ ИНТЕГРАЛОМ (ФОРМУЛА ГРИНА)

Теорема 14.9. Пусть: 1) функции $P(x, y)$, $Q(x, y)$ непрерывны и имеют непрерывные частные производные в открытой односвязной области $G \subset Oxy$; 2) l – кусочно-гладкий контур, ограничивающий область $S \subset G$, и при положительном обходе l ближайшая часть области S находится слева от наблюдателя. Тогда справедлива формула

$$\oint_l Pdx + Qdy = \iint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy .$$

Площадь плоской области. Площадь s фигуры S, ограниченной простым кусочно-гладким контуром l, равна

$$s = \oint_l xdy = -\oint_l ydx = \frac{1}{2} \oint_l xdy - ydx .$$

Пример 20. Вычислить КИ-2 $I = \int_l ydx - (y + x^2)dy$, где L – дуга параболы $y = 2x - x^2$, проходимая от точки $A(2;\,0)$ до точки $O(0;\,0)$.

∇ Кривая l представлена на рис. 14.24. По формуле (14.29) имеем $I = \int_l ydx - (y + x^2)dy = \int_{x_A=2}^{x_O=0} (2x - x^2)dx - (2x - x^2 + x^2)(2 - 2x)dx =$
$= (-x^2 + x^3)\Big|_2^0 = -4$. #

Пример 21. Вычислить КИ-2 $I = \int_l ydx - xdy + zdz$, где l – замкнутый контур, полученный пересечением сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ и цилиндра $x^2 + y^2 = Ry$ $(R > 0,\ z \ge 0)$, обходимый против часовой стрелки, если смотреть из начала координат (рис. 14.25).

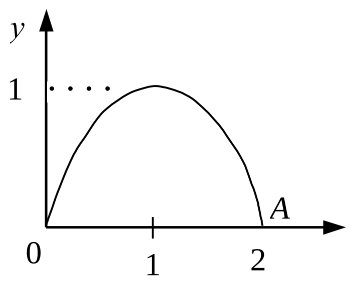


Рис. 14.24

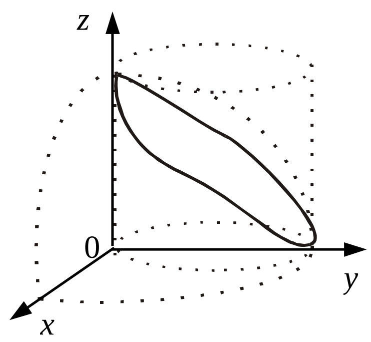


Рис. 14.25

∇ Для вычисления КИ-2 представим l в параметрической форме. Поверхность $x^2+y^2=Ry$ запишем в виде $x^2+(y-R/2)^2=$ $=(R/2)^2$. Последнее равенство выполнится тождественно, если положить, например, $x=(R/2)\sin t$, $y=(R/2)(1+\cos t)$, $0\le t\le 2\pi$. Тогда из уравнения сферы имеем $z^2=R^2-x^2-y^2=$ $=R^2-(R^2/4)\sin^2 t-(R^2/4)(1+\cos t)^2=(R^2/2)(1-\cos t)=R^2\sin^2(t/2)$. Отсюда, помня, что $z\ge 0$, $0\le t\le 2\pi$, имеем $z=R\sin(t/2)$. Итак, $l: x=\dfrac{R}{2}\sin t,\ y=\dfrac{R}{2}(1+\cos t),\ z=R\sin\dfrac{t}{2},\ t\in[0;\,2\pi]$; $x'_t=\dfrac{R}{2}\cos t$, $y'_t=-\dfrac{R}{2}\sin t$, $z'_t=\dfrac{R}{2}\cos\dfrac{t}{2}$. По формуле (14.28) $I=\int\limits_l ydx-xdy+zdz=$

$$=\int\limits_0^{2\pi}\left[\frac{R}{2}(1+\cos t)\frac{R}{2}\cos t-\frac{R}{2}\sin t\left(-\frac{R}{2}\sin t\right)+R\sin\frac{t}{2}\frac{R}{2}\cos\frac{t}{2}\right]dt=$$

$$=\frac{R^2}{4}\int\limits_0^{2\pi}(1+\cos t+\sin t)dt=\frac{R^2}{4}(t+\sin t-\cos t)\Big|_0^{2\pi}=\frac{\pi R^2}{2}.\#$$

Пример 22. Найти первообразную функции $u(x,\,y,\,z)$, если $du=(6x+7yz)dx+(6y+7xz)dy+(6z+7xy)dz$.

∇ По формуле (14.30) при $x_o=y_o=z_o=0$ получим

$$u(x,\,y,\,z)=\int\limits_0^x(6x+7yz)dx+\int\limits_0^y 6ydy+\int\limits_0^z 6zdz+c=$$

$$=(3x^2+7xyz)\Big|_{x=0}^{x=x}+3\,y^2\Big|_0^y+3z^{\ 2}\Big|_0^z+c=$$

$$=3(x^2+y^2+z^2)+7xyz+c.\ \#$$

Задачи для самостоятельного решения

Вычислить криволинейные интегралы второго рода.

97. $\int\limits_l xdy$, где l – отрезок прямой $x/a+y/b=1$ от точки пересечения ее с осью Ox до точки пересечения с осью Oy.

98. $\int\limits_l (x^2+y^2)dy$, где l – контур четырехугольника с вершинами $A(0;\,0)$, $B(2;\,0)$, $C(4;\,4)$, $D(0;\,4)$, указанными в порядке обхода l.

99. $\int\limits_{(0;0)}^{(1;1)} xydx+(y-x)dy$ вдоль линий: 1) $y=x$, 2) $y=x^2$, 3) $y^2=x$, 4) $y=x^3$.

100. $\int\limits_{l} ydx-xdy$, l – эллипс $x=a\cos t,\ y=b\sin t$, обходимый в положительном направлении.

101. $\int\limits_{l} (2a-y)dx-(a-y)dy$, где l – первая от начала координат арка циклоиды $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$.

102. $\int\limits_{l} xdx+ydy+(x+y-1)dz$, где l – отрезок прямой от точки (1; 1; 1) до точки (2; 3; 4).

103. $\int\limits_{l} yzdx+zxdy+xydz$, где l – дуга винтовой линии $x=R\cos t,\ y=R\sin t,\ z=at/\pi\ \ (0\le t\le 2\pi)$.

104. $\int\limits_{l} y^2dx+z^2dy+x^2dz$, где l – линия пересечения сферы $x^2+y^2+z^2=R^2$ и цилиндра $x^2+y^2=Rx$ ($R>0,\ z\ge 0$), обходимая против часовой стрелки, если смотреть из начала координат (часть кривой Вивиани).

Убедиться, что подынтегральное выражение является полным дифференциалом, и вычислить КИ-2.

105. $\int\limits_{(0;\,0)}^{(2;\,1)} 2xydx+x^2dy$. **106.** $\int\limits_{(3;\,4)}^{(5;12)} \dfrac{xdx+ydy}{x^2+y^2}$.

107. $\int\limits_{(1;2;3)}^{(3;2;1)} yzdx+zxdy+xydz$. **108.** $\int\limits_{(7;\,2;\,3)}^{(5;\,3;\,1)} \dfrac{zxdy+xydz-yzdx}{(x-yz)^2}$ (контурное интегрирование не пересекает поверхность $z=x/y$).

Найти первообразную функцию и по полному дифференциалу.

109. $du=4(x^2-y^2)(xdx-ydy)$.

110. $du=(2x\cos y-y^2\sin x)dx+(2y\cos x-x^2\sin y)dy$.

111. $du=\dfrac{2x(1-e^y)}{(1+x^2)^2}\,dx+\left(\dfrac{e^y}{1+x^2}+1\right)dy$.

112. $du=(x^2-2yz)dx+(y^2-2xz)dy+(z^2-2xy)dz$.

113. $du = \dfrac{dx+dy+dz}{x+y+z}$. **114.** $du = \left(1 - \dfrac{1}{y} + \dfrac{y}{z}\right)dx + \left(\dfrac{x}{z} + \dfrac{x}{y^2}\right)dy - \dfrac{xy}{z^2}\,dz.$

С помощью формулы Грина вычислить КИ-2.

115. $\oint_l xy^2 dy - x^2 y dx$, где l – окружность $x^2 + y^2 = R^2$.

116. $\oint_l (x+y)dx - (x-y)dy$, где l – эллипс $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$.

117. Вычислить $\oint_l xdy - ydx$, где l – простой замкнутый контур, пробегаемый в положительном направлении.

Указание. Рассмотреть случаи: 1) начало координат находится вне контура l; 2) контур l окружает начало координат.

118. В каждой точке эллипса $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ приложена сила $\overline{F}$, равная по величине расстоянию от точки M до центра эллипса и направленная к центру эллипса. Найти работу $\overline{F}$ при перемещении в положительном направлении: а) вдоль дуги эллипса в первом октанте; б) вдоль всего эллипса.

119. Сила по величине обратно пропорциональна расстоянию точки ее приложения от оси Oz, перпендикулярна к этой оси и направлена к ней. Найти работу этой силы по окружности $x = \cos t,\ y = 1,\ z = \sin t$ от точки $M(1;1;0)$ до точки $N(0;1;1)$.

Указание. $\overline{F} = \left\{-\dfrac{kx}{x^2+y^2},\ -\dfrac{ky}{x^2+y^2},\ 0\right\}$.

14.6. ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

14.6.1. ДВУСТОРОННИЕ ПОВЕРХНОСТИ И ИХ ОРИЕНТАЦИЯ

Гладкая поверхность σ называется *двусторонней* поверхностью, если при возвращении в исходную точку после обхода замкнутого контура, лежащего на σ и не имеющего общих точек с ее границей, направление нормали к поверхности не меняется.

Совокупность всех точек поверхности с приписанными в них по указанному правилу нормалями называется *определенной стороной* поверхности.

Выбор определенной стороны поверхности называется *ориентацией* поверхности. Выбранная сторона – это положительная сторона поверхности. Для замкнутой поверхности положительной считается внешняя сторона.

Если σ задана неявным уравнением $F(x,\, y,\, z)=0$, то сторона характеризуется одним из единичных нормальных векторов

$$\bar{n}^{\circ}=\pm\bar{n}\,/\,|\bar{n}|,\ \bar{n}=\left\{F'_x,\, F'_y,\, F'_z\right\},\ |\bar{n}|=\sqrt{F'^2_x+F'^2_y+F'^2_z}\,. \qquad (14.31)$$

Если σ задана явным уравнением $z=z(x,\, y)$, $(x,\, y)\in S_{xy}$, то сторона характеризуется одним из векторов $\bar{n}^{\circ}$:

$$\bar{n}^{\circ}=\pm\bar{n}\,/\,|\bar{n}|,\ \bar{n}=\{-z'_x,\ -z'_y, 1\},\ |\bar{n}|=\sqrt{1+z'^2_x+z'^2_y}\,. \qquad (14.32)$$

14.6.2. ПОВЕРХНОСТНЫЙ ИНТЕГРАЛ ПЕРВОГО РОДА (ПИ-1)

Пусть: 1) в точках двусторонней гладкой (или кусочно-гладкой) поверхности σ из пространства $R^3=\left\{\left(x,\, y,\, z\right)\right\}$, ограниченной кусочно-гладким контуром, определена ограниченная скалярная функция $f(x,\, y,\, z)$; 2) $\left\{\sigma_1,\, \sigma_2,\, ...,\, \sigma_n\right\}$ – произвольное разбиение σ на n частей σ_i с площадями $\Delta\sigma_i$ и диаметрами d_i; 3) $M_i(\xi_i,\, \eta_i,\, \zeta_i)\in\sigma_i$ $(i=1,\, 2,\, ..,\, n)$ – произвольный набор точек; 4) $I_n=\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i,\, \eta_i,\, \zeta_i)\,\Delta\sigma_i$ – интегральная сумма, соответствующая данному разбиению поверхности σ и выбору точек M_i.

Определение. Конечный предел интегральной суммы I_n при $\lambda\to 0$ $(\lambda=\sup\left\{d_i\right\})$, не зависящий ни от способа разбиения поверхности σ, ни от выбора точек M_i, называется *поверхностным интегралом первого рода* от функции $f(x,\, y,\, z)$ по поверхности σ:

$$\lim_{n\to\infty} I_n=\iint\limits_{\sigma} f(x,y,z)d\sigma.$$

ВЫЧИСЛЕНИЕ ПИ-1

Теорема 14.10. Если: 1) поверхность σ задана неявным уравнением $F(x,\, y,\, z)=0$ и $z=z(x,\, y)$ есть решение этого уравнения при $(x,\, y)\in S_{xy}$ или $y=y(x,\, z)$ – решение уравнения при $(y,\, z)\in S_{yz}$, или $x=x(y,\, z)$ – решение уравнения при $(y,\, z)\in S_{yz}$, где $S_{xy},\, S_{xz},\, S_{yz}$ – проекции σ на плоскости $Oxy,\, Oxz,\, Oyz$ соответственно; 2) между точками σ и ее соответствующей проекцией установлено взаимно однозначное соответствие, то

$$\boxed{\begin{aligned}\iint\limits_{\sigma} f(x,y,,z)d\sigma &= \iint\limits_{S_{xy}} f(x,y,z(x,y))\frac{dxdy}{|\cos\gamma|} = \\ &= \iint\limits_{S_{xz}} f(x,y(x,z),z)\frac{dxdz}{|\cos\beta|} = \\ &= \iint\limits_{S_{yz}} f(x(y,z),y,z)\frac{dydz}{|\cos\alpha|}\end{aligned}}, \qquad (14.33)$$

причем ПИ-1 существует, если существуют соответствующие двойные интегралы. Здесь $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ – координаты вектора $\bar{n}^{\circ}$ и находятся по формулам (14.31). ПИ-1 не зависит от выбора стороны поверхности.

Следствие. При явном задании σ : $z = z(x, y), (x, y) \in S_{xy}$ в силу (14.32) из (14.33) получим

$$\boxed{\iint\limits_{\sigma} f(x, y, z)d\sigma = \iint\limits_{S_{xy}} f(x, y, z(x, y))\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}\,dxdy} \qquad (14.34)$$

НЕКОТОРЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ПИ-1

1. *Масса материальной поверхности.* Пусть $\mu = \mu(x, y, z)$ – поверхностная плотность материальной поверхности σ площади s. Тогда масса этой поверхности $m = \iint\limits_{\sigma} \mu(x,y,z)d\sigma$.

2. *Площадь искривленной поверхности* σ . Если принять в предыдущей формуле $\mu(x, y, z) \equiv 1$, то масса поверхности σ численно равна площади s , т.е. $s = \iint\limits_{\sigma} d\sigma$.

3. *Статические моменты материальной поверхности* σ с поверхностной плотностью $\mu = \mu(x, y, z)$ и массой m относительно плоскостей Oxy, Oxz, Oyz соответственно равны: $M_{xy} = \iint\limits_{\sigma} \mu\, zd\sigma$, $M_{xz} = \iint\limits_{\sigma} \mu\, yd\sigma$, $M_{yz} = \iint\limits_{\sigma} \mu\, xd\sigma$.

4. *Координаты центра тяжести* материальной поверхности σ :

$$x_c = M_{yz}/m,\ \ y = M_{xz}/m,\ \ z_c = M_{xy}/m.$$

Задания. 1. Записать линейные свойства ПИ-1.
2. Записать свойство аддитивности для ПИ-1.

Пример 23. Вычислить ПИ-1 $I=\iint\limits_{\sigma} zd\sigma$, где σ – часть плоскости $x/a+y/b+z/c=1$, вырезанная цилиндром $x^2+y^2=R^2$ (рис. 14.26).

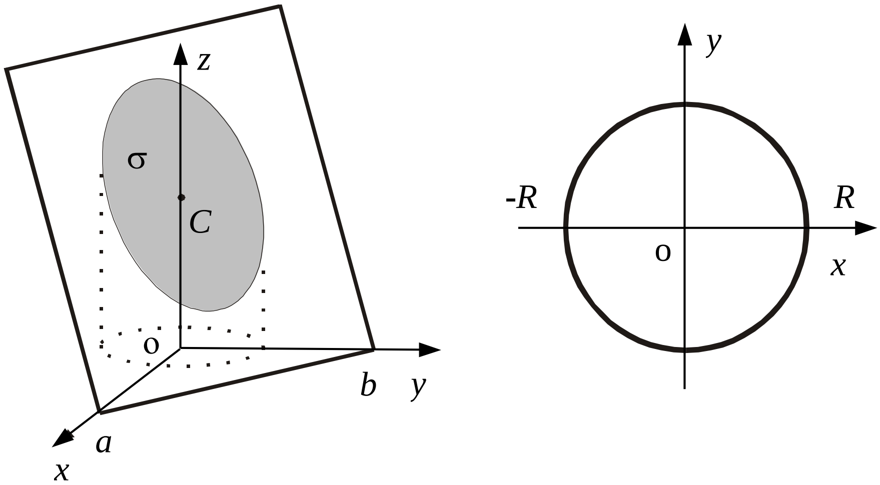


Рис. 14.26

∇ Поверхность σ проектируется на плоскость Oxy в круг $S:\left\{x^2+y^2\le R^2\right\}$. По формуле (14.34)

$$I=\iint\limits_{\sigma} zd\sigma=\iint\limits_{S} z(x,\,y)\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}\,dxdy\,.$$

Из уравнения σ следует: $z=c(1-x/a-y/b)$, $z_x'=-c/a$, $z_y'=-c/b$, $\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}=\sqrt{1+c^2/a^2+c^2/b^2}=k$; тогда $I=ck\iint\limits_{S}(1-x/a-y/b)dxdy=$

$$=\left|\begin{array}{l}\text{переходим к полярным координатам:}\\ x=\rho\cos\varphi,\,,\ y=\rho\sin\varphi,\ S\Rightarrow P:\begin{cases}0\le\varphi\le 2\pi,\\ 0\le\rho\le R\end{cases}\\ dxdy=\rho d\rho d\varphi,\ x^2+y^2=R^2\Rightarrow\rho=R,\end{array}\right|=$$

$$=ck\iint\limits_{P}\left(1-\frac{1}{a}\rho\cos\varphi-\frac{1}{b}\rho\sin\varphi\right)\rho d\rho d\varphi=$$

$$=ck\int\limits_{0}^{R}\rho d\rho\int\limits_{0}^{2\pi}\left(1-\frac{1}{a}\rho\cos\varphi-\frac{1}{b}\rho\sin\varphi\right)d\varphi=$$

$$= ck\int_0^R \rho d\rho(\varphi - \frac{1}{a}\rho\sin\varphi + \frac{1}{b}\rho\cos\varphi)\Big|_0^{2\pi} =$$

$$= 2\pi c\,k\int_0^R \rho d\rho = \pi R^2 c\sqrt{1 + c^2 / a^2 + c^2 / b^2}\ .\ \#$$

Пример 24. Вычислить ПИ-1 $I = \iint\limits_{\sigma} x d\sigma$, где σ – полная поверхность тетраэдра, отсекаемого от первого октанта плоскостью $x + y + z = 1$.

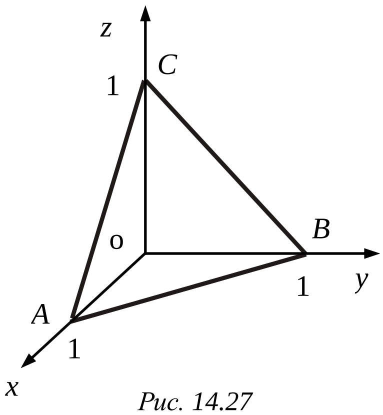


Рис. 14.27

∇ Полная поверхность σ тетраэдра складывается из его граней:

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + \sigma_4,$$

где $\sigma_1 = \Delta AOB,\ \sigma_2 = \Delta AOC,\ \sigma_3 = \Delta BOC,$ $\sigma_4 = \Delta ABC$ (рис. 14.27).

Выпишем уравнения поверхностей σ_i и вычислим для них элементы $d\sigma$:

а) $\sigma_1 : z = 0,\ d\sigma = \sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2}\,dxdy = dxdy$;

б) $\sigma_2 : y = 0,\ d\sigma = \sqrt{1 + y_x'^2 + y_z'^2}\,dxdz = dxdz$;

в) $\sigma_3 : x = 0,\ d\sigma = \sqrt{1 + x_y'^2 + x_z'^2}\,dydz = dydz$;

г) $\sigma_4 : x = 1 - z - y,\ d\sigma = \sqrt{1 + x_y'^2 + x_z'^2}\,dydz = \sqrt{3}dydz$.

Задав уравнения поверхностей в явном виде, мы определили тем самым плоскости проектирования их; D_i – области, на которые проектируются σ_i.

$$I = \iint\limits_{\sigma} x d\sigma = \iint\limits_{\sigma_1} + \iint\limits_{\sigma_2} + \iint\limits_{\sigma_3} + \iint\limits_{\sigma_4} =$$

$$= \iint\limits_{D_1} xdydx + \iint\limits_{D_2} xdxdz + \iint\limits_{D_3} 0dydz + \iint\limits_{D_4} (1 - y - z)\,dydz\,.$$

По поводу последней записи напомним, что следует в подынтегральной функции $f(x, y, z)$ независимые переменные (переменные из области D_i) оставлять без изменения, зависимую переменную заменить из явного уравнения соответствующей поверхности, а $d\sigma$ заменить выражением, полученным выше, причем $D_3 = D_4$.

Находим:

$$\iint\limits_{D_1} xdxdy = \left| D_1 : \begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le 1-x \end{cases} \right| =$$

$$= \int\limits_0^1 xdx \int\limits_0^{1-x} dy = \int\limits_0^1 x(1-x)dx = (x^2/2 - x^3/3)\Big|_0^1 = 1/6;$$

$\iint\limits_{D_2} xdxdz = \left| D_2 : \begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le z \le 1-x \end{cases} \right| = 1/6$, так как области D_1 и D_2 переходят одна в другую заменой y на z;

$$\iint\limits_{D_3} 0dydz = 0; \quad \iint\limits_{D_4 = D_3} (1-y-z)\sqrt{3}dydz = \left| D_4 : \begin{cases} 0 \le y \le 1 \\ 0 \le z \le 1-y \end{cases} \right| =$$

$$= \sqrt{3}\int\limits_0^1 dy \int\limits_0^{1-y} (1-y-z)dz = -\left(\sqrt{3}/2\right)\int\limits_0^1 (1-y-z)^2 \Bigg|_{z=0}^{z=1-y} dy =$$

$$= \left(\sqrt{3/2)}\right)\int\limits_0^1 (1-y)^2 dy = -\frac{\sqrt{3}}{6}(1-y)^3\Big|_0^1 = \frac{\sqrt{3}}{6}.$$

$$I = 1/6 + 1/6 + 0 + \sqrt{3}/6 = (2+\sqrt{3})/6. \#$$

Задачи для самостоятельного решения

Вычислить поверхностные интегралы первого рода.

120. $\iint\limits_{\sigma} xyzd\sigma$, где σ – часть плоскости $x+y+z=1$, лежащая в первом октанте.

121. $\iint\limits_{\sigma} xd\sigma$, где σ – часть сферы $x^2+y^2+z^2=R^2$, лежащая в первом октанте.

122. $\iint\limits_{\sigma} yd\sigma$, где σ – полусфера $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$.

123. $\iint\limits_{\sigma} \sqrt{R^2-x^2-y^2}d\sigma$, где σ – полусфера $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$.

124. $\iint\limits_{\sigma} \frac{d\sigma}{r^2}$, где σ – цилиндр $x^2+y^2=R^2$, ограниченный плоскостями $z=0,\ z=H$, а r – расстояние от точки поверхности до начала координат.

125. $\iint\limits_{\sigma} (xy+yz+zx)d\sigma$, где σ – часть конической поверхности $z=\sqrt{x^2+y^2}$, вырезанная поверхностью $x^2+y^2=2ax$.

126. Найти массу сферы, если поверхностная плотность в каждой точке численно равна расстоянию этой точки от некоторого фиксированного диаметра сферы.

127. Найти массу параболической оболочки $z=(x^2+y^2)/2$ $(0\le z\le 1)$, плотность которой меняется по закону $\gamma = z$.

128. Найти массу полусферы $x^2+y^2+z^2=a^2$ $(z\ge 0)$, плотность которой в каждой ее точке равна z/a.

129. Найти координаты центра тяжести части однородной поверхности $z=\sqrt{x^2+y^2}$, вырезанной поверхностью $x^2+y^2=ax$.

14.6.3. ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ ВТОРОГО РОДА (ПИ-2)

Пусть: 1) в точках двусторонней гладкой (или кусочно-гладкой) поверхности σ задана ограниченная функция $f(x, y, z)$; 2) выбрана положительная сторона поверхности; 3) $\{\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n\}$ – разбиение σ на n частей σ_i с площадями $\Delta\sigma_i$ и диаметрами d_i; 4) $M_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\in\sigma_i$ $(i=1, 2, ..., n)$ – произвольный набор точек; 5) $\pm\Delta_{xy}S_i$ – проекция элемента σ_i на плоскость Oxy (проекция определенной стороны поверхности связана со знаком « + » или « – »); 6) $I_n=\pm\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta_{xy}S_i$ – интегральная сумма, соответствующая данному разбиению и выбору точек.

Определение. Конечный предел I_n при $\lambda\to 0$ $(\lambda=\sup\{d_i\})$ называется *поверхностным интегралом второго рода* от $f(x, y, z)$ по определенной стороне поверхности σ:

$$\lim_{n\to\infty} I_n = \iint_\sigma f(x,y,z)dxdy$$

(здесь $dxdy$ напоминает о проекции σ_i на Oxy и содержит знак).

При проектировании ориентированной поверхности σ на плоскости Oyz и Oxz получаем ПИ-2:

$$\iint_\sigma f(x,y,z)dydz, \qquad \iint_\sigma f(x,y,z)dxdz.$$

ВЫЧИСЛЕНИЕ ПИ-2

Теорема 14.11. Пусть ориентированная гладкая поверхность σ задана явно. Тогда:

а) если $\sigma: z=z(x, y),\ (x, y)\in S_{xy}$, то

$$\iint_\sigma f(x, y, z)\, dxdy = \pm\iint_{S_{xy}} f(x, y, z(x, y))dxdy; \qquad (14.35а)$$

б) если $\sigma: y = y(x, z),\ (x, z) \in S_{xz}$, то

$$\iint\limits_{\sigma} f(x, y, z)\, dxdz = \pm \iint\limits_{S_{xz}} f\left(x, y(x, z), z\right) dxdz; \qquad (14.35б)$$

в) если $\sigma: x = x(y, z),\ (y, z) \in S_{yz}$, то

$$\iint\limits_{\sigma} f(x, y, z)\, dydz = \ = \pm \iint\limits_{S_{yz}} f\left(x(y, z), y, z\right) dydz. \qquad (14.35в)$$

СВЯЗЬ МЕЖДУ ПИ-1 И ПИ-2

Теорема 14.12. Если σ – гладкая двусторонняя поверхность, ориентация σ характеризуется нормалью $\bar{n}^{\circ}\left\{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\right\} = \pm\bar{n} / \left|\bar{n}\right|$, $P(x, y, z),\ O(x, y, z),\ R(x, y, z)$ – функции, определенные и непрерывные на σ, то

$$\iint\limits_{\sigma} Pdydz + Qdxdy + Rdxdy = \iint\limits_{\sigma} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)d\sigma. \quad (14.36)$$

СВЯЗЬ МЕЖДУ ПИ-2 И ТРОЙНЫМ ИНТЕГРАЛОМ (ФОРМУЛА ГАУССА – ОСТРОГРАДСКОГО)

Теорема 14.13. Пусть функции $P(x, y, z),\ Q(x, y, z),\ R(x, y, z)$ – непрерывные вместе со своими частными производными (первого порядка) в некоторой пространственной области V, ограниченной гладкой *замкнутой* поверхностью σ с положительной внешней стороной. Справедлива формула Гаусса-Остроградского

$$\boxed{\iint\limits_{\sigma} Pdydz + Qdxdz + Rdxdy = \iiint\limits_{V} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dxdydz}\ .$$

З а м е ч а н и е. О приложениях ПИ-2 смотри в разделе «Элементы теории поля».

Пример 25. Вычислить ПИ-2: $\iint\limits_{\sigma^+} x^2y^2zdxdy$, где $\sigma^+: x^2 + y^2 + {}$ $+z = R^2$ – положительная (внешняя) сторона сферы.

∇ Для вычисления ПИ-2 замкнутую поверхность σ^+ необходимо разбить на σ_1 с уравнением $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ и σ_2 с уравнением $z = -\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ (рис. 14.28). Тогда на основании (14.32) положительная сторона поверхности σ_1 характеризуется нормальным вектором $\overline{n_1}\{-z'_x, -z'_y, +1\}$, ибо угол между $\overline{n_1}$ и положительным направлением Oz, т.е. $(\bar{n}_1,\hat{}Oz)$, – острый, а положительная сторона поверхностности σ_2 – вектором $\overline{n_2}\{z'_x z'_y, -1\}$, ибо угол $(\bar{n}_2,\hat{}Oz)$ – тупой. Проекция каждой из поверхностей σ_1 и σ_2 есть область $S:\{x^2+y^2\le R^2\}$ – круг радиуса R с центром в начале координат. Поэтому по формуле (14.35а)

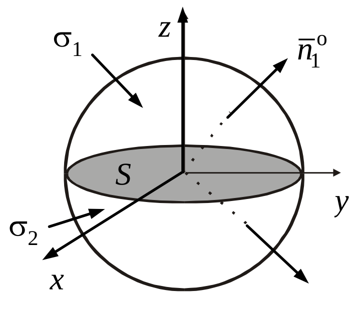


Рис. 14.28

$$I=\iint\limits_S x^2y^2\sqrt{R^2-x^2-y^2}\,dxdy+$$

$$+\iint\limits_S x^2y^2(-\sqrt{R^2-x^2-y^2})(-dxdy)=2\iint\limits_S x^2y^2\sqrt{R^2-x^2-y^2}\,dxdy=$$ (переходим к полярным координатам: $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$, $dxdy=\rho d\rho d\varphi$,

$S\Rightarrow P:\{0\le\varphi\le 2\pi;\ 0\le\rho\le R\}$) =

$$=2\iint\limits_P \rho^5\sin^2\varphi\cos^2\varphi\sqrt{R^2-\rho^2}\,d\rho d\varphi=2\int\limits_0^R\rho^5\sqrt{R^2-\rho^2}\,d\rho\int\limits_0^{2\pi}\sin^2\varphi\cos^2\varphi\,d\varphi=$$

= (двойной интеграл «расщепился» в произведение определенных интегралов) = $2I_1I_2$;

$$I_1=\int\limits_0^R\rho^5\sqrt{R^2-\rho^2}\,d\rho=-\frac{1}{2}\int\limits_0^R\rho^4\sqrt{R^2-\rho^2}\,d(R^2-\rho^2)=$$

$$=\left|\begin{matrix}R^2-\rho^2=t,\ \rho^2=R^2-t\\ t_н=R^2,\ t_в=0\end{matrix}\right|=-\frac{1}{2}\int\limits_{R^2}^{0}(R^2-t)^2\sqrt{t}\,dt=8R^7/105;$$

$$I_2=\int\limits_0^{2\pi}\sin^2\varphi\cos^2\varphi\,d\varphi=\frac{1}{8}\int\limits_0^{2\pi}(1-\cos 4\varphi)\,d\varphi=\pi/4.$$

Итак, $I=2I_1I_2=4\pi R^7/105$. #

Пример 26. Вычислить ПИ-2 общего вида:

$$I=\iint\limits_\sigma 2y^2dydz++x^2dxdz-4z^2dxdy,$$

где σ – внешняя сторона конической поверхности $z=\sqrt{x^2+y^2}$, ограниченной плоскостью $z = 2$.

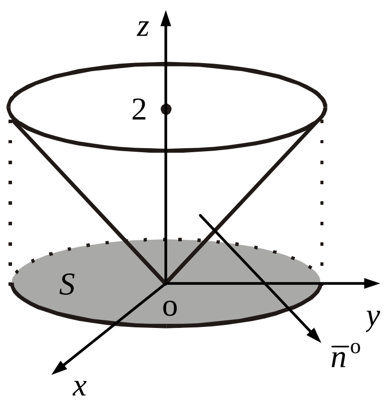


Рис. 14.29

∇ Внешняя сторона поверхности σ характеризуется нормальным вектором, который составляет тупой угол с положительным направлением оси Oz (рис. 4.29), а потому

$$\bar{n}\left\{z'_x,\ z'_y, -1\right\} = \left\{\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\ \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},\ -1\right\},$$

$$|\bar{n}| = \sqrt{x_x'^2 + z_y'^2 + 1} = \sqrt{x^2\ /(x^2+y^2) + y^2\ /(x^2+y^2) + 1} = \sqrt{2}.$$

Тогда $\quad \bar{n}^{o}\{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$,

$$\cos\alpha = \frac{x}{\sqrt{2}\sqrt{x^2+y^2}},$$

$$\cos\beta = \frac{y}{\sqrt{2}\sqrt{x^2+y^2}},\ \cos\gamma = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Данный ПИ-2 можно вычислять по-разному. Первый способ – вычислять три ПИ-2, составляющих данный поверхностный интеграл. Второй способ – использовать связь ПИ-2 с ПИ-1, что и сделаем. По формуле (14.36)

$$I = \iint_{\sigma} 2y^2 dydz + x^2 dxdz - 4z^2 dxdy =$$

$$= \iint_{\sigma} (2y^2\cos\alpha + x^2\cos\beta - 4z^2\cos\gamma)d\sigma =$$

$= \dfrac{1}{\sqrt{2}} \displaystyle\iint_{\sigma} \left(\frac{2y^2x + x^2y}{\sqrt{x^2+y^2}} + 4z^2\right) d\sigma$. Последний поверхностный интеграл есть ПИ-1. Проекция $\sigma: z = \sqrt{x^2+y^2}$ на плоскость Oxy есть область $S: \{x^2+y^2 \le 2^2\}$ – круг радиуса 2 с центром в начале координат. Так как $d\sigma = \sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2}\,dxdy = dxdy\ /\ |\cos\gamma| = \sqrt{2}dxdy$, то по формуле (14.33) [или (14.34)]

$I = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \displaystyle\iint_{S} \left(\frac{2y^2x + x^2y}{\sqrt{x^2+y^2}} + 4(x^2+y^2)\right)\sqrt{2}dxdy =$ (переходим к полярным координатам: $\begin{matrix} x = \rho\cos\varphi, y = \rho\sin\varphi \\ dxdy = \rho d\rho d\varphi \end{matrix}$ $\quad S \Rightarrow P: \left\{0 \le \varphi \le 2\pi;\ 0 \le \rho \le R\right\}$)=

$$= \iint_{P} \left(2\rho^2\sin^2\varphi\cos\varphi + \rho^2\sin\varphi\cos^2\varphi + 4\rho^2)\rho d\rho d\varphi\right) =$$

$$= \int_0^2 \rho^3 d\rho \int_0^{2\pi} (2\sin^2\varphi\cos\varphi + \cos^2\varphi\sin\varphi + 4)d\varphi =$$

$$= \left(\frac{\rho^4}{4}\bigg|_0^2\right)\left(\frac{2}{3}\sin^3\varphi - \frac{\cos^3\varphi}{3} + 4\varphi\right)\bigg|_0^{2\pi} = 32\pi.\ \#$$

Задачи для самостоятельного решения

Вычислить следующие поверхностные интегралы второго рода.

130. $\iint\limits_{\sigma} xdydz + ydxdz + zdxdy$, где σ – положительная сторона куба, составленного плоскостями $x = 0,\ y = 0,\ z = 0,\ x = 1,\ y = 1,\ z = 1$.

131. $\iint\limits_{\sigma} x^2y^2zdxdy$, где σ – положительная сторона нижней половины сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

132. $\iint\limits_{\sigma} z^2dxdy$, где σ – внешняя сторона эллипсоида $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$.

133. $\iint\limits_{\sigma} xzdxdy + xydydz + yzdxdz$, где σ – внешняя сторона пирамиды, составленной плоскостями $x = 0,\ y = 0,\ z = 0,\ x + y + z = 1$.

В задачах 134–137, применяя формулу Гаусса – Остроградского, преобразовать поверхностные интегралы, если гладкая поверхность σ ограничивает конечную область (тело) V и $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ – направляющие косинусы внешней нормали к σ.

134. $\iint\limits_{\sigma} x^3dydz + y^3dzdx + z^3dxdy$. **135.** $\iint\limits_{\sigma} yzdydz + zxdzdx + xydxdy$.

136. $\iint\limits_{\sigma} \dfrac{x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} d\sigma$.

137. $\iint\limits_{\sigma} \left[\left(\dfrac{\partial R}{\partial y} - \dfrac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos\alpha + \left(\dfrac{\partial P}{\partial z} - \dfrac{\partial R}{\partial x}\right)\cos\beta + \left(\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y}\right)\cos\gamma\right] d\sigma$.

138. Вычислить, применяя формулу Гаусса – Остроградского, $\iint\limits_{\sigma} y^2zdxdy + xzdydz + x^2ydxdz$, где σ – внешняя сторона поверхности, расположенной в первом октанте и составленной из параболоида $z = x^2 + y^2$, цилиндра $x^2 + y^2 = 1$ и координатных плоскостей.

139. Вычислить интегралы 132, 133, применяя формулу Гаусса – Остроградского.

ОТВЕТЫ К ЗАДАЧАМ ГЛАВЫ 14

1. $S:\left\{3\le x\le 5;\ \dfrac{3x+1}{2}\le y\le \dfrac{3x+4}{2}\right\}$. **2.** $D:\left\{-\sqrt{2}\le x\le \sqrt{2};\ x^2\le y\le 4-x^2\right\}$.

3. $D:\left\{0\le x\le 2;\ x^2\le y\le 2x\right\}\bigcap\left\{2\le x\le 3;\ x\le y\le 6-x\right\}$.

4. 1. **5.** $1/40$. **6.** $\pi a^3/3$. **7.** $F(A,B)-F(A,b)-F(a,B)+F(a,b)$.

8. $\int\limits_0^1 dx\int\limits_{x^2}^{x} f(x,\ y)dy$. **9.** $\int\limits_0^r dy\int\limits_{r-\sqrt{r^2-y^2}}^{y} f(x,\ y)dx$.

10. $\int\limits_0^1 dy\int\limits_{e^y}^{e} fdx$. **11.** $\int\limits_0^1 dy\int\limits_{\arcsin y}^{\pi-\arcsin y} fdy$.

12. $\int\limits_3^5 dx\int\limits_{(3x+1)/2}^{(4+3x)/2} fdy=\int\limits_5^{6,5} dy\int\limits_3^{(2y-1)/3} fdx+\int\limits_{6,5}^{8} dy\int\limits_{(2y-4)/3}^{(2y-1)/3} fdx+\int\limits_8^{9,5} dy\int\limits_{(2y-4)/3}^{5} fdx$.

13. $\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} fdy=\int\limits_0^1 dy\int\limits_0^{\sqrt{1-y^2}} fdx$. **14.** $\int\limits_0^4 dx\int\limits_{3-\sqrt{4x-x^2}}^{3+\sqrt{4x-x^2}} fdy=\int\limits_1^5 dy\int\limits_{2-\sqrt{6y-y^2-5}}^{2+\sqrt{6y-y^2-5}} fdx$.

15. $\int\limits_0^2 dx\int\limits_x^{2x} fdy+\int\limits_2^3 dx\int\limits_x^{6-x} fdy=\int\limits_0^3 dy\int\limits_{y/2}^{y} fdx+\int\limits_3^4 dy\int\limits_{y/2}^{6-y} fdx$.

16. $\int\limits_0^1 dx\int\limits_{x/2}^{2x} fdy+\int\limits_1^2 dx\int\limits_{x/2}^{2/x} fdy=\int\limits_0^1 dy\int\limits_{y/2}^{2y} fdx+\int\limits_1^2 dy\int\limits_{y/2}^{2/y} fdx$.

17. $\int\limits_{-2}^0 dx\int\limits_{-x/2}^{1} fdy+\int\limits_0^2 dx\int\limits_{x/2}^{1} fdy=\int\limits_0^1 dy\int\limits_{-2y}^{2y} fdx$.

18. $\int\limits_{-1}^1 dx\int\limits_{x^2}^{1} fdy=\int\limits_0^1 dy\int\limits_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} fdx$. **19.** $(e-1)^2$. **20.** 0.

21. $33/140$. **22.** $9/4$. **23.** -2. **24.** $\pi/6$. **25.** $p^5/21$.

26. $35\pi a^4/12$. **27.** $\int\limits_{\pi/4}^{\operatorname{arctg}2} d\varphi\int\limits_{4\cos\varphi}^{8\cos\varphi} f(\rho\cos\varphi,\ \sin\varphi)\rho d\rho$.

28. $\int\limits_0^{\operatorname{arctg}(a/b)} d\varphi\int\limits_0^{b\sin\varphi} f(\rho\cos\varphi,\ \rho\sin\varphi)\rho d\rho+$

$+\int\limits_{\operatorname{arctg}(a/b)}^{\pi/2} d\varphi\int\limits_0^{a\cos\varphi} f(\rho\cos\varphi,\ \rho\sin\varphi)\rho d\rho$.

29. $\int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_{\sqrt{2}\sec(\varphi-\pi/4)}^{2} f(\rho\cos\varphi,\ \rho\sin\varphi)\rho d\rho$.

30. $\int\limits_{-\pi/4}^{\pi/4} d\varphi \int\limits_0^{a\sqrt{\cos 2\varphi}} f(\rho\cos\varphi,\ \rho\sin\varphi)\rho d\rho$.

31. $\int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^{a\sin 2\varphi} f(\rho\cos\varphi,\ \rho\sin\varphi)\rho d\rho$.

32. $x = 2\rho\cos\varphi,\ y = 3\rho\cos\varphi,\ I = 6\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 f(2\rho\cos\varphi,\ 3\rho\sin\varphi)\rho d\rho$.

33. $I = \sqrt{3}\int\limits_0^{\pi} d\varphi \int\limits_0^{\sqrt{3}\cos^2\varphi\sin\varphi} f(\rho\cos\varphi,\ \sqrt{3}\rho\sin\varphi)\rho d\rho$.

34. $\int\limits_{\pi/6}^{\pi/2} d\varphi \int\limits_{(R\operatorname{cosec}\varphi)/2}^{2R\sin\varphi} f(\rho\cos\varphi,\ \rho\sin\varphi)\rho d\rho$.

35. $\int\limits_{\pi/4}^{\pi/3} d\varphi \int\limits_0^{2\sec\varphi} \rho f(\rho) d\rho$. **36.** $\int\limits_0^{\pi/4} d\varphi \int\limits_{\sin\varphi\cdot\sec^2\varphi}^{\sec\varphi} f(\rho\cos\varphi,\ \rho\sin\varphi)\rho d\rho$.

37. $\pi[(1+R^2)\ln(1+R^2) - R^2]/4$. **38.** $\pi R^2 h$. **39.** $R^3(\pi - 4/3)/3$.

40. $\pi^2/6$. **41.** $-6\pi^2$. **42.** $a^2b^2/8$. **43.** $1/\sqrt[4]{6}$.

44. а) $V:\{(x, y)\in S,\ 0\le z\le (6-x-2y)/3\}$, $S:\{x\ge 0,\ y\ge 0,\ x+2y\le 6\}$;

б) $V:\{(y, z)\in D,\ 0\le x\le 6-2y-3z\}$, $D:\{y\ge 0,\ z\ge 0,\ 2y+3z\le 6\}$.

45. а) $V:\left\{(x, y)\in S;\ R-\sqrt{R^2-x^2-y^2}\le z\le R+\sqrt{R^2-x^2-y^2}\right\}$, $S:\left\{x^2+y^2\le R^2\right\}$;

б) $V:\left\{(y, z)\in D;\ -\sqrt{2Rz-z^2-y^2}\le x\le\sqrt{2Rz-z^2-y^2}\right\}$, $D:\left\{y^2+z^2-2Rz\le 0\right\}$.

46. а) $V:\left\{(x, y)\in S;\ x^2+y^2\le z\le 4\right\}$, $S:\left\{x^2+y^2\le 4\right\}$;

б) $V:\left\{(y, z)\in D;\ -\sqrt{z-y^2}\le x\le\sqrt{z-y^2}\right\}$, $D:\left\{z\ge y^2,\ z\le 4\right\}$.

47. $2e-5$. **48.** $(\ln 2 - 5/8)/2$. **49.** 1/180. **50.** $\left(\pi^2-8\right)/16$.

51. $1/96$. **52.** $\int\limits_0^1 dz \int\limits_{\pi/4}^{\pi/3} d\varphi \int\limits_0^R f(\rho\cos\varphi,\ \rho\sin\varphi,\ z)\rho d\rho$.

53. $\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^{2\cos\varphi} \rho d\rho \int\limits_0^{\rho^2} f(\rho\cos\varphi,\ \rho\sin\varphi,\ z)dz$.

54. $\int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin\psi\ d\psi \int\limits_0^R f(r\cos\ \varphi\sin\psi,\ r\sin\varphi\sin\psi,\ r\cos\psi)\, r^2 dr$.

55. $\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{R\sqrt{3}/2} \rho d\rho \int\limits_{R-\sqrt{R^2-\rho^2}}^{\sqrt{R^2-\rho^2}} f(\rho\cos\varphi,\ \rho\sin\varphi,\ z)dz$

или $\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi/3} \sin\psi d\psi \int\limits_0^R f^* r^2 dr + \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi/2} \sin\psi d\psi \int\limits_0^{2R\cos\psi} f^* r^2 dr$,

где $f^* = f(r\cos\varphi\sin\psi,\ r\sin\varphi\sin\psi,\ r\cos\psi)$.

56. $8a^2/9$. **57.** $4\pi R^5/15$. **58.** $a^4/8$. **59.** $4\pi ah/3$.

60. $4\pi(R_2^5 - R_1^5)$. **61.** $\pi[3\sqrt{10} + \ln\left(\left(\sqrt{2}-1\right)/\left(\sqrt{10}-3\right)\right) - \sqrt{2} - 8]$.

62. $\pi/10$. **63.** 560/3. **64.** $48\sqrt{6}/5$. **65.** 45. **66.** 81/5.

67. 22π. **68.** 27. **69.** $\pi/3$. **70.** $\pi/8$. **71.** $19\pi/6$ и $15\pi/2$.

72. $21(2-\sqrt{2})\pi/4$. **73.** $\gamma_0 a^2[2+\sqrt{2}\ln(1+\sqrt{2})]/3$.

74. $x_c = -a/2,\ y_c = -8a/5$. **75.** $x_c = y_c = a/5$.

76. $x_c = y_c = \pi a/8$. **77.** $x_c = 5a/6,\ y_c = 16a/9\pi$.

78. $x_c = 14/15,\ y_c = 26/15,\ z_c = 8/3$.

79. $x_c = 6/5,\ y_c = 12/5,\ z_c = 8/5$.

80. $x_c = y_c = 0,\ z_c = 5a(6\sqrt{3}+5)/83$. **81.** $\sqrt{5}\ln 2$. **82.** 24.

83. $p^2(5\sqrt{5}-1)/3$. **84.** $4\pi a\sqrt{a}$. **85.** $2a^3\sqrt{2}/3$.

86. $[(R^2+4)^{3/2} - 8]/12$. **87.** $2\sqrt{2}[(1+2\pi^2)^{3/2} - 1]/3$.

88. $R^2\sqrt{2}$. **89.** $a^3(\operatorname{ch}^{3/2} 2t_0 - 1)/6$. **90.** $a^{7/3}$.

91. $(2\pi a^2 + 8\pi^3 b^2/3)\sqrt{a^2+b^2}$. **92.** $(1-e^{-t})\sqrt{3}$.

93. $2p^2(2\sqrt{2}-1)/3$. **94.** $x_c = b - a\sqrt{(h-a)/(h+a)}$,

$y_c = h/2 + ab/2\sqrt{h^2-a^2}$. **95.** $x_c = y_c = 4a/3$.

96. $(0;\ 2a\pi;\ b\pi/2)$. **97.** $ab/2$. **98.** 112/3. **99.** $1/3$.

100. $-2\pi ab$. **101.** πa^2. **102.** 13. **103.** 0. **104.** $3\sqrt{3}$.

105. 4. **106.** $\ln(13/5)$. **107.** 0. **108.** –9/2.

109. $u = (x^3+y^3)/3+c$. **110.** $u = x^2\cos y + y^2\cos x + c$.

111. $u = (e^y-1)/(1+x^2)+y+c$. **112.** $u = (x^3+y^3+z^3)/3-2xyz+c$.

113. $u = \ln|x+y+z|+c$. **114.** $u = x - x/y + xy/z + c$.

115. $\pi R^4/2$. **116.** $-2\pi ab$. **117.** 1) 0; 2) 2π.

118. а) $(a^2-b^2)/2$; б) 0. **119.** $0{,}5k\ln 2$. **120.** $\sqrt{3}/120$.

121. $\pi R^3/4$. **122.** 0. **123.** πR^3. **124.** $2\pi\operatorname{arctg}(H/R)$.

125. $64\sqrt{2}a^4/15$. **126.** π^2R^3. **127.** $2\pi(1+6\sqrt{3})/15$. **128.** πa^2.

129. $x_c = a/2;\ y_c = 0;\ z_c = 16a/9\pi$. **130.** 3. **131.** $2\pi R^7/105$.

132. 0. **133.** $1/8$. **134.** $3\iiint\limits_V (x^2+y^2+z^2)dxdydz$. **135.** 0.

136. $2\iiint\limits_V \dfrac{dxdydz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$. **137.** 0. 138. $\pi/8$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Берман Г.Н.* Сборник задач по курсу математического анализа / Г.Н Берман. – М.: Наука, 1975.
2. *Гюнтер Н.М.* Сборник задач по высшей математике. Т. 2 / Н.М. Гюнтер, Р.О. Кузьмин. – М.: ГИФМЛ, 1959.
3. *Демидович Б.П.* Сборник задач и упражнений по математическому анализу / Б.П. Демидович – М.: Наука, 1977.
4. *Долгих В.Я.* Высшая математика. Ч. 2, 4 / В.Я. Долгих, В.В. Хаблов, Э.Б. Шварц. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 1996.
5. *Задачи и упражнения* по математическому анализу для втузов / под ред. Б.П. Демидовича. – М.: ГИФМЛ, 1961.
6. *Ильин В.А., Позняк Э.Г.* Основы математического анализа. Ч. 1 / В.А. Ильин, Э.Г. Позняк. – М.: Наука, 1982; Ч. 2. – М.: Наука, 1980.
7. *Кудрявцев Л.Д.* Курс математического анализа. Т.1, 2 / Л.Д. Кудрявцев. – М.: Высшая школа, 1981.
8. *Кудрявцев Л.Д.* Сборник задач по математическому анализу. Функции многих переменных / Л.Д. Кудрявцев, А.Д. Кутасов и др. – М.: Наука, 1995.
9. *Матвеев Н.М.* Сборник задач и упражнений по обыкновенным дифференциальным уравнениям / Н.М. Матвеев. – Минск: Вышэйшая школа, 1970.
10. *Никольский С.М.* Курс математического анализа. Т. 1, 2 / С.М. Никольский. – М.: Наука, 1983.
11. *Сборник* задач по математике для втузов. Специальные разделы математического анализа / под ред. А.В. Ефимова, Б.П. Демидовича. Т. 1, 2. – М: Наука, 1986.
12. *Шмелев П.А.* Теория рядов в задачах и упражнениях / П.А. Шмелев. – М.: Высшая школа, 1983.