Линейная алгебра

Задача 1

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 7 & -4 \\ 2 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

1.Из определения собственного вектора v соответствующего собственному значению λ:
Av=λv

Тогда:Av−λv=(A−λE)·v =0

Уравнение имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда det(A−λE)=0

$$\det(A-\lambda E) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & 0 \\ 2 & 7-\lambda & -4 \\ 2 & -2 & 5-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda_3+15\lambda_2-63\lambda+81=-(\lambda-9)\cdot(\lambda_2-6\lambda+9)=-(\lambda-9)\cdot(\lambda-3)2=0;$$

Тогда: $\lambda_1=9$; $\lambda_2=3$.

2.Для каждого λ найдем его собственные вектора:

$$\lambda_1=9\ A-\lambda_1 E=\begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & -4 \\ 2 & -2 & -4 \end{pmatrix};$$

Av=λv ;
(A−λE)·v=0;
Тогда имеем однородную систему линейных уравнений, решим ее методом Гаусса:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -6 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & -4 & 0 \\ 2 & -2 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x_1=0; \\ x_2+c=0. \end{cases}$$

Из уравнения $x_2+2\,x_3=0$ найдем переменную x_2:

$x_2=-2\,x_3;$
Из уравнения $x_1=0$ найдем переменную x_1:

x_1=0;

x_3=x_3.

Ответ: : λ_1=9; λ_2=3;x_1=0;$x_2=-2\,x_3;\ x_3=x_3$.

Задача 2

$$\begin{cases} x_1+x_2-6\,x_3-4\,x_4=6\,, \\ 2\,x_1+3\,x_2+9\,x_3+5\,x_4=6\,, \\ 3\,x_1+4\,x_2+3\,x_3-2\,x_4=12. \end{cases}$$

Решение:

Метод Гауса

Запишем систему уравнений в виде расширенной матрицы:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -6 & -4 & 6 \\ 2 & 3 & 9 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 3 & -2 & 12 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -6 & -4 & 6 \\ 0 & 1 & 21 & 13 & -6 \\ 3 & 4 & 3 & -2 & 12 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -6 & -4 & 6 \\ 0 & 1 & 21 & 13 & -6 \\ 0 & 1 & 21 & 10 & -6 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -6 & -4 & 6 \\ 0 & 1 & 21 & 13 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$ Получим систему:

$$\begin{cases} x_1+x_2-6\,x_3-4\,x_4=6\,, \\ x_2+21\,x_3+13\,x_4=-6\,, \\ \qquad -3\,x_4=0. \end{cases}$$

Решим уравнение $-3\,x_4=0$ найдем перменнную x_4:

$-3\,x_4=0;$

$x_4=0.$

Решим уравнение $x_2+21\,x_3+13\,x_4=-6$ найдем x_2:

$x_2=-6-21\,x_3-13\,x_4=-6-21\,x_3-13*0=-6-21\,x_3$

Решим уравнение $x_1+x_2-6\,x_3-4\,x_4=6$ найдем x_1:

$x_1=6-x_2+6\,x_3+4\,x_4=6-\left(-6-21\,x_3\right)+6\,x_3+4*0=12+27\,x_3$

$\mathit{Ответ}: x_1=12+27\,x_3; x_2=-6-21\,x_3;\ x_3=x_3;\ x_4=0.$

Даную систему уравнений невозможно решить методом Крамерра или средствами матричного исчесления т.к. полученаая из системы уравнений расширеная матрица не квадратная.

Задача3

$$\begin{cases} 3\,x_1+3\,x_2+5\,x_3-2\,x_4=0\,, \\ 2\,x_1+2\,x_2+8\,x_3-3\,x_4=0\,, \\ 2\,x_1+2\,x_2+4\,x_3-x_4=0. \end{cases}$$

Запишем систему уравнений в виде расширенной матрицы и решим методом Гаусса:

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 5 & -2 & 0 \\ 2 & 2 & 8 & -3 & 0 \\ 2 & 2 & 4 & -1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 3 & 5 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{14}{3} & \frac{-5}{3} & 0 \\ 2 & 2 & 4 & -1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 3 & 5 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{14}{3} & \frac{-5}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

из этого получим систему:

$$\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 0, \\ x_2 \frac{+14}{3} x_3 + \frac{5}{3} x_4 = 0, \\ \frac{2}{3} x_3 + \frac{1}{3} x_4 = 0. \end{cases}$$

Найдем переменную x_3:

$$\frac{2}{3} x_3 = \frac{-1}{3} x_4$$

$$x_3 = \frac{-1}{2} x_4$$

Найдем переменную x_2:

$$x_2 = \frac{-14}{3} x_3 + \frac{5}{3} x_4 = \frac{-14}{3} * ¿) \frac{+5}{3} x_4 = 4x_4$$

Найдем переменную x_1:

$$3x_1 = ¿\text{-}3x_2\text{-}5x_3 + 2x_4 = -3 * (4x_4) - 5 * \left(\frac{-1}{2} x_4\right) + 2x_4 = \frac{-15}{2} x_4$$

$$x_1 = \frac{-5}{2} x_4.$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{-5}{2} x_4, \\ x_2 = 4x_4, \\ x_3 = \frac{-1}{2} x_4, \\ x_4 = x_4. \end{cases}$$ общее решение.

Ответ: $$\begin{cases} x_1 = \frac{-5}{2} x_4, \\ x_2 = 4x_4, \\ x_3 = \frac{-1}{2} x_4, \\ x_4 = x_4. \end{cases}$$

Векторная алгебра

Задача 1

Найдем значение вектора $\overrightarrow{BC} = (C_x - B_x; C_y - B_y; C_z - B_z) = (-1-2; -2-2; 3-3) =$

$\{-3;-4;0\}$.
Используя формулу: $BC_x*(x-x_a)+BC_y*(y-y_в)+BC_z*(z-z_c)=0$ составим уравнение плоскости P: 4*(x+3)-3*(y+4)-2*(z-0)=0;
4x-3y-2z=0.

Найдем нормерующий множитель используя формулу: $\mu=\pm\frac{1}{\sqrt{A^{2+¿}B^2+C^2¿}}$,
где A=4; B=3; C=2.

$$\mu=\frac{1}{\sqrt{4^2+(-3)^2+¿¿¿}}$$

Умножим обе части общего уравнения плоскости на $\frac{1}{\sqrt{29}}$ получим нармальное уравнение плоскости: $\frac{1}{\sqrt{29}}*4x-\frac{1}{\sqrt{29}}*3y-\frac{1}{\sqrt{29}}*2z-\frac{1}{\sqrt{29}}*6=0$;

$$\frac{4\sqrt{29}}{29}x-\frac{3\sqrt{29}}{29}y-\frac{2\sqrt{29}}{29}z-3\sqrt{2}=0;$$

Найдем уравнение плоскости в отрезках используя уравнение плоскости в отроезках: $\frac{x}{a}+\frac{y}{в}+\frac{z}{c}=1$,где $a=\frac{-D}{A}$: $в=\frac{-D}{B}$; $c=\frac{-D}{C}$

$$a=\frac{-(-6)}{4}=\frac{3}{2};в=\frac{-6}{3}=-2;c=\frac{-6}{2}=-3.$$

$$\frac{2x}{3}+\frac{y}{-2}+\frac{z}{-3}=1.$$

Найдем уравнение плоскости P_1 используя формулу:

$$\begin{vmatrix} x-x_A & y-y_A & z-z_A \\ x_B-x_A & y_B-y_A & z_B-z_A \\ x_C-x_A & y_C-y_A & z_C-z_A \end{vmatrix}=0,$$

Подставим данные и упростим выражение

$$\begin{vmatrix} x-4 & y-(-3) & z-(-2) \\ 2-4 & 2-(-3) & 3-(-2) \\ -1-4 & -2-(-3) & 3-(-2) \end{vmatrix}=0,$$

$$\begin{vmatrix} x-4 & y-(-3) & z-(-2) \\ -2 & 5 & 5 \\ -5 & 1 & 5 \end{vmatrix}=0,$$

(x-4)*(5*5-5*1)-($y-(-3)$)*(-2*5-5*(-5)+($z-(-2)$)*(-2*1-5*(-5))=0,
20x-15y+23z-79=0.
Вычислим угол между плоскостью P и P_1:

$$\cos\alpha=¿\frac{|A_1*A_2+B_1*B_2+C_1*C_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2*¿\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2*¿¿¿}}}¿$$

$\cos\alpha = ¿\frac{|4*20+(-3)*(-15)+(-2)*23|}{\sqrt{4^2+(-3)^2+(-2)^2*¿\sqrt{20^2+(-15)^2+23^2}¿}}¿=$

$\frac{|80+45+(-46)|}{\sqrt{16+9+4*\sqrt{400+225+529}}} = \frac{79}{\sqrt{33466}} \approx 0{,}431$

α≈64.4

Для вычисления расстояния от точки D$(D_x; D_y; D_z)$ до плоскости $A_x+B_y+C_z+D_1=0$ используем формулу: $d=\frac{|AD_x+BD_y+CD_z+D_1|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$.

Подставим данные,получим:

$$d=\frac{|4*2+(-3)*(-2)+(-2)*(-3)+(-6)|}{\sqrt{4^2+(-3)^2+(-2)^2}}=\frac{|8+6+6-6|}{\sqrt{16+9+4}}=\frac{14}{29}\sqrt{29}.$$

Ответ: 4x-3y-2z=0;$\frac{4\sqrt{29}}{29}x-\frac{3\sqrt{29}}{29}y-\frac{2\sqrt{29}}{29}z-3\sqrt{2}=0$; $\frac{2x}{3}+\frac{y}{-2}+\frac{z}{-3}=1$;

20x-15y+23z-79=0; α≈64.4;$d=\frac{14}{29}\sqrt{29}$.

Задача 2

$\begin{cases} 7x+5y-2z+1=0, \\ x+y-3z+1=0. \end{cases}$

Запишем формулу кононического уравнения прямой l:

$\frac{x-x_0}{k}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$, где k,m,n координаты колониарного вектора прямой l т.е.$\vec{a}$||l;

$\vec{a}(k,m,n)$.

$x_{0,}y_{0,}z_0$ координаты некоторой точки К пренодлежащей прямой l:К($x_{0,}y_{0,}z_0¿$.

Исходя из системы уравнений заданной прямой можем записать координаты нармальных векторов $\vec{n_{1,}}\vec{n_2}$: $\vec{n_{1,}}(7;5;-2)$; $\vec{n_2}(1;1;-3)$

Обозначим плоскость$7x+5y-2z+1=0$ через α, а плоскость$x+y-3z+1=0$ через β.

Найдем координаты вектора $\vec{a}$:

Т.к.$\vec{n_1}\perp$ α → $\vec{n_1}$⊥l,а $\vec{n_2}\perp$ β → $\vec{n_2}$⊥l из этого следует что векторное произведение векторов $\vec{n}_1\times\vec{n}_2$ пароллельно l, из этого следует, что $\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\vec{a}$

$$\vec{a}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 7 & 5 & -2 \\ 1 & 1 & -3 \end{vmatrix}=\vec{i}*5*(-3)+\vec{j}*(-2)*1+\vec{k}*7*1-\vec{k}*5*1-\vec{j}*7*(-3)-\vec{i}*¿$$

$¿(-2)*1=-13\vec{i}+19\vec{j}+2\vec{k}$

$\vec{a}(-13;19;2)$

Найдем координаты точки К:

Пусть y=0 тогда:

$\begin{cases} 7x-2z=-1, \\ x-3z=-1 \end{cases}$выразим из нижнего уравнения x и подставим его значение в верхнее уравнение получим что : $7(3z-1)-2z=-1$; z=$\frac{6}{19}$ x=$\frac{-1}{19}$

K ($\frac{-1}{19}$;0;$\frac{6}{19}$)

$l:\frac{x+\frac{1}{19}}{-13}=\frac{y}{19}=\frac{z-\frac{6}{19}}{2}=t,$ кононическое уравнение.

$$\begin{cases} x=-13t-\frac{1}{19}, \\ y=19t, \\ z=2t+\frac{6}{19}. \end{cases}$$ параметрическое уравнение.

Т.к. точка М имеет координаты: М(2;0;3),а кононическое уравнение прямой l: $\frac{x+\frac{1}{19}}{-13}=\frac{y}{19}=\frac{z-\frac{6}{19}}{2}=t$,а прямая $l_1 \vee ¿$l то у них будет общий направляющий вектор $\vec{a}$ с координатами $\vec{a}(-13;19;2)$. Тогда используя кононическое уравнение прямой l_1;
$l_1:\frac{x-x_0}{k}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$получим:$\frac{x-2}{-13}=\frac{y}{19}=\frac{z-3}{2}=t$

$$\begin{cases} \frac{x-2}{-13}=t, \\ \frac{y}{19}=¿\frac{z-3}{2}=t. \end{cases} t, \begin{cases} x=-13t+2, \\ y=19t, \\ z=2t+3. \end{cases}$$

Используя кононическое уравнение прямой $l_1 u l$ координаты точки М(2;0;3), координаты некоторая точка К принадлежащая прямой l с координатами К($\frac{-1}{19}$;0;$\frac{6}{19}$), координаты направляющего вектора $\vec{a}(-13;19;2)$ и обозначив ростояние между прямыми$l_1 u l$, как МН. Найдем длину $MH=\frac{|\overrightarrow{MK}\times\vec{a}|}{|\vec{a}|}$ где $\overrightarrow{MK}$=(-$\frac{39}{19}$;0;-$\frac{51}{19}$)

$$\overrightarrow{MK}\times\vec{a}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{-39}{19} & 0 & \frac{-51}{19} \\ -13 & 19 & 2 \end{vmatrix}=¿$$

$$¿\vec{i}*0*2+\vec{j}*\left(\frac{-51}{19}\right)*(-13)+\vec{k}*\left(\frac{-39}{19}\right)*19-\vec{k}*0*(-13)-\vec{j}*\left(\frac{-39}{19}\right)*2-\vec{i}*$$
$$¿\left(\frac{-51}{19}\right)*19=51\vec{i}-39\vec{k}+39\vec{j}$$
$$\overrightarrow{MK}\times\vec{a}=(51;39;-39)$$
$$|\overrightarrow{MK}\times\vec{a}|=\sqrt{51^2+39^2+(-39)^2}=\sqrt{5643}$$
$$|\vec{a}|=\sqrt{(-13)^2+19^2+2^2}=\sqrt{534}$$
$$MH=\frac{\sqrt{5643}}{\sqrt{534}}=3,25.$$

Прямая lзаданна через систему $\begin{cases} 7x+5y-2z+1=0, \\ x+y-3z+1=0. \end{cases}$

Точкка М имеет координаты : М(2;0;3)

Через заданную точку проведем плоскость Q перпендикулярно данной прямой. Тогда точка пересечения будет являтся искомой проекцией. Состовляем уравнение плоскости проходящей через точку M(2;0;3) перпендикулярно прямой l. Зная координаты направляющего вектора$\vec{a}$, и т.к.l $\perp Q$, то $\vec{n}_1=\vec{a}=(-13;19;2)$

Используя уравнение плоскости проходящей через точку, перпендикулярно прямой $A(x-x¿¿0)+B(y-y¿¿0)+C(z-z¿¿0)=0,¿¿¿$ запишем уравнение плоскости Q:

-13(x+$\frac{1}{19}$)+19y+2(z-$\frac{6}{19}$¿=0,

-13x+9y+2z-$\frac{25}{19}$=0.

Обозначим точку пересечения прямой l и плоскости Q через S,и найдем ее координаты. Запишем параметрическое уравнение прямой l.

$$\begin{cases} x=-13t-\frac{1}{19}, \\ y=19t, \\ z=2t+\frac{6}{19}. \end{cases}$$

Подстовляем значения неизвесных в уравнение плоскости Q получим:

$-13*\left(-13t-\frac{1}{19}\right)+9*19t+2*\left(2t+\frac{6}{19}\right)-\frac{25}{19}=0,$

$119t+\frac{13}{19}+171t+4t+\frac{12}{19}-\frac{25}{19}=0,$

$344t+0=0,$

$t=0.$

Подстовляем значения t в параметрическое уравнение прямой:

$$\begin{cases} x=-13*0-\frac{1}{19}, \\ y=19*0, \\ z=2*0+\frac{6}{19}. \end{cases} \begin{cases} x=\frac{-1}{19}, \\ y=0, \\ z=\frac{6}{19}. \end{cases}$$

$S:\left(\frac{-1}{19};0;\frac{6}{19}\right).$

Используя уравнение плоскости P: 2x-5y-2z-6=0 можем записать координаты нармального вектора $\vec{n}$(2;-5;-2), а из кононического уравнения прямой l координаты направляющего вектора $\vec{a}(-13;19;2)$ и координаты точки K ($\frac{-1}{19}$;0;$\frac{6}{19}$) пренодлежащей прямой l. Запишем уравнение прямой l в параметрическом виде:

$$\begin{cases} x=-13t-\frac{1}{19}, \\ y=19t, \\ z=2t+\frac{6}{19}. \end{cases}$$

К параметрическому уравнению прямой добовляем уравнение плоскости P и решаем полученную систему:

$$\begin{cases} 2x-5y-2z-6=0, \\ x=-13t-\frac{1}{19}, \\ y=19t, \\ z=2t+\frac{6}{19}; \end{cases} \begin{cases} 2*(-13t-\frac{1}{19})-5*19t-2*(2t+\frac{6}{19})-6=0, \\ x=-13t-\frac{1}{19}, \\ y=19t, \\ z=2t+\frac{6}{19}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} t=\frac{-128}{2375}, \\ x=\frac{81}{125}\approx 0{,}628, \\ y=\frac{-128}{125}\approx -1{,}024, \\ z=\frac{26}{125}\approx 0{,}208. \end{cases}$$

Пусть А точка пересечения плоскости Р и прямой l тогда ее координаты равны:
A(0,648;-1,024;0,208).

Ответ: $::\frac{x+\frac{1}{19}}{-13}=\frac{y}{19}=\frac{z-\frac{6}{19}}{2}=t$; $\begin{cases} x=-13t-\frac{1}{19}, \\ y=19t, \\ z=2t+\frac{6}{19}. \end{cases}$; $\begin{cases} x=-13t+2, \\ y=19t, \\ z=2t+3. \end{cases}$ $;3,25;$ $S:\left(\frac{-1}{19};0;\frac{6}{19}\right)$;

A(0,648;-1,024;0,208).

Аналогическая геометрия

Задача 1
A(1;2) B(3;4) C(-1;2)

Используя формулу уравнений сторон треугольника по координатам его вершин составим уравнения сторон AB,AC,BC :

AB: $\frac{x-x_A}{x_B-x_A}=\frac{y-y_A}{y_B-y_A}\rightarrow\frac{x-1}{3-1}=\frac{y-2}{4-2}\rightarrow\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{2}\rightarrow 2x-2y-2=0;$

AC: $\frac{x-x_A}{x_C-x_A}=\frac{y-y_A}{y_C-y_A}\rightarrow\frac{x-1}{-1-1}=\frac{y-2}{2-2}\rightarrow\frac{x-1}{-2}=\frac{y-2}{0}\rightarrow -2y+4=0;$

$BC:\frac{x-x_B}{x_C-x_B}=\frac{y-y_B}{y_C-y_B}\rightarrow\frac{x-3}{-1-3}=\frac{y-4}{2-4}\rightarrow\frac{x-3}{-4}=\frac{y-4}{-2}\rightarrow -2x+4y-10=0.$

Обозначим медиану угла А как отрезок АA_1 где координаты точки А известны по условию, а координаты точки A_1 найдем по формуле определения координат середины отрезка:$x=\frac{x_{1+¿x_2}}{2}; y=\frac{y_1+y_2}{2}¿$

$x=\frac{3-1}{2}=1; y=\frac{4+2}{2}=3.$

Используя формулу уравнения медиана по координатам вершин треугольника составим уравнение медианы АA_1 :

$A A_1: \frac{x-x_A}{x_{A_1}-x_A}=\frac{y-y_A}{y_{A_1}-y_A} \rightarrow \frac{x-1}{1-1}=\frac{y-2}{3-2} \rightarrow \frac{x-1}{0}=\frac{y-2}{1} \rightarrow x-1=0.$

Используя формулу определения длины медиана по координатам вершин треугольника найдем длину медианы АA_1:

$$|AA_1|=\sqrt{(x_{A_1}-x_A)^2+(y_{A_1}-y_A)^2}=\sqrt{(1-1)^2+(3-2)^2}=\sqrt{0^2+(1)^2}=\sqrt{1}=1$$

Исходя из уравнения стороны ВС: $-2x+4y-10=0$ угловой кофициент ВС равен $k_{BC}=\frac{y_C-y_B}{x_C-x_B}=\frac{2-4}{-1-3}=0,5.$

Т.к. прямые ВС и $A A_2$перпендикулярны,то, зная угловой кофициент ВС, можем составить уравнение высоты $A A_2$:

$k_{BC}=0,5$

Отсюда угловой кофициент $A A_2$будет равен:$k_{A A_1}=\frac{-1}{k_{BC}}=\frac{-1}{0,5}=-2$ Можем записать уравнение высоты$A A_2$:

$y=k_{A A_1}x+b_{AA_1}$ отсюда y=-2x+b_{AA_1}

Точка А лежит на прямой $A A_2$значит ее координаты удовлетворяют уравнению прямой $A A_2$: 2=-2*1+b_{AA_1}, $отсюда\, b_{AA_1}=¿4$.

Таким образом уравнение высоты $A A_1$имеет вид:

-2x-y+4=0.

Используя формулу определения длины высоты по координатам вершин треугольника

найдем длину высоты AA_2:

$$|AA_2|=\frac{2S}{|BC|}=\frac{2*(0,5*(x_B-x_A)*(y_C-y_A)-(x_C-x_A)*(y_B-y_A))}{\sqrt{(x_C-x_B)^2+(y_C-y_B)^2}}=$$

$$¿\frac{2*(0,5*(3-1)*(2-2)-(-1-1)*(4-2))}{\sqrt{(-1-3)^2+(2-4)^2}}=\frac{2*0,5*2*0+2*2}{\sqrt{(-4)^2+(-2)^2}}=\frac{4}{\sqrt{20}}=\frac{2}{5}\sqrt{5}\approx 0,894$$

Обозначим точку пересечения биссектриса угла А и стороны ВС как A_3. Тогда, так как биссектриса внутреннего угла треугольника делит противоположную сторону в отношении, равном отношению двух прилежащих сторон (теорема о биссектрисе), и используя формулы для нахождения координат точки, делящей отрезок в данном отношении, имеем:

$$\lambda_A=\frac{|AB|}{|AC|}=\frac{2\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}.$$

$$A_3\left(\frac{x_B+\lambda_A*x_C}{1+\lambda_A};\frac{y_B+\lambda_A*y_C}{1+\lambda_A}\right)=\left(\frac{3+\sqrt{2}*(-1)}{1+\sqrt{2}};\frac{4+\sqrt{2}*2}{1+\sqrt{2}}\right)\approx(0,657;2,828).$$

Используя формулу прямой по двум точкам составим уравнение биссектриссы угла А

$$AA_3:\frac{x-x_A}{x_{A_3}-x_A}=\frac{y-y_A}{y_{A_3}-y_A}\rightarrow\frac{x-1}{0,657-1}=\frac{y-2}{2,828-2}\rightarrow$$

$$\frac{x-1}{-0,343}=\frac{y-2}{0,828}\rightarrow 0,828x-0,828=-0,343y+0,686\rightarrow$$

$$\rightarrow 0,828x+0,343y-¿1,514=0.$$

Используя формулу определения длины биссектрисы по координатам вершин треугольника найдем длину биссектрисы AA_3:

$$|AA_3|=\frac{\sqrt{|AB|*|AC|*((|AB|+|AC|)^2-|BC|^2)}}{|AB|+|AC|},$$ где $|AB|,|AC|,|BC|$ длины сторон АВ, АС, ВС

$$|AA_3|=\frac{\sqrt{|AB|*|AC|*((|AB|+|AC|)^2-|BC|^2)}}{|AB|+|AC|}=\sqrt{2\sqrt{2}*2*¿¿¿}$$

$$¿2\sqrt{20-14\sqrt{2}}\approx 0,897.$$

Используя формулу для состовления уравнений прямых проходящих через вершины треугольника и поролельных его сторонам по координатам вершин треугольника составим уравнения прямых А,В,С.

С пароллельна АВ: $\frac{x-x_A}{x_C-x_B}=\frac{y-y_A}{y_C-y_B}\rightarrow\frac{x-1}{-1-3}=\frac{y-2}{2-4}\rightarrow\frac{x-1}{-4}=\frac{y-2}{-2}\rightarrow x-2y+3=0;$

В пароллельна АС: $\frac{x-x_B}{x_C-x_A}=\frac{y-y_B}{y_C-y_A}\rightarrow\frac{x-3}{-1-1}=\frac{y-4}{2-2}\rightarrow\frac{x-3}{-2}=\frac{y-4}{0}\rightarrow y-4=0;$

$A\,пароллельна\,BC:\frac{x-x_C}{x_B-x_A}=\frac{y-y_C}{y_B-y_A}\rightarrow\frac{x-(-1)}{3-1}=\frac{y-2}{4-2}\rightarrow\frac{x+1}{2}=\frac{y-2}{2}\rightarrow x-y+3=¿$

¿0.

Ответ: $2x-2y-2=0;-2y+4=0;-2x+4y-10=0;x-1=0;1;$

-2x-y+4=0;0,894;0,828 x+0,343 $y-¿$1,514=0;0,897; $x-2y+3=0;y-4=0;$

$x-y+3=0.$

Задоча 2

A(2;0;3) B(1;0;7) C(0;1;3) D(2;2;4)

Найдем длины ребер АВ и АС:

$|AB|=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}=¿$

$¿\sqrt{(1-2)^2+(0-0)^2+(7-3)^2}=\sqrt{1+0+16}=\sqrt{17}\approx 4{,}123;$

$|AC|=\sqrt{(x_C-x_A)^2+(y_C-y_A)^2+(z_C-z_A)^2}=\sqrt{(0-2)^2+(1-0)^2+(3-3)^2}=$

$=\sqrt{4+1+0}=\sqrt{5}\approx 2{,}236.$

Вычислим угол между ребрами АВ и АС по теореме косинусов:

Угол(АВ,АС)= $\arccos\frac{|AB|^2+|AC|^2-|BC|^2}{2*|AB|*|AC|}=\arccos\frac{17+5-18}{2*\sqrt{17}*\sqrt{5}}=\arccos\left(\frac{2}{85}\sqrt{85}\right)\approx 1{,}352=¿$

$¿\left(\frac{1{,}352*180}{\pi}\right)^{\circ}\approx 77{,}4°.$

Вычислим площадь грани АВС:

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}\sqrt{\begin{vmatrix} y_B-y_A & z_B-z_A \\ y_C-y_A & z_C-z_A \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} x_B-x & z_B-z_A \\ x_C-x_A & z_C-z_A \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} x_B-x_A & y_B-y_A \\ x_C-x & y_C-y_A \end{vmatrix}^2}=¿$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{\begin{vmatrix}0-0 & 7-3\\ 1-0 & 3-3\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}1-2 & 7-3\\ 0-2 & 3-3\end{vmatrix}^2+\text{¿}\begin{vmatrix}1-2 & 0-0\\ 0-2 & 1-0\end{vmatrix}^2\text{¿}}=$$

$$\text{¿}\frac{1}{2}\sqrt{\begin{vmatrix}0 & 4\\ 1 & 0\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}-1 & 4\\ -2 & 0\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}-1 & 0\\ -2 & 1\end{vmatrix}^2}=\frac{1}{2}\sqrt{16+64+1}=\frac{9}{2}=4{,}5.$$

$S_{ABC}=4{,}5\,см^2.$

Найдем проекцию вектора $\overrightarrow{AB}$ на вектор $\overrightarrow{AC}$ по формуле:

Пр$оекция$ $\overrightarrow{AB}$ на $\overrightarrow{AC}=\frac{(\overrightarrow{AB}*\overrightarrow{AC})}{|\overrightarrow{AC}|}=\frac{|\overrightarrow{AB}|*|\overrightarrow{AC}|*\cos угла\,A}{|\overrightarrow{AC}|}=|\overrightarrow{AB}|*\cos угла\,A$

Угол A приблезительно равен $77{,}4°$, смотри выше по решению. Найдем длину вектора $\overrightarrow{AB}$

$$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}=\sqrt{(1-2)^2+(0-0)^2+(7-3)^2}=$$

$$\text{¿}\sqrt{1+0+16}=\sqrt{17}\approx 4{,}123.$$

Таким образом пр$оекция$ $\overrightarrow{AB}$ на $\overrightarrow{AC}$ равна $|\overrightarrow{AB}|*\cos 77{,}4°=\text{¿}4{,}123*(-0{,}417)=-1{,}722\text{¿}.$

Найдем обем пирамиды ABCD:

$$V=\frac{1}{6}\left|\begin{vmatrix}x_B-x_A & y_B-y_A & z_B-z_A\\ x_C-x_A & y_C-y_A & z_C-z_A\\ x_D-x_A & y_D-y_A & z_D-z_A\end{vmatrix}\right|=\frac{1}{6}\left|\begin{vmatrix}1-2 & 0-0 & 7-3\\ 0-2 & 1-0 & 3-3\\ 2-2 & 2-0 & 4-3\end{vmatrix}\right|=\frac{1}{6}\left|\begin{vmatrix}-1 & 0 & 4\\ -2 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 1\end{vmatrix}\right|=$$

$$\text{¿}\frac{1}{6}\left|(-1)*\begin{vmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{vmatrix}-0*\begin{vmatrix}-2 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}-2 & 1\\ 0 & 2\end{vmatrix}\right|=\frac{1}{6}|(-1)*1-0*(-2)+4*(-4)|=$$

$$\text{¿}\frac{1}{6}|-1-16|=\frac{17}{6}=2{,}833.$$

$V_{ABCD}=2{,}833\,см^3.$

Ответ:$4{,}123;\,2{,}236;\,77{,}4°;\,4{,}5\,см^2;\,-1{,}722;\,2{,}833\,см^3.$