Раздел № 1. Линейная алгебра

Задача 1, вариант 6

$$\begin{matrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 5 \end{matrix}$$

$\varphi_A(\lambda) = [A-\lambda E]$

$$\varphi_A(\lambda) = \begin{matrix} 4-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 4-\lambda & 0 \\ -1 & 1 & 5-\lambda \end{matrix}$$

$(4-\lambda)*(4-\lambda)*(5-\lambda) + (-1)*1*0 + 1*1*0 - (-1)*(4-\lambda)*0 - (4-\lambda)*1*0 - 1*1*(5-\lambda) =$
$(4-\lambda)^2*(5-\lambda) - (5-\lambda) = (16 - 8\lambda + \lambda^2)*(5-\lambda) - (5-\lambda) = 80 - 16\lambda - 40\lambda + 8\lambda^2 + 5\lambda^2 - \lambda^3 - 5 + \lambda = 75 - 55\lambda + 13\lambda^2 - \lambda^3$

$\varphi_A(\lambda) = -\lambda^3 + 13\lambda^2 - 55\lambda - 75$

$\varphi_A(\lambda) = 0$

$-\lambda^3 + 13\lambda^2 - 55\lambda - 75 = 0$

$(5-\lambda)*((4-\lambda)^2 - 1) = 0$

$5 - \lambda = 0$

$\lambda_1 = 5$

$(4-\lambda)^2 - 1 = 0$

$16 - 8\lambda + \lambda^2 - 1 = 0$

$\lambda^2 - 8\lambda + 15 = 0$

Найдем корни квадратного уравнения через дискриминант

$d = b^2 - 4ac$

$d = (-8)^2 - 4*1*15 = 64 - 60 = 4$

$$\lambda_2 = \frac{-b+\sqrt{d}}{2a} = \frac{8+\sqrt{4}}{2} = 5$$

$$\lambda_3 = \frac{-b-\sqrt{d}}{2a} = \frac{8-\sqrt{2}}{2} = 3$$

Таким образом, матрица имеет имеет два собственных значения $\lambda_1 = 5$ и $\lambda_2 = 3$.

Находим собственные векторы заданной матрицы:

$A\nu = \lambda\nu, \quad \nu \neq 0$

$$A = \begin{matrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 5 \end{matrix} \quad \nu_1 = \begin{matrix} x1 \\ x2 \\ x3 \end{matrix} \qquad \lambda_1 = 5$$

$$\begin{matrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 5 \end{matrix} * \begin{matrix} x1 \\ x2 \\ x3 \end{matrix} = 5 * \begin{matrix} x1 \\ x2 \\ x3 \end{matrix}$$

Получаем и решаем следующую систему:

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 = 5x_1 \\ x_1 + 4x_2 = 5x_2 \\ -x_1 + x_2 + 5x_3 = 5x_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 - 5x_1 = 0 \\ x_1 + 4x_2 - 5x_2 = 0 \\ -x_1 + x_2 + 5x_3 - 5x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 = 0 \\ \\ \end{cases}$$

$x_1 - x_2 = 0$
$-x_1 + x_2 = 0$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = x_2 \\ x_2 = x_2 \\ x_3 = x_3 \end{cases}, \quad x = \begin{cases} x_2 \\ x_2 \\ x_3 \end{cases}$$

Пусть $x_2 = 1$, $x_3 = 0$, тогда собственный вектор заданной матрицы $\nu_1 = \begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{matrix}$

Пусть x2 = 0, x3 = 1, тогда собственный вектор заданной матрицы $\nu_2 = \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{matrix}$

$$A = \begin{matrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 5 \end{matrix} \quad \nu_2 = \begin{matrix} x1 \\ x2 \\ x3 \end{matrix} \qquad \lambda_2 = 3$$

Получаем и решаем следующую систему:

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 = 3x_1 \\ x_1 + 4x_2 = 3x_2 \\ -x_1 + x_2 + 5x_3 = 3x_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 - 3x_1 = 0 \\ x_1 + 4x_2 - 3x_2 = 0 \\ -x_1 + x_2 + 5x_3 - 3x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_2 + x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ 2x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = x_1 \\ x_2 = -x_1 \end{cases}, \quad x = \begin{cases} x_1 \\ -x_1 \end{cases}$$

$x_3 = x_1 \qquad\qquad x_1$

Пусть $x_1 = 1$, тогда собственный вектор заданной матрицы $\nu_3 = \begin{matrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{matrix}$

Раздел № 1. Линейная алгебра

Задача 2, вариант 8

По теореме Кронера-Капелли система алгебраических уравнений совместима тогда и только тогда, когда ранг матрицы системы A равен рангу раширенной системы Ã, т.е. rang A = rang Ã.

Составим матрицу и расширенную матрицу системы

$$\begin{matrix} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 4 & -2 & 1 & 3 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 2 & 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 3 \\ 4 & -2 & 1 & 3 & 7 \end{matrix}$$

Т.к. размер полученных матриц 3x4 и 3x5, значит ранг обеих матриц не больше 3, т.е. rang A≤ 3, rang Ã ≤ 3.

Найдем ранг первой матрицы:

$$\begin{matrix} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 4 & -2 & 1 & 3 \end{matrix} \quad \text{1 строку делим на 2}$$

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 0,5 & 0,5 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 4 & -2 & 1 & 3 \end{matrix} \quad \text{от 3 строки отнимаем 1 строку, умноженную на 4}$$

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 0,5 & 0,5 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \end{matrix} \quad \text{2 строку делим на 2}$$

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 0,5 & 0,5 \\ 0 & 1 & 0,5 & -0,5 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \end{matrix} \quad \text{к 3 строке прибавляем 2 строку, умноженную на 2}$$

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 0,5 & 0,5 \\ 0 & 1 & 0,5 & -0,5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} \quad \text{, т.к. ненулевых строк 2, то rang A = 2}$$

Найдем ранг расширенной матрицы:

$$\begin{matrix} 2 & 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 3 \\ 4 & -2 & 1 & 3 & 7 \end{matrix} \quad \text{1 строку делим на 2}$$

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 0,5 & 0,5 & 2,5 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 3 \\ 4 & -2 & 1 & 3 & 7 \end{matrix} \quad \text{от 3 строки отнимаем 1 строку, умноженную на 4}$$

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 0,5 & 0,5 & 2,5 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & -1 & 1 & -3 \end{matrix}$$ 2 строку делим на 2

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 0,5 & 0,5 & 2,5 \\ 0 & 1 & 0,5 & -0,5 & 1,5 \\ 0 & -2 & -1 & 1 & -3 \end{matrix}$$ к 3 строке прибавляем 2 строку, умноженную на 2

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 0,5 & 0,5 & 2,5 \\ 0 & 1 & 0,5 & -0,5 & 1,5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$, т.к. ненулевых строк 2, то rang Ã = 2

Так как rang A = rang Ã, то согласно теореме Кронера-Капелли заданная система алгебраических уравнений совместима. Так как ранги обеих систем меньше 4 (числа неизвестных), данная система имеет бесконечное количество решений.

Решение заданной системы уравнений методом Крамера и средствами матричного исчисления невозможно, т.к. матрица из данной системы не является квадратной (количество уравнений не равно числу неизвестных).

Решим заданную систему методом Гаусса:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_3 + x_4 = 5 \\ 2x_2 + x_3 - x_4 = 3 \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 7 \end{cases}$$ 1 строку умножаем на 2 и вычитаем из строки 3

$$\begin{cases} 2x_1 + x_3 + x_4 = 5 \\ 2x_2 + x_3 - x_4 = 3 \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 - 4x_1 - 2x_3 - 2x_4 = 7 - 10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_3 + x_4 = 5 \\ 2x_2 + x_3 - x_4 = 3 \\ - 2x_2 - x_3 + x_4 = -3 \end{cases}$$ 2 строку вычитаем из строки 3

$$\begin{cases} 2x_1 + x_3 + x_4 = 5 \\ 2x_2 + x_3 - x_4 = 3 \\ - 2x_2 - x_3 + x_4 + 2x_2 + x_3 - x_4 = -3 + 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_3 + x_4 = 5 \\ 2x_2 + x_3 - x_4 = 3 \end{cases}$$

Из уравнения первой подсистемы найдем x_1:

$x_1 = 2,5 - 0,5x_3 - 0,5x_4$

Из уравнения второй подсистемы найдем x_2:

$x_2 = 1,5 - 0,5x_3 + 0,5x_4$

Ответ:

$x_1 = 2,5 - 0,5x_3 - 0,5x_4$
$x_2 = 1,5 - 0,5x_3 + 0,5x_4$
$x_3 = x_3$
$x_4 = x_4$

Раздел № 1. Линейная алгебра

Задача 3, вариант 3

По теореме Кронера-Капелли система алгебраических уравнений совместима тогда и только тогда, когда ранг матрицы системы A равен рангу раширенной системы Ã, т.е. rang A = rang Ã.

Составим матрицу и и найдем ее ранг:

$$\begin{matrix} 1 & 4 & -3 & 6 \\ 2 & 5 & 3 & -2 \\ 1 & 7 & -10 & 20 \end{matrix}$$ из 2 строки вычитаем 1 строку, умноженную на 2

$$\begin{matrix} 1 & 4 & -3 & 6 \\ 0 & -3 & 9 & -14 \\ 1 & 7 & -10 & 20 \end{matrix}$$ из 3 строки вычитаем 1 строку

$$\begin{matrix} 1 & 4 & -3 & 6 \\ 0 & -3 & 9 & -14 \\ 0 & 3 & -7 & 14 \end{matrix}$$ 2 строку делим на -3

$$\begin{matrix} 1 & 4 & -3 & 6 \\ 0 & 1 & -3 & \frac{-14}{3} \\ 0 & 3 & -7 & 14 \end{matrix}$$ из 3 строки вычитаем 2 строку, умноженную на 3

$$\begin{matrix} 1 & 4 & -3 & 6 \\ 0 & 1 & -3 & \frac{-14}{3} \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{matrix}$$ 3 строку делим на 2

$$\begin{matrix} 1 & 4 & -3 & 6 \\ 0 & 1 & -3 & \frac{-14}{3}, \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{matrix}$$ т.к. ненулевых строк 3, то rang A = 3

Составим расширенную матрицу и найдем ее ранг:

$$\begin{matrix} 1 & 4 & -3 & 6 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & -2 & 0 \\ 1 & 7 & -10 & 20 & 0 \end{matrix}$$ из 2 строки вычитаем 1 строку, умноженную на 2

$$\begin{matrix} 1 & 4 & -3 & 6 & 0 \\ 0 & -3 & 9 & -14 & 0 \\ 1 & 7 & -10 & 20 & 0 \end{matrix}$$ из 3 строки вычитаем 1 строку

$$\begin{matrix} 1 & 4 & -3 & 6 & 0 \\ 0 & -3 & 9 & -14 & 0 \\ 0 & 3 & -7 & 14 & 0 \end{matrix}$$ 2 строку делим на -3

$$\begin{matrix} 1 & 4 & -3 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & \frac{-14}{3} & 0 \\ 0 & 3 & -7 & 14 & 0 \end{matrix}$$ из 3 строки вычитаем 2 строку, умноженную на 3

$$\begin{matrix} 1 & 4 & -3 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & \frac{-14}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \end{matrix}$$ 3 строку делим на 2

$$\begin{matrix} 1 & 4 & -3 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & \frac{-14}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{matrix},$$ т.к. ненулевых строк 3, то то rang Ã = 3

Так как rang A = rang Ã, то согласно теореме Кронера-Капелли заданная система алгебраических уравнений совместима. Так как ранги обеих систем меньше 4 (числа неизвестных), данная система имеет бесконечное количество решений.

Решим заданную систему методом Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 6x_4 = 0 \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \\ x_1 + 7x_2 - 10x_3 + 20x_4 = 0 \end{cases}$$ 1 строку умножаем на 2 и вычитаем из 2 строки

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 6x_4 = 0 \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 - 2x_4 - 2x_1 - 8x_2 + 6x_3 - 12x_4 = 0 \\ x_1 + 7x_2 - 10x_3 + 20x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 6x_4 = 0 \\ -3x_2 + 7x_3 - 14x_4 = 0 \\ x_1 + 7x_2 - 10x_3 + 20x_4 = 0 \end{cases}$$ из 3 строки вычитаем 1 строку

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 6x_4 = 0 \\ -3x_2 + 7x_3 - 14x_4 = 0 \\ x_1 + 7x_2 - 10x_3 + 20x_4 - x_1 - 4x_2 + 3x_3 - 6x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 6x_4 = 0 \\ -3x_2 + 7x_3 - 14x_4 = 0 \\ 3x_2 - 7x_3 + 14x_4 = 0 \end{cases}$$ из 2 строки вычитаем 3 строку, умноженную на -1

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 6x_4 = 0 \\ -3x_2 + 7x_3 - 14x_4 + 3x_2 - 7x_3 + 14x_4 = 0 \\ 3x_2 - 7x_3 + 14x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 6x_4 = 0 \\ 3x_2 - 7x_3 + 14x_4 = 0 \end{cases}$$

Из уравнения второй подсистемы найдем x_2:

$3x_2 = 7x_3 - 14x_4$

$x_2 = \frac{7}{3}x_3 - \frac{14}{3}x_4$

Из уравнения первой подсистемы найдем x_1:

$x_1 = -4*(\frac{7}{3}x_3 - \frac{14}{3}x_4) + 3x_3 - 6x_4$

$x_1 = -\frac{28}{3}x_3 + \frac{56}{3}x_4 + 3x_3 - 6x_4$

$x_1 = -\frac{28}{3}x_3 + \frac{56}{3}x_4 + 3x_3 - 6x_4$

$x_1 = -\frac{19}{3}x_3 + \frac{38}{3}x_4$

Ответ: $x_1 = -\frac{19}{3}x_3 + \frac{38}{3}x_4$

$x_2 = \frac{7}{3}x_3 - \frac{14}{3}x_4$

$x_3 = x_3$

$x_4 = x_4$

Раздел № 2. Векторная алгебра

Задача 1, вариант 6

Для нахождения общего уравнения плоскости P по координатам точки A (4;5;2) и вектора нормали $\overrightarrow{BC}$ найдем координаты вектора нормали $\vec{n}$:

$\overrightarrow{BC} = \{C_x - B_x;\ C_y - B_y;\ Cz - B_z\} = \{-1 - 3;\ 4 - 0;\ 2 - 1\} = \{-4;4;1\}$

Для составления общего уравнения плоскости используем формулу:

$\vec{n}_x*(x - x_a) + \vec{n}_y * (y - y_b) + \vec{n}_z * (z - z_c) = 0$

$-4 * (x - 4) + 4 * (y - 5) + 1 * (z - 2) = 0$

$-4x + 16 + 4y - 20 + z - 2 = 0$

$-4x + 4y + z - 6 = 0$

Для составления нормального уравнения плоскости из общего уравнения плоскости, необходимо выполнение одновременно двух условия:

1. Длина нормали $\vec{n}$ должна находиться по формуле $open\vec{n}\ |= \sqrt{\cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma}$ и быть равной 1, где α – абсцисса нормали, β – ордината нормали, γ – аппликата нормали;
2. D (в нашем уравнении - 6) должно быть положительным числом.

Так как длина нормали в заданном уравнении не равна 1, а D является отрицательным числом, нормальное уравнение не может быть составлено.

Полученное общее уравнение плоскости является полным, следовательно мы можем перевести его в уравнение плоскости в отрезках:

$-4x + 4y + z = 6$, разделим обе части уравнения на 6

$$\frac{x}{-3/2} + \frac{y}{3/2} + \frac{z}{6} = 1$$

Составим общее уравнение P_1 по координата точек A (4;5;2) , B (3;0;1) и C (-1;4;2), используя формулу:

$$\begin{matrix} x-xa & y-ya & z-za \\ xb-xa & yb-ya & zb-za \\ xc-xa & yc-ya & zc-za \end{matrix} = 0$$

$$\begin{matrix} x-4 & y-5 & z-2 \\ 3-4 & 0-5 & 1-2 \\ -1-4 & 4-5 & 2-2 \end{matrix} = 0$$

$$\begin{matrix} x-4 & y-5 & z-2 \\ -1 & -5 & -1 \\ -5 & -1 & 0 \end{matrix} = 0$$

(x – 4)*(-5*0 – (-1)*(-1)) – (y – 5)*(-1*0 – (-1)*(-5)) + (z – 2)*(-1*(-1) – (-5)*(-5)) = 0
(x – 4)*(-1) – (y – 5)*(-5) + (z – 2)*(-24) = 0
-x + 4 + 5y – 25 – 24z + 48 = 0
-x + 5y – 24z + 27 = 0

Имея общие уравнении обеих плоскостей, найдем угол между ними по формуле:

$\cos\varphi = |-4*(-1) + 4*5 + 1*(-24)| / \sqrt{(-4)*(-4)+4*4+1*1} * \sqrt{-1*(-1)+5*5+(-24)*(-24)} = |4 + 20 - 24| / \sqrt{33} * \sqrt{602} = 0 / \sqrt{19866} = 0$

Так как косинус угла между плоскостями равен 0, то угол равен 90^o и эти плоскости перпендикулярны друг друг.

Найдем расстояние от точки D (5;7;8) до плоскости P (-4x + 4y + z – 6 = 0) по формуле:

$d = |-4*5 + 4*7 + 8*1 - 6| / \sqrt{(-4)*(-4)+4*4+1*1} = 10/\sqrt{33}$

Ответ: -4x + 4y + z – 6 = 0 – общее уравнение P

$\frac{x}{-3/2} + \frac{y}{3/2} + \frac{z}{6} = 1$ – уравнение плоскости P в отрезках

-x + 5y – 24z + 27 = 0 – общее уравнение P_1

90^o угол между плоскостями P и P_1

$10/\sqrt{33}$ - расстояние между плоскостями.

Раздел № 2. Векторная алгебра

Задача 2, вариант 8

Найдем точку F, принадлежащую прямой l:

Пусть z = 0, тогда получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x + y - 2 = 0 \\ 2x - y + 6 = 0 \end{cases}$$

Из первой строки находим y = 2 – 2x и подставляем это значение во вторую строку
2x – (2 – 2x) + 6 = 0
4x + 4 = 0
x = - 1, тогда y = 2 + 2 = 4
Точка F (-1;4;0) принадлежит прямой l.

Найдем координаты направляющего вектора $\overline{S}$ прямой *l*. Так как он должнен быть перпендикулярен нормалям $\overline{N1}$ (2;1;-3) и $\overline{N2}$ (2;-1;1), $\overline{S} = \overline{N1} * \overline{N2}$

$$\overline{S} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = i * \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - j * \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + k * \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -2i - 8j - 4k$$

Подставляем полученные данные в формулу канонического уравнения и получаем:

$$\frac{x+1}{-2} = \frac{y-4}{-8} = \frac{z}{-4}$$

Имея каноническое уравнение прямой и координаты точки F, принадлежащей этой прямой, составим параметрическое уравнение:

$$\begin{cases} x = -2t - 1 \\ y = -8t + 4 \\ z = -4t \end{cases}$$

Направляющим вектором прямой *l* является вектор $\overline{S}$ (-2;-8;-4). Так как прямая l_1 параллельна прямой *l*, ее направляющий вектор будет иметь такие же координаты, что и направляющий вектор прямой l. По условия прямая l_1 проходит через точку М (-1;0;3), значит ее каноническое уравнение будет иметь вид:

$$\frac{x+1}{-2} = \frac{y}{-8} = \frac{z-3}{-4}$$

Прямая l проходит через точку F (-1;4;0), прямая l_1 проходит через точку М (-1;0;3), направляющий вектор прямой l_1 имеет координаты $\overline{b}$ (-2;-8;-4).

Определим координаты вектора $\overline{MF}$ (-1+1;0-4;3-0) = (0;-4;3).

Найдем веркторное произведение векторов $\overline{b}$ и $\overline{MF}$:

$$\overline{b} * \overline{MF} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -2 & -8 & -4 \\ 0 & -4 & 3 \end{vmatrix} = i * \begin{vmatrix} -8 & -4 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} - j * \begin{vmatrix} -2 & -4 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} + k * \begin{vmatrix} -2 & -8 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = -40i + 6j + 8k$$

Применим формулу расчета расстояния от точки до прямой в пространстве:

$\sqrt{1600+36+64}$ / $\sqrt{4+64+16}$ = $\sqrt{164}/\sqrt{84}$ = $10\sqrt{17}/\sqrt{21}$

Для нахождения проекции точки М на прямую l запишем уравнение плоскости P_1. Для этого определим координаты нормального вектора плоскости P_1. Координаты направляющего вектора $\overline{S}$ *прямой* l (-2;-8;-4). Он будет являться нормальным вектором плоскости Р, перпендикулярной прямой l. Тогда уравнение плоскости P_1 будет иметь вид:

-2 * (x – (-1)) - 8 * (y – 0) – 4 * (z – 3) = 0

-2x – 2 – 8y – 4z + 12 = 0

-2x – 8y – 4z + 10 = 0

Чтобы найти точки пересечения прямой l и плоскости P_1, решим систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x + y - 3z - 2 = 0 \\ 2x - y + z + 6 = 0 \\ -2x - 8y - 4z + 10 = 0 \end{cases}$$ из 2 строки вычитаем 1 строку

$$\begin{cases} 2x + y - 3z - 2 = 0 \\ 2x - y + z + 6 - 2x - y + 3z + 2 = 0 \\ -2x - 8y - 4z + 10 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + y - 3z - 2 = 0 \\ - 2y + 4z + 8 = 0 \\ -2x - 8y - 4z + 10 = 0 \end{cases}$$ из строки вычитаем 1 строку, умноженную на -1

$$\begin{cases} 2x + y - 3z - 2 = 0 \\ - 2y + 4z + 8 = 0 \\ -2x - 8y - 4z + 10 + 2x + y - 3z - 2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + y - 3z - 2 = 0 \\ - 2y + 4z + 8 = 0 \\ - 7y - 7z + 8 = 0 \end{cases}$$

Из 3 уравнения системы найдем z:

$z = \frac{8}{7} - y$

Из 2 уравнения системы найдем y:

$-2y + 4 * (\frac{8}{7} - y) + 8 = 0$

$-2y + \frac{32}{7} - 4y + 8 = 0$

$-6y + \frac{88}{7} = 0$

$6y = \frac{88}{7}$

$y = \frac{44}{21}$

$z = \frac{8}{7} - \frac{44}{21}$

$z = - \frac{20}{21}$

$2x + \frac{44}{21} - 3 * (-\frac{20}{21}) - 2 = 0$

$2x + \frac{2}{21} + \frac{60}{21} = 0$

$2x + \frac{62}{21} = 0$

$x = - \frac{31}{21}$

Таким образом, координаты проекции точки М на прямую l $(-\frac{31}{21}; \frac{44}{21}; -\frac{20}{21})$.

Для нахождения точки пересечения прямой l и плоскости Р составим и решим систему уравнений:

$\begin{cases} 2x + y - 3z - 2 = 0 \\ 2x - y + z + 6 = 0 \\ x - 2y + 5z - 6 = 0 \end{cases}$ из 2 строки вычитаем 1 строку

$\begin{cases} 2x + y - 3z - 2 = 0 \\ 2x - y + z + 6 - 2x - y + 3z + 2 = 0 \\ x - 2y + 5z - 6 = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} 2x + y - 3z - 2 = 0 \\ -2y + 4z + 8 = 0 \\ x - 2y + 5z - 6 = 0 \end{cases}$ из 3 строки вычитаем 1 строку, деленную на 2

$\begin{cases} 2x + y - 3z - 2 = 0 \\ -2y + 4z + 8 = 0 \\ x - 2y + 5z - 6 - x - \frac{1}{2} y + \frac{3}{2} z + 1 = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} 2x + y - 3z - 2 = 0 \\ -2y + 4z + 8 = 0 \\ -\frac{5}{2}y + \frac{13}{2} z - 5 = 0 \end{cases}$ из 3 строки вычитаем 2 строку,деленную на 4 и умноженную на 5

$\begin{cases} 2x + y - 3z - 2 = 0 \\ -2y + 4z + 8 = 0 \\ -\frac{5}{2}y + \frac{13}{2} z - 5 + \frac{5}{2} y - 5z - 10 = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} 2x + y - 3z - 2 = 0 \\ -2y + 4z + 8 = 0 \\ \frac{3}{2} z - 15 = 0 \end{cases}$

Из уравнения 3 строки находим значение:

$z = 15 * \frac{2}{3} = 10$

Из уравнения 2 строки находим значение y:
-2y + 4*10 + 8 = 0
-2y + 48 = 0
y = 24
Из уравнения 1 строки находим значение x:
2x + 24 – 3*10 – 2 = 0
2x – 8 = 0
x = 4
Таким образом, прямая *l* пересекается с плоскостью P в точке с координатами (4;24;10).

Ответ: $\frac{x+1}{-2} = \frac{y-4}{-8} = \frac{z}{-4}$

$$\begin{cases} x = -2t - 1 \\ y = -8t + 4 \\ z = -4t \end{cases}$$

$\frac{x+1}{-2} = \frac{y}{-8} = \frac{z-3}{-4}$

$10\sqrt{17}/\sqrt{21}$

$(-\frac{31}{21}; \frac{44}{21}; -\frac{20}{21})$

(4;24;10)

Раздел № 3. Аналитическая геометрия

Задача 1, вариант 3

Составим уравнение прямой AB, проходящей через точку A (-3;1) и точку B (-2;4):
y = kx + b
Подставляем в формулу коорди6наты точек и получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} 1 = k * (-3) + b \\ 4 = k * (-2) + b \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3k + b = 1 \\ -2k + b = 4 \end{cases}$$

Из 1 уравнения системы находим b = 1 + 3k и подставляем это значение во 2 уравнение:
-2k + 1 + 3k = 4
k + 1 = 4
k = 3, тогда b = 1 + 3*3 = 10
Таким образом, уравнение стороны **AB y = 3x + 10.**
Составим уравнение прямой AC, проходящей через точку A (-3;1) и точку C (1;3):

$$\begin{cases} 1 = k * (-3) + b \\ 3 = k * 1 + b \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3k + b = 1 \\ k + b = 3 \end{cases}$$

Из 1 уравнения системы находим b = 1 + 3k и подставляем это значение во 2 уравнение:
k + 1 + 3k = 3
4k = 2

$k = \frac{1}{2}$, тогда $b = 1 + 3 * \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$

Таким образом, уравнение стороны **AC** $\mathbf{y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}}$**.**

Составим уравнение прямой BC, проходящей через точку B (-2;4) и точку C (1;3):

$$\begin{cases} 4 = k * (-2) + b \\ 3 = k * 1 + b \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2k + b = 4 \\ k + b = 3 \end{cases}$$

Из 1 уравнения системы находим $b = 4 + 2k$ и подставляем это значение во 2 уравнение:

$k + 4 + 2k = 3$

$3k = -1$

$k = -\frac{1}{3}$, тогда $b = 4 + 2 *(-\frac{1}{3}) = \frac{10}{3}$

Таким образом, уравнение стороны **BC** $\mathbf{y = -\frac{1}{3}x + \frac{10}{3}}$**.**

Для нахождения уравнения медианы угла A найдем координаты точки C_1 - середины отрезка BC:

$x_{C1} = \frac{-2+1}{2} = -\frac{1}{2}$; $y_{C1} = \frac{4+3}{2} = \frac{7}{2}$.

Таким образом, медиана угла A проходит через точку A (-3;1) и точку C_1 $(-\frac{1}{2}; \frac{7}{2})$:

$$\begin{cases} 1 = -3k + b \\ \frac{7}{2} = -\frac{1}{2}k + b \end{cases}$$

Из 1 уравнения системы найдем $b = 1 + 3k$ и подставим это значение во 2 уравнение:

$\frac{7}{2} = -\frac{1}{2}k + 1 + 3k$

$\frac{7}{2} = \frac{5}{2}k + 1$

$k = \frac{5}{2} / \frac{5}{2}$

$k = 1$, тогда $b = 1 + 3*1 = 4$.

Уравнение медианы угла A $\mathbf{y = x + 4}$**.**

Найдем длину медианы AC_1, используя известные координаты точек A и C_1:

$AC_1 = \sqrt{(\frac{-1}{2}+3)^2 + (\frac{7}{2}-1)^2} = \sqrt{\frac{25}{4}+\frac{25}{4}} = \sqrt{\frac{50}{4}} = \frac{5}{2}\sqrt{2}$

Высота, проведенная из угла A, пересекает сторону BC, которая умеет уравнение $\mathbf{y = -\frac{1}{3}x + \frac{10}{3}}$**.**

Угловой коэффициент k_2 прямой, пепендикулярной стороне BC, равен:

$k_2 = -1 / k = -1 / -\frac{1}{3} = 3$, значит уравнение высоты к стороне BC:

$y = 3x + b$

Подставляем в уравнение координаты точки A (-3;1) и получаем:

$$\begin{cases} 1 = 3*(-3) + b \\ b = 10 \end{cases}$$

Таким образом, уравнение высоты угла A $\mathbf{y = 3x + 10}$**.**

Зная уравнение высоты и уравнение стороны BC треугольника, находим координаты точки их пересечения C_2:

$y = 3x + 10$

$y = -\frac{1}{3}x + \frac{10}{3}$ приравниваем правые части обоих уравнений

$3x + 10 = -\frac{1}{3}x + \frac{10}{3}$

$\frac{10}{3}x = -\frac{20}{3}$

x = -2, тогда y = 3*(-2) + 10 = 4.

Таким образом, высота угла A пересекает прямую BC в точке C_2 (-2;4).

Найдем длину высоты AC_1, используя известные координаты точек A и C_1:

$AC_2 = \sqrt{(-2+3)^2+(4-1)^2} = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$.

Для нахождения уравнение биссектрисы угла A подставляем уравнения прямых AB и AC в формулу биссектрис угла:

$3x - y + 10 / \sqrt{3^2+(-1)^2} = \pm (\frac{1}{2}x - y + \frac{5}{2}) / \sqrt{\frac{\frac{1}{2}*1}{2}+1^2}$

$3x - y + 10 / \sqrt{10} = \pm (\frac{1}{2}x - y + \frac{5}{2}) / \sqrt{\frac{5}{4}}$

$3x - y + 10 / \sqrt{10} = \pm x - 2y + 5 / \sqrt{5}$

$3x - y + 10 = \pm \sqrt{2} * (x - 2y + 5)$

$3x - y + 10 = \pm\sqrt{2}x - 2\sqrt{2}y + 5\sqrt{2}$

Получаем 2 уравнения:

$3x - y + 10 = \sqrt{2}x - 2\sqrt{2}y - 5\sqrt{2}$

$3x - y + 10 - \sqrt{2}x + 2\sqrt{2}y - 5\sqrt{2} = 0$

$1{,}59x + 1{,}83y + 2{,}93 = 0$

$3x - y + 10 = -\sqrt{2}x + 2\sqrt{2}y - 5\sqrt{2}$

$3x - y + 10 + \sqrt{2}x - 2\sqrt{2}y + 5\sqrt{2} = 0$

$4{,}41x - 3{,}83y + 17{,}07 = 0$

Одно из этих уравнений является уравнением биссектрисы внутреннего угла BAC, а другое – внешнего.

От биссектрисы углы B и C лежат по разные стороны, значит подстановка их координат в уравнение биссектрисы дает нам разные знаки, т.е.

B (-2;4): 1,59*(-2) + 1,83*4 + 2,93 >0

C (1;3): 1,59*1 + 1,83*4 + 2,93¿0, т.е 1 уравнение не соответстует условиям и является уравнением внешнего угла A.

B (-2;4): 4,41*(-2) – 3,83*4 + 17,07 < 0

C (1;3): 4,41*1-3,83*3 + 17,07 > 0, т.е. 2 уравнение соответствует условиям и является уравнением внутреннего угла A.

Зная уравнение биссектрисы и уравнение стороны BC треугольника, находим координаты точки их пересечение C_3:

$$\begin{cases} y = -\frac{1}{3}x + \frac{10}{3} \\ 3x - y + 10 = -\sqrt{2}x + 2\sqrt{2}y - 5\sqrt{2} \end{cases}$$

Подставляем значение y во 2 уравнение системы:

$3x + \frac{1}{3}x - \frac{10}{3} + 10 = -\sqrt{2}x + 2\sqrt{2} * (-\frac{1}{3}x + \frac{10}{3}) - 5\sqrt{2}$

$\frac{10}{3}x + \frac{20}{3} + \frac{5}{3}\sqrt{2}x - \frac{5}{3}\sqrt{2} = 0$

$10x + 20 + 5\sqrt{2}x - 5\sqrt{2} = 0$

5x*(2+$\sqrt{2}$¿¿ = $5\sqrt{2} - 20$

x = $3\sqrt{2} - 5$

y = $-\frac{1}{3} * (3\sqrt{2} - 5) + \frac{10}{3}$

y = $5 - \sqrt{2}$

Таким образом, биссектриса AC_3 пересекает сторону BC в точке C_3 ($3\sqrt{2} - 5; 5 - \sqrt{2}$).

Найдем длину биссектрисы AC_3, используя известные координаты точек A и C_3:

AC3 = $\sqrt{(3\sqrt{2}\text{¿}-5+3)^2+(5-\sqrt{2}-1)^2\text{¿}}$ = $\sqrt{(3\sqrt{2}-2)^2+(4-\sqrt{2})^2}$= $\sqrt{18-12\sqrt{2}+4+16-8\sqrt{2}+2}$ = $\sqrt{40-20\sqrt{2}} = 2\sqrt{10-5\sqrt{2}}$

Найдем уравнения прямых, параллельных сторонам и проходящим через вершины треугольника:

Прямая, параллельная стороне AB, проходит через точку C (1;3) и имеет угловой коэффициент k = 3, тогда находим коэффициент b:

3 = 3*1+b

b = 0

Уравнение прямой будет иметь вид y = 3x

Прямая, параллельная стороне AC, проходит через точку B (-2;4) и имеет угловой коэффициент $k = \frac{1}{2}$, тогда находим коэффициент b:

$4 = \frac{1}{2} * (-2) + b$

b = 5

Уравнение прямой будет иметь вид $y = \frac{1}{2}x + 5$

Прямая, параллельная стороне BC, проходит через точку A (-3;1) и имеет угловой коэффициент $k = -\frac{1}{3}$, тогда находим коэффициент b:

$1 = -\frac{1}{3} * (-3) + b$

b = 0

Уравнение прямой будет иметь вид $y = -\frac{1}{3}x$

Ответ: $y = 3x + 10;\ y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2};\ y = -\frac{1}{3}x + \frac{10}{3}$

$y = x + 4;\ \frac{5}{2}\sqrt{2}$

$y = 3x + 10;\ \sqrt{10}$

$3x - y + 10 + \sqrt{2}x - 2\sqrt{2}y + 5\sqrt{2} = 0;\ 2\sqrt{10-5\sqrt{2}}$

$y = 3x;\ y = \frac{1}{2}x + 5;\ y = -\frac{1}{3}x$

Раздел № 3. Аналитическая геометрия

Задача 2, вариант 6

1) Найдем длину отрезка AB, зная координаты точки A (0;2;-1) и точки B (-1;2;3):

$AB = \sqrt{(x_b-x_a)^2+(y_b-y_a)^2+(z_b-z_a)^2} = \sqrt{(-1-0)^2+(2-2)^2+(3-(-1))^2} = \sqrt{1+0+16} = \sqrt{17}$

Найдем длину отрезка AC, зная координаты точки A (0;2;-1) и точки C (-2;3;-1):

$AC = \sqrt{(x_b-x_a)^2+(y_b-y_a)^2+(z_b-z_a)^2} = \sqrt{(-2-0)^2+(3-2)^2+(-1-(-1))^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$

2) Найдем вектор $\overrightarrow{AB}$ по координатам точки A (0;2;-1) и точки B (-1;2;3):

$\overrightarrow{AB}$ = {Bx – Ax; By – Ay; Bz – Az} = {-1-0; 2-2; 3 – (-1)} = {-1;0;4}

Найдем вектор $\overrightarrow{AC}$ по координатам точек A (0;2;-1) и C (-2;3;-1):
$\overrightarrow{AC}$= {Cx – Ax; Cy – Ay; Cz – Az} = {-2-0; 3-2; -1 - (-1)} = {-2;1;0}
Найдем скалярное произведение векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ по формуле:
$\overline{AB} * \overline{AC} = AB_x * AC_y* + AB_y * AC_y + AB_z * AC_z = -1*(-2) + 0*1+4*0 = 2$
Найдем угол между векторами:
$\cos BAC = \frac{\overline{AB}*\overline{AC}}{¿AB∨¿∨AC∨¿¿} = \frac{2}{\sqrt{17}*\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{85}} \approx 0.21693045781865616$, значит угол BAC ≈ 77.47119229084849°.

3) Для нахождения площади треугольника ABC используем формулу:

$S = \frac{1}{2}$ |AB * AC|

Найдем векторное произведение векторов AB и AC:

$\bar{c} = \overline{AB} * \overline{AC}$

$$\overline{AB} * \overline{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 0 & 4 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = i * (0*0 – 1*4) – j * (-1*0 – (-2)*4 + k * (-1*1- (-2)*0) = -4i - 8j – k$$

={-4;-8;-1}.

Найдем длину (модуль) вектора $\bar{c}$:

$|\bar{c}| = \sqrt{c_x^2+¿c_y^2+c_z^2¿} = \sqrt{(-4)^2+(-8)^2+(-1)^2} = \sqrt{16+64+1} = \sqrt{81} = 9$

$S = \frac{1}{2} * 9 = 4.5.$

4) Для нахождения проекции вектора $\overrightarrow{AB}$ на вектора $\overrightarrow{AC}$ применим формулу:

$Пр_a b = \frac{a*b}{¿a∨¿¿}$

Скалярное произведение векторов a*b = 2, $|a| = \sqrt{(-1)^2+0^2+4^2} = \sqrt{1+16} = \sqrt{17}$

Найдем длину (модуль) вектора |a|:
$|a| = \sqrt{a_x^2+¿a_y^2+a_z^2¿} = \sqrt{(-1)^2+0^2+4^2} = \sqrt{17}$, тогда
$Пр_a b = \frac{2}{\sqrt{17}}$

5) Объем пирамиды можно найти по формуле:

$V = \frac{1}{6} |\overline{AB}*\overline{AC}*\overline{AD}∨¿$

Найдем вектор $\overrightarrow{AD}$ по координатам точки A (0;2;-1) и точки D (0;4;1):
$\overrightarrow{AD}$ = {Dx – Ax; Dy – Ay; Dz – Az} = {0-0; 4-2; 1 – (-1)} = {0;2;2}
Найдем произведение векторов $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ и $\overline{AD}$:

$$\overline{AB} * \overline{AC} * \overline{AD} = \begin{vmatrix} AB_x & AB_y & AB_Z \\ AC_x & AC_y & AC_z \\ AD_x & AD_y & AD_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 4 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -1*1*2 + 0*0*0 + (-2)*4*2 – 0*1*4 – (-2)*0*2 – (-1)*2*0 = -2 – 16 = -18$$

Тогда объем пирамиды равен:

$V = \frac{1}{6} |-18¿ = 3$

Ответ:
1) $\sqrt{17}; \sqrt{5}$
2) 77.47119229084849°
3) 4.5
4) $\frac{2}{\sqrt{17}}$
5) 3