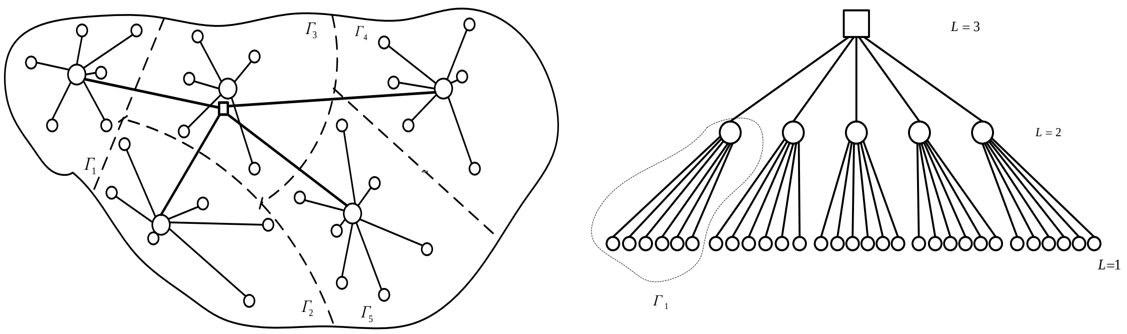
ЛЕКЦИИ 5-6

РАСЧЕТ ИЕРАРХИЧЕСКОЙ ДРЕВОВИДНОЙ КОНФИГУРАЦИИ СЕТИ.

4.1 Постановка задачи

Структура иерархически организованной информационной системы, обеспечивающей сбор, обработку и вывод информации, может быть представлена в виде дерева, корнем которого является, например, информационно-вычислительный центр, промежуточными вершинами являются местные вычислительные центры, висячими вершинами - абоненты подразделения (рис.4.1).



а)

б)

Рис.4.1. Топологическая (*а*) и функциональная (*б*) организация связей иерархической структуры.

Принимаем условие, что вновь создаваемые информационные центры территориально размещаются при одном из существующих абонентов подразделений, тогда рассчитываемая сеть представляет собой граф, обеспечивающий покрытие всех узлов-абонентов.

Поставленная задача может быть сформулирована следующим образом: заданы множество исходных узлов $a_i \in A$ мощностью N ($i=\overline{1,N}$) и взвешенные расстояния m_{ij} между каждой парой узлов a_i, a_j. Каждый узел a_i характеризуется собственной оценкой z_i, трактуемой как количество информации, передаваемое узлом за единицу времени. Требуется построить сеть S минимальной длины, обеспечивающую многоуровневое покрытие исходных узлов множества A и называемую иерархическим деревом.

Покрытие уровня h есть совокупность непересекающихся групп $\{Г_p\}_h$мощностью $\{N_Г\}_h$. Каждая из групп $Г_p$ имеет единый центр $Ц_{ph}$, размещающийся при одном из узлов a_i группы и соединяющийся с узлами, принадлежащими группе, при этом заданное множество исходных узлов и центров при них составляет нижний уровень покрытия $h = 1$.

Математическая формулировка задачи отыскания кратчайшей иерархической древовидной сети предусматривает (в качестве критерия эффективности) использовать m_{ij}-расстояния, взвешенные, например, одним из соотношений (2.4) - (2.6).

Для получения строгой записи целевой функции необходимо определить искомые неизвестные. Структура S будет считаться известной, если будет установлено: 1) при каких исходных узлах множества A располагаются центры групп каждого уровня; 2) с каким центром $Ц_{ph}$ h-го уровня связан каждый узел a_j h-го уровня; 3) сколько уровней иерархии имеет структура S.

В качестве неизвестных первой группы будем рассматривать булевы переменные, которые определяют местоположение центров $Ц_p$:

$$x_{pj} = \begin{Bmatrix} 1, если\ Ц_p \in a_j \\ 0, если\ Ц_p \notin a_j \end{Bmatrix} \tag{4.1}$$

Набор матриц $\{\|x_{pj}\|\}_h$ для всех уровней структуры полностью определяет местоположение всех центров $Ц_p$, располагаемых на уровнях h.

В качестве неизвестных второй группы принимаем также булевы переменные, которые определяют, с каким центром $Ц_{ph}$ группы $Г_{ph}$ связан исходный узел a_i:

$$y_{ip} = \begin{Bmatrix} 1, если\ a_i \in Г_{ph} \\ 0, если\ a_i \notin Г_{ph} \end{Bmatrix} \tag{4.2}$$

Набор матриц $\{\|y_{ip}\|\}_h$ для всех уровней h структуры S полностью определяет состав элементов в каждой группе $Г_{ph}$.

Неизвестное число уровней иерархии обозначим H, промежуточные уровни структуры обозначим h, т.е. $h = \overline{1, H}$. Кроме того, для записи математической модели введем следующие обозначения:

M = $\|m_{ij}\|$, $i, j = \overline{1, N}$– исходная матрица взвешенных расстояний между каждой парой узлов a_i, a_j; $\{z_i\}$ – оценка каждого узла структуры, которые могут трактоваться как объем информации, поступающий в узел за единицу времени;

$Г_{ph}$, $p = \overline{1, N_Г}$ – сформированная p-я группа, центры которых $\{Ц_{ph}\}$ составляют уровень h структуры S;

$Ц_{ph}, p = \overline{1, N_Г}$ - центральный узел $Г_{ph}$ уровня h ;

$П_h$ - оценочные коэффициенты $Ц_{ph}$, которые могут трактоваться как способность узла обрабатывать объем информации, равный $П_h$ в единицу времени.

В сформулированной таким образом задаче наилучшей считается та структура S, у которой величина суммарных взвешенных длин является наименьшей. Таким образом, целевая функция модели может быть записана в следующем виде:

$$Q = \min_{x,y,h} \sum_{h=1}^{H} \sum_{Г_{ph\in h}} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} (x_{ip})_h \, (y_{pj})_h (m_{ij})_h \qquad (4.3)$$

В (4.3) часть функционала $\sum_i \sum_j \left(x_{ip}\right)_h \left(y_{pj}\right)_h \left(m_{ij}\right)_h$ позволяет вычислить суммарную длину взвешенных связей для одной группы $Г_{ph}$ уровня h. Переменная y_{pj} Выделяет из M столбец $\{m_j\}$, для которого $Ц_p \in a_j$. Переменные x_{ip} выделяют из столбца $\{m_j\}$, те элементы, которые соответствуют узлам, входящим в группу $Г_{ph}$.

Иерархическая древовидная структура требует выполнения следующих функциональных ограничений, определяющих конфигурацию.

Каждый центр $Ц_p$может располагаться только при одном узле a_j т.е.

$$\sum_{j=1}^{N} (y_{pj})_h = 1 \qquad (4.4)$$

Каждый узел a_i может входить только в одну группу уровня h , т.е.

$$\sum_{i=1}^{N} (x_{ip})_h = 1 \qquad (4.5)$$

Центры групп уровня h рассматриваются как совокупность исходных узлов для уровня (h+1), т. е.

$$\left\{Ц_p\right\}_h = A_{h+1} \qquad (4.6)$$

Ограничения на пропускную способность узлов, выражающие необходимость согласования оценочных характеристик исходных узлов $\{a_i\}$ и центров $Ц_p$ записывают в следующем виде:

$$0 \le П_{ph} - \sum_{i=1}^{N} y_{iph}\, z_{ih} < inf\{z_{jh}\} \qquad (4.7)$$

где $\infty > П_{ph} > 0$; $\quad a_i \in Г_{ph}$; $a_j \notin Г_{ph}$

Физический смысл ограничения (4.7) состоит в том, что производительность $П_{ph}$ центра $Ц_{ph}$ должна быть не меньше, чем суммарные объемы z_{ih} узлов a_i, обслуживаемых центром. Однако, недогруженность производительности $П_{ph}$ центра $Ц_{ph}$ не должна превышать наименьшей потребности узла z_{ih}, не обслуживаемого центром $Ц_{ph}$.

Соотношения (4.1) - (4.7) представляют собой математическую постановку задачи определения иерархической древовидной структуры, решение которой позволит определить структуру S, отвечающую заданным требованиям.

Сформулированная задача принадлежит к классу нелинейных задач с булевыми переменными.

Реальные объекты, для которых требуется определять структуры, имеют размерности узлов N = 100 - 400. Мощность η_hмножества состояний уровня h можно определить как число сочетаний из N по B элементов в группе, при этом центры групп могут размешаться при каждом из N узлов, т.е.

$$\eta_h \approx N!/[(B-1)!\,(N-B)!]$$

для N=100 и $B=10$ η_h= 5,2 $*10^{15}$

4.2 Алгоритм расчета иерархической древовидной ВС

Из изложенного видно, что общий алгоритм решения рассматриваемой нелинейной целочисленной задачи должен исключать необходимость явного перебора всех допустимых вариантов.

Требуются методы, обеспечивающие частичный перебор ограниченного числа допустимых вариантов и неявный перебор всех остальных вариантов, из которых формируются допустимые варианты,

В целях сокращения множества вариантов объединения в группы используется эвристический алгоритм, сущность которого заключается в том, что для исходного уровня h = 1 на каждом шаге из не сгруппированных ранее элементов определяется группа $Г_{ph}$, имеющая минимальную суммарную длину взвешенных расстоянии и отвечающая ограничениям на конфигурацию и пропускные способности узлов. С одной стороны, алгоритм позволяет снизить размерность задачи, так как это дает возможность использовать понятие упорядоченного перебора при формировании группы, но, с другой стороны, поиск глобального оптимума заменяется поиском суммы локальных оптимумов, т.е. вместо сформулированной в (3.8) целевой функции эвристический алгоритм осуществляет поиск решения по целевой функции вида:

$$Q = \sum_{h=1}^{H} \sum_{\Gamma_{ph \in h}} \min_{xy} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} (x_{pi})_h \, (y_{pj})_h (m_{ij})_h$$

Изложенное обусловливает наличие в эвристическом алгоритме расчета иерархической древовидной структуры двух этапов: целенаправленного группирования и улучшения краевых точек.

На каждом шаге этапа целенаправленного группирования определяется оптимальная группа Γ_{ph}. Этап улучшения краевых точек обеспечивает перераспределение сгруппированных элементов таким образом, чтобы, не нарушая ограничений по конфигурации, получить более компактные группы. Этот этап вступает в действие после определения второй и всех последующих групп каждого уровня.

Для получения групп уровня h+1 производится корректировка оценочных характеристик элементов на основании соотношения:

$$\left(z_j\right)_{h+1} = \sum_{p=1}^{N} x_{pj} \sum_{i=1}^{N} z_i \, y_{ip}$$

а также следует корректировать матрицу расстояний таким образом, чтобы в матрицу M_{h+1} вошли только те столбцы и строки M_h, которые соответствуют номерам узлов, при которых размещены центры групп.

Этап целенаправленного группирования. Этот этап ставит своей целью определение группы с минимальной суммарной длиной связей между центром группы и ее элементами. Группа считается найденной, если определены, при каком элементе расположен центр группы, состав элементов, принадлежащих группе, и число элементов, входящих в состав группы.

Этап целенаправленного группирования включает в свой состав следующие вычислительные блоки (рис. 4.2): упорядочение (1) , определения группы (2) , вычеркивание (3) .

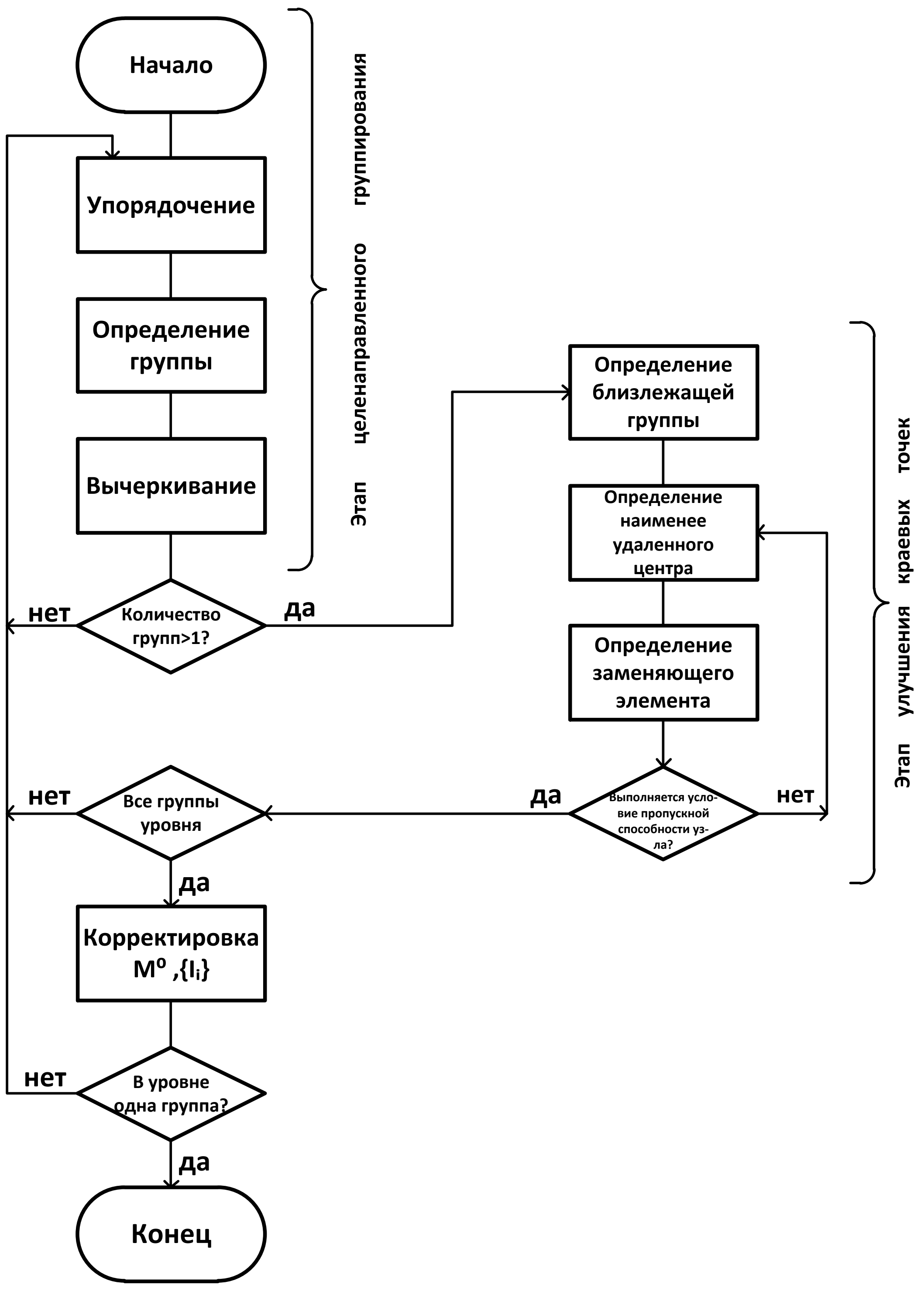


Рис. 4.2 Укрупненная блок-схема алгоритма определения иерархической древовидной структуры

В результате вычислительных операций блока упорядочениями исходной матрицы М получаем три матрицы: упорядоченную $\bar{M} = \left\|\overline{m_{ij}}\right\|$, номеров $M^K = \left\|m_{ij}^K\right\|$ и суммарную $M^C = \left\|m_{ij}^C\right\|$.

Для получения каждого j-го столбца упорядоченной матрицы необходимо расположить по возрастанию значения всех элементов j-го столбца исходной матрицы М, кроме диагонального. Диагональный элемент записывается первым в упорядоченной матрице. Таким образом, при выполнении процедуры упорядочения должны выполняться следующие соотношения:

$$\forall b = j;\ \bar{m}_{1j} \in \{m\}_j,\ j, b = \overline{1, N} \qquad (4.8)$$

$$\forall b \neq j;\ \bar{m}_{ij} = \min_i \left[\{\mathrm{m}\}_j \setminus \cup_i \mathrm{m}_{ij}\right], \quad i = \overline{2, N} \qquad (4.9)$$

где $\{m\}_j$ – j-й столбец матрицы М.

Одновременно с получением j-го столбца $\{\bar{m}\}_j$ упорядоченной матрицы $\bar{M}$ формируется j-й столбец $\{m^{\kappa}\}_j$ матрицы номеров M^{κ}, элементами которого являются порядковые номера элементов j-го столбца $\{m\}_j$ исходной матрицы М, записанные в соответствии с расположением элементов в столбце $\{\bar{m}\}_j$, т,е.

$$\text{если } m_{bj} = \overline{m_{\iota j}}, \qquad \text{то } m_{ij}^{K} = b \qquad (4.10)$$

Каждый j-й столбец суммарной матрицы M^C получается в результате последовательного суммирования элементов столбца упорядоченной матрицы $\bar{M}$ т.е.

$$m_{bj}^{c} = \sum_{i=1}^{b} \bar{m}_{ij} \qquad (4.11)$$

где $i, j, b = \overline{1, N}$

В вычислительном блоке определения группы последовательно выполняются следующие операции.

1. Просматривается i-я строка $\{m^c\}_i$. суммарной матрицы M^c и отыскивается минимальный элемент:
$m_{id}^{c} = \min_j \{m^c\}_j$.

2. Принимаем, что при элементе a_d располагается центр $Ц_p$ группы, содержащей в своем составе i узлов.
3. По столбу с номером d матрицы номеров $\{m^{\kappa}\}_d$ определяем номера первых i (по числу просмотренных строк в M^c) узлов, входящих в группу с центром, разместившимся в a_d.
4. Присваиваем i значение $x_{id} = 1$ $(i \in \{m^{\kappa}\}_d)$.
5. Проверяем для найденной группы, содержащей i узлов, ограничение (4.7).

Если ограничение (4.7)выполняется, то j увеличивается на единицу, и переходим к п. 1. Если ограничение (4.7) не выполняется, то принимаем в качестве решения состав группы, найденный на шаге i -1.

После того как состав группы определен (определены номера элементов, входящих в группу) и определено местоположение центра группы (номер столбца, который соответствует минимальному значению $\{m^C\}_j$,, переходим к блоку вычеркивания, в котором всем элементам строк и столбцов исходной матрицы M, номера которых соответствуют элементам, вошедшим в группу Γ_p присваивается значение ∞ .

Далее, в соответствии с алгоритмом (рис. 4.2) проверяют, какое число групп уровня получено (оператор 4) . В том случае, если найдена вторая и последующие группы, то переходят *к* этапу улучшения краевых точек.

Этап улучшения краевых точек. Этот этап ставит своей целью осуществить последовательный обмен наиболее удаленных элементов улучшаемой группы с элементами соседних групп, которые наименее удалены от центра улучшаемой группы. Обеспечение компактности улучшаемой группы достигается корректировкой в целях получения группы, имеющей односвязную область определения.

Процедура эвристического этапа улучшения краевых точек начинается после того, как найдено не менее двух групп, она включает в себя следующее:

1. Определение центров близлежаших групп $\{Ц'\}_h$ (оператор 5). Центры сгруппированных элементов уровня h принадлежат множеству, если расстояния $\{m_{Цy,Цp}\}$ от центра $Ц_y$ улучшаемой группы Γ_y (которая определена последней) до центров $\{Ц_p\}$ ранее определенных групп меньше расстояния от $Ц_y$ до наиболее удаленного элемента a_l, принадлежащего улучшаемой группе Γ_y :

$$Ц_p \in \{Ц'\}_h \text{, если } m_{Цy,Цp} < m_{Цy,al} \qquad (4.12)$$

2. Определение центра $Ц_l^*$, наименее удаленного от a_l (оператор 6). Элемент множества $\{Ц'\}_h$ принадлежит множеству $\{Ц''\}_h$, если расстояние $m_{lЦ'}$ меньше расстояния $m_{lЦ_y}$:

$$Ц_p \in \{Ц''\}_h \text{, если } m_{lЦ'} < m_{lЦ_y} \qquad (4.13)$$

Наименее удаленный центр $Ц_l^*$ соответствует такому элементу множества $\{Ц_p''\}_h$, у которого наименьшее значение $m_{lЦ''}$:

$$Ц^* = Ц_l^* \text{, если } m_{li} = \min_{\{Ц''\}} m_{lЦ''} \qquad (4.14)$$

3. Определение элемента $a_{l'}$, заменяющего a_l (оператор 7). Элемент a_i, принадлежащей группе с центром $Ц_p^*$ может заменять a_l в улучшаемой группе

Γ_y, если расстояние $m_{iЦ_y}$, является наименьшим из всех элементов группы с центром $Ц_p^*$, т.е.

$a_i :=\ a_l$, если $a_{l'} \in \Gamma_y$, $a_i \in \Gamma_Ц^*$;

$$m_{iЦ_y} = \min_{a_{j \in \Gamma_Ц^*}} m_{jЦ_y} \qquad (4.15)$$

4. Проверка групп $\Gamma_{Цy}$ и $\Gamma_Ц^*$ на ограничение по производительности состоит в проверке выполнения ограничения (4.7) на пропускную способность узлов для обеих групп (оператор 5).

Если ограничение (4.7) выполняется, то состав групп $\Gamma_{Цy}$ и $\Gamma_Ц^*$ корректируется путем взаимного обмена элементов a_i и $a_{l;}$. Если ограничение (4.7) не выполняется, делается попытка определить следующий элемент $a_{l;}$. из $\Gamma_Ц^*$, используя пп. 3 и 4, затем проверяются все группы, принадлежащие множеству $\{Ц''\}$.

Решение по второму этапу продолжается до тех пор, пока все группы, принадлежащие множеству $\{Ц''\}$, не будут проверены.

После определения групп уровня h переходят к определению групп уровня $h+1$ (оператор 9). В начале расчета корректируется исходная матрица M_h (оператор 10), в которой остаются столбцы и строки, соответствующие найденным центрам групп уровня h, а также оценивается каждый центр группы путем суммирования оценок элементов, входящих в соответствующую группу.

Процедура расчета завершается, если на уровне H формируется только одна группа (оператор 11).

Изложенная методика использует принцип целенаправленного поиска, обеспечивающий получение решения в точке локального оптимума целевой функции, которое затем корректируется эвристической процедурой улучшения краевых точек. Проведенные исследования [18] показали, что процедура обеспечивает среднюю точность расчета 5%, что соизмеримо с точностью исходных данных.

Пример 4.3

Даны узлы (N=9), заданы взвешенные расстояния, представленные в матрице М на рис. 4.3.

		1	2	3	4	5	6	7	8	9
	1	0	10	24	21	45	65	60	55	100
	2	10	0	15	11	35	55	50	48	90
	3	24	15	0	25	50	70	75	60	100
M=	4	21	11	25	0	25	45	40	35	60
	5	45	35	50	25	0	40	30	26	70
	6	65	55	70	45	40	0	12	30	40
	7	60	50	75	40	30	12	0	18	28
	8	55	48	60	35	26	30	18	0	40
	9	100	90	100	60	70	40	28	40	0

Рис. 4.3 Матрица М взвешенных расстояний

Требуется построить древовидную иерархическую сеть минимальной длины, обеспечивающую многоуровневое покрытие исходных узлов. Например, так, как показано на рис. 4.4.

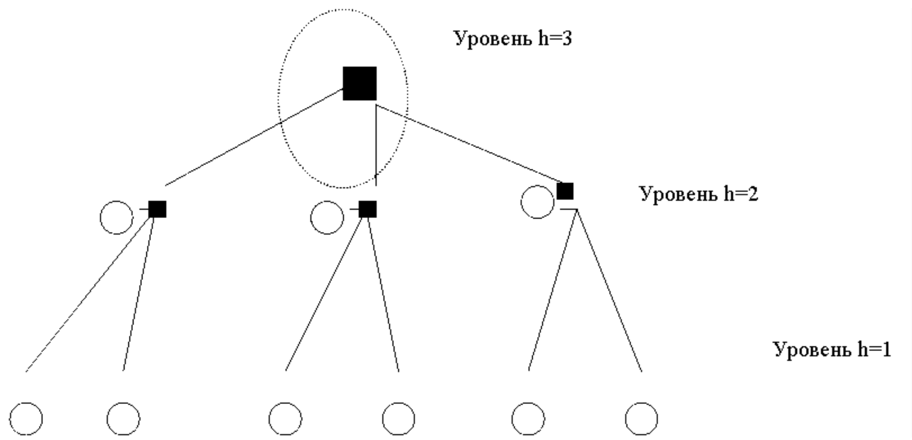


Рис. 4.4. Древовидная иерархическая структура

Итак, исходные данные для расчета следующие: N=9; количество узлов, z_i=1; веса узлов, которые равны количеству информации, передаваемой узлом за единицу времени $i=\overline{1,9}$,

$П_{h=1}$=3; пропускные способности центров групп h=1;

$П_{h=2}$=9, пропускные способности центров групп h=2.

Алгоритм решения состоит из двух этапов:

- определение группы (центр, состав, число элементов),
- улучшение группы путём обмена наиболее удалённых её элементов с элементами соседних групп.

Решение:

Определение группы

1) Производим преобразование исходной матрицы М и из исходной матрицы получаем три: $\overline{M}$, M^K, M^C.

Упорядоченная матрица $\overline{M}$ (каждый столбец исходной матрицы упорядочивается по возрастанию) представлена на рис. 4.5

$\overline{M}$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	10	10	15	11	25	12	12	18	28
3	21	11	24	21	26	30	18	26	40
4	24	15	25	25	30	40	28	30	40
5	45	35	50	25	35	40	30	35	60
6	55	48	60	35	40	45	40	40	70
7	60	50	70	40	45	55	50	48	90
8	65	55	75	45	50	65	60	55	100
9	100	90	100	60	70	70	75	60	100

Рис. 4.5 Упорядоченная матрица $\overline{M}$

Рис. 4.5 Упорядоченная матрица $\overline{M}$

При равенстве взвешенных расстояний элементов, меньшим принимается элемент с меньшим номером по строке.

В матрицу M^K номеров записываются порядковые номера элементов, переставленных при формировании упорядоченной матрицы $\overline{M}$ упорядочении элементов, как представлено на рис. 4.6.

		1	2	3	4	5	6	7	8	9
	1	1	**2**	3	4	5	6	7	8	9
	2	2	**1**	2	2	4	7	6	7	7
	3	4	**4**	1	1	8	8	8	5	6
	4	3	3	4	3	7	5	9	6	8
M^K	5	5	5	5	5	2	9	5	4	4
	6	8	8	8	8	6	4	4	9	5
	7	7	7	6	7	1	2	2	2	2
	8	6	6	7	6	3	1	1	1	1
	9	9	9	9	9	9	3	3	3	3

Рис. 4.6 Матрица M^K номеров

Суммарная матрица M^C, получается путем последовательного суммирования элементов столбца упорядоченной матрицы, представлена на рис. 4.7.

		1	2	3	4	5	6	7	8	9
	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	2	10	10	15	11	25	12	12	18	28
	3	31	**21**	39	32	51	42	30	44	68
	4	55	36	64	57	81	82	58	74	108
M^C	5	100	71	114	82	116	122	88	109	168
	6	155	119	174	117	156	167	128	149	238
	7	215	169	244	157	201	222	178	197	328
	8	280	224	319	202	251	287	238	252	428
	9	380	314	419	262	321	357	313	312	528

Рис.4.7 Суммарная матрица M^C

2) Находим состав группы.

Просматриваем очередную строку i суммарной матрицы M^C и ищем минимальный элемент j. Принимаем, что при этом элементе j располагается центр группы, состоящей (разумеется) из i узлов.

Проверяем ограничение по пропускной способности: $\sum z_i \leq \Pi_{h=1 \text{ или } 2}$ (для соответствующего уровня h). Если ограничение выполняется, то увеличиваем номер строки $i=i+1$ и всё повторяем сначала. В противном случае оставляем состав группы с предыдущего шага(i-1).

В нашем примере задано найти три узла, входящие в группу. Поэтому дойдем до 3-й строки матрицы M^C (z_i=1, а $\Pi_{h=1}$=3), в этой строке минимальным является элемент m_{32}=21.

Центр группы располагается при 2-м узле (j=2). Всего в группе три узла (i=3). По столбцу 2 матрицы номеров M^K определяем номера узлов, входящих в группу Γ_1=2,1,4.

Корректировка для первой группы не производится.

3) Вычёркиваем строки и столбцы из исходной матрицы М с номерами элементов, входящих в группу. В данном случае это строки 1,2,4 и столбцы 1,2,4. Получаем матрицу $M^{(1)}$, представленную на рис. 4.8.

$M^{(1)}$	3	5	6	7	8	9
3	0	50	70	75	60	100
5	50	0	40	30	26	70
6	70	40	0	12	30	40
7	75	30	12	0	18	28
8	60	26	30	18	0	40
9	100	70	40	28	40	0

Рис. 4.8 Скорректированная матрица $M^{(1)}$,

4) Если число групп > 1, переходим к следующему этапу (улучшение группы), иначе к шагу 1.

В рассматриваемом примере имеем одну группу и опять из исходной матрицы $M^{(1)}$ формируем три матрицы: упорядоченная $\overline{M}^{(1)}$ матрица, матрица $M^{K(1)}$ и суммарная матрица $M^{C(1)}$

$\overline{M}^{(1)}$	3	5	6	7	8	9
3	0	0	0	0	0	0
5	50	26	12	12	18	28
6	60	30	30	18	26	40
7	70	40	40	28	30	40
8	75	50	40	30	40	70
9	100	70	70	75	60	100

Рис. 4.9 Матрица $\overline{M}^{(1)}$

$M^{C(1)}$	3	5	6	7	8	9
3	0	0	0	0	0	0
5	50	26	12	12	18	28
6	110	56	42	**30**	44	68
7	180	96	82	58	74	108
8	255	146	122	88	114	178
9	355	216	192	163	174	278

Рис. 4.10 Матрица $M^{C(1)}$

	3	5	6	7	8	9
3	3	5	6	**7**	8	9
5	5	8	7	**6**	7	7
6	8	7	8	**8**	5	6
7	6	6	5	9	6	8
8	7	3	9	5	9	5
9	9	9	3	3	3	3

Рис. 4.11 Матрица $M^{K(1)}$

Далее согласно п. 2 определяем группу. Минимальный элемент m_{67}=30. Следовательно, центр группы при 7-м узле, а состав группы $Г_2$=7,6,8.

5) Проверяем необходимость корректировки группы $Г_2$=7,6,8

Центр улучшаемой группы $Г_у$ = $Г_2$ расположен при узле 7. Узлы 6,8 должны корректироваться, если расстояние от корректируемого узла до центра улучшаемой группы $Г_у$ больше расстояния от корректируемого узла до центра группы $Г_1$ при узле 2, из которой может выделяться узел, который участвует в корректировке, т.е. в рассматриваемом примере для корректируемых узлов 6 и 8 должны соответственно выполняться условия: $m_{87} > m_{82}$ либо $m_{67} > m_{62}$

По матрице номеров $М^К$, представленной на рис. 4.6, анализируем соответственно столбцы 8 и 6, как представлено на рис. 4.12.

	6	8
1	6	8
2	**7**	**7**
3	8	5
4	5	6
5	9	4
6	4	9
7	**2**	**2**
8	1	1
9	3	3

Рис. 4.12. Столбцы матрицы $М^К$ номеров

В каждом из этих столбцов узлы 6 и 8находятся выше узла 2. Это означает, что центр $Г_2$ при узле 7 расположен к рассматриваемым узлам 6 и 8 ближе, чем центр $Г_1$, расположенный при узле 2. Поэтому корректировку $Г_2$ производить не следует.

6) Находим следующую группу. После вычёркивания из матрицы $М^{(1)}$ строк и столбцов, номера которых соответствуют номерам узлов, входящих в $Г_2$, получаем матрицу $М^{(2)}$, представленную на рис.4.13.

$М^{(2)}$		3	5	9
	3	0	50	100
	5	50	0	70
	9	100	70	0

Рис. 4.13 Скорректированная матрица $М^{(2)}$

Аналогично п.1, формируем три матрицы: упорядоченную матрицу $\overline{M^{(2)}}$; матрицу номеров $M^{K(2)}$, суммарную матрицу $M^{C(2)}$.

	3	5	9
3	0	0	0
5	50	50	70
9	100	70	100

Рис. 4.14 Матрица $\overline{M^{(2)}}$

	3	5	9
3	3	**5**	9
5	5	**3**	5
9	9	**9**	3

Рис. 4.15 Матрица $M^{K(2}$

	3	5	9
3	0	0	0
5	50	50	70
9	150	**120**	170

Рис. 4.16 Матрица $M^{C(2)}$

Минимальный элемент m_{95}=120. Центр группы при 5-м узле, состав группы $Г_3$=5,3,9.

7) Улучшение группы $Г_3$

Центр улучшаемой группы $Г_у = Г_3$ расположен при узле 5. Узлы 3,9 могут корректироваться, если расстояние $m_{35} > m_{32}$ либо $m_{95} > m_{97}$.По матрице номеров $М^К$, представленной на рис. 4.6, анализируем соответственно столбцы 3 и 9, которые приведены на рис. 4.17В 3-м столбце узел 2 находятся выше узла 5. Это означает, что центр $Г_1$ при узле 2 расположен к улучшаемому узлу 3 ближе, чем центр $Г_3$, расположенный при узле 5. Поэтому корректировку узла 3 *следует производить*.

	3	9
1	3	9
2	**2**	**7**
3	1	6
4	4	8
5	**5**	4
6	8	**5**
7	6	2
8	7	1
9	9	3

Рис. 4.17 Столбцы матрицы $М^К$ номеров

В 9-м столбце узел 7 находятся выше узла 5. Это означает, что центр $Г_2$ при узле 7 расположен к улучшаемому узлу 9 ближе, чем центр $Г_3$, расположенный при узле 5. Поэтому корректировку узла 9 также *следует производить*.

В процессе корректировки узел 3 из группы $Г_3$ необходимо передать в группу $Г_1$ (с центром в узле 2), а из группы $Г_1$ необходимо узел, ближайший к группе $Г_3$ (с центром в узле 5), включить в состав группы $Г_3$.

Группа $Г_1$ имеет для корректировки два узла –1 и 4. Чтобы найти, который из этих узлов расположен ближе к центру 5 группы $Г_3$, рассмотрим матрицу номеров $\boldsymbol{M^K}$, представленную на рис. 5, точнее ее 5-й столбец, приведенный на рис. 4.18. В этом столбце узел 4 расположен выше узла 2, следовательно, необходимо узел 3 включить в состав $Г_1$, а узел 4 – в состав $Г_3$.

	5
1	5
2	**4**
3	**8**
4	7
5	2
6	6
7	1
8	3
9	9

Рис. 4.18Столбец матрицы $М^К$ номеров

Кроме того, в процессе корректировки узел 9 из группы $Г_3$ необходимо передать в группу $Г_2$ (с центром в узле 7), а из группы $Г_2$ необходимо узел, ближайший к группе $Г_3$ (с центром в узле 5), включить в состав группы $Г_3$.

Группа $Г_2$ имеет для корректировки два узла –6 и 8. Чтобы найти, который из этих узлов расположен ближе к центру 5 группы $Г_3$, рассмотрим 5-й столбец матрицы номеров $М^К$, приведенный на рис. 4.18. В этом столбце узел 8 расположен выше узла 7, следовательно, необходимо узел 8 включить в состав $Г_3$, а узел 4 – в состав $Г_3$.

Таким образом, получаем скорректированные группы первого уровня:

$Г_1$ = 2,1,3; $Г_2$ = 7,6,9; $Г_3$ = 5,4,8.

8) В рассматриваемом примере вес каждого узла равен 1, а пропускные способности центров групп $П_{h=1}$=3. Для каждой из полученных групп выполняется условие равенства пропускных способностей, поэтому корректировка завершена.

Определение групп следующего уровня

9) Все узлы уровня h =1 сгруппированы, переходим к определению групп уровня h = 2.

Исходными узлами для уровня h = 2 являются центры групп уровня h =1, которые расположены при узлах 2,7,5.

10) Корректируем исходную матрицу М так, что в ней остаются только центры групп (рис. 4.19)

$M^{(4)}$	2	5	7
2	0	35	50
5	35	0	30
7	50	30	0

Рис. 4.19 Скорректированная матрица $M^{(4)}$

11) Аналогично п.1 формируются три матрицы:

упорядоченная матрица $M^{(4)}$ (рис. 4.20); матрица $M^{(4)}$ номеров (рис. 4.21); суммарная матрица $M^{(4)}$ (рис. 4.22).

	2	5	7
2	0	0	0
5	35	30	30
7	50	35	50

Рис. 4.20Матрица $\overline{M^{(2)}}$

	2	5	7
2	2	5	7
5	5	7	5
7	7	2	2

Рис. 4.21 Матрица $M^{К(4)}$

	2	5	7
2	0	0	0
5	35	30	30
7	85	65	80

Рис. 4.22 Матрица $M^{C(4)}$

Минимальный элемент m_{75}=65, тогда центр группы распложен при 5-м узле, состав группы $Г_1$=5,7,2.

Так как сформирована только одна группа, то процедура расчёта заканчивается.

Результат расчета структуры представлен на рис. 4.23.

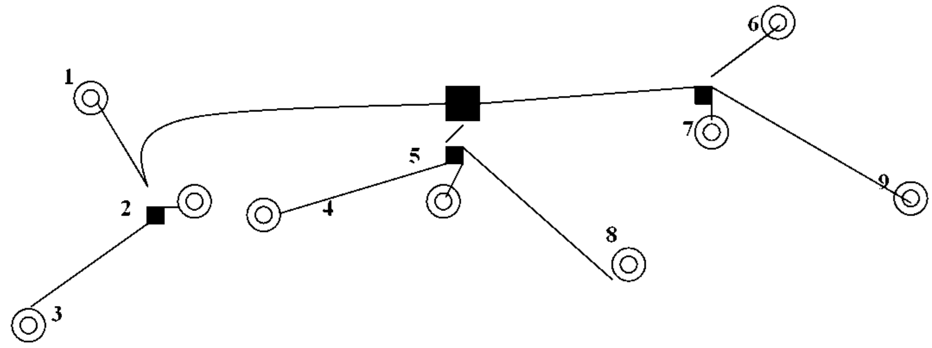


Рис. 4.23 Схема рассчитанной структуры.

Рассмотренный пример носит иллюстративный характер и предназначен для пояснения процедуры расчета. Однако, как указывалось ранее, данная процедура может быть использована для сетей, имеющих размерность 100—400 исходных элементов.

Самоконтроль знаний

Контрольные вопросы

1. Какие примеры реальных ВС имеют иерархическую древовидную конфигурацию (ИДК). Какие технические реализации соответствуют узлам и дугам ИДК ?

2. Обоснуйте, что сформированные матрицы: $\|X\|_h$, $\|Y\|_h$ полно и однозначно описывают ИДК ВС.

3. Почему отсутствие одной из групп ограничений 4.4 – 4.7 может привести к неправильному решению поставленной задачи?

4. Почему сформулированная математическая постановка задачи определения ИДК относится к классу нелинейных задач с булевскими переменными?

5. Почему в предложном алгоритме определения ИДК необходим этап корректировки матрицы?

6. Почему предложенная эвристическая процедура решения не гарантирует глобального оптимума целевой функции.

Контрольные задания

1. Поясните, как выбраны номера в 4-м столбце матрицы $М^К$, учитывая, что в 4-м столбце матрицы $\overline{M}$ 4-й и 5-й элементы имеют одинаковые значения.

2. Поясните, почему этап корректировки начинается только после определения второй группы?

3. Как объяснить, почему при выполнении любого этапа корректировки используется матрица $М^К$, сформированная на первом этапе выполнения расчетов.

4. Подтвердите расчетом возникновение ошибки по п. 5 примера, если вместо матрицы $М^К$, (рис. 4.6), использовать матрицу $М^{К(1)}$ (рис. 4.11)