Лабораторная работа № 1 Операции над множествами

<u>Цель работы:</u> Изучить основные операции над множествами: объединение, пересечение, разность, дополнение.

<u>Теоретические сведения</u>

В математике понятие “*множество*” является исходным и не подлежит точному определению. Поэтому набор или совокупность каких-либо объектов, обладающих общими свойствами, на интуитивном уровне, называют множеством. Например, в математике такими множествами являются множество целых чисел Z (INTEGER), множество вещественных чисел R (REAL) и др. “Нематематические” объекты также формируют множества. Объекты, включаемые в множество, называют его элементами

Общим обозначением множества служит пара фигурных скобок {, }, между которыми перечисляют все элементы множества или указывают свойства, которыми должны обладать элементы формируемого множества. Для обозначения множества в тексте используют прописные буквы латинского алфавита A, B, C, ...X, Y, Z. Для обозначения элементов множества в тексте используют строчные буквы латинского алфавита a, b, c,...x, y, z.

Для обозначения принадлежности элемента x множеству X используют знак “$\in$“ - знак *принадлежности*, т.е. $x\in X$. Если элемент x не принадлежит множеству X, то используют знак “$\notin$“, т.е. $x\notin X$.

Число элементов счетного конечного множества X называют его *мощностью* и обозначают так: $|X|=n$.

Если всякий элемент множества X является также элементом другого множества Y, то множество X называют *подмножеством* множества Y. Для обозначения этого в тексте используют знак “$\subseteq$“ - знак включения, т.е. $X\subseteq Y$. Если множество X не включено в множество Y, т.е. не все его элементы принадлежат Y, то используют знак “$\not\subset$“ - знак невключения, т.е. $X\not\subset Y$.

Если $X\subseteq Y$ и $Y\subseteq X$, то $X=Y$.

Если $X \subseteq Y$ и $X \neq Y$, то множество X называют *собственным подмножеством* множества Y. Для указания в тексте этого факта используют знак строгого включения - “$\subset$“, т.е. $X \subset Y$.

Множество, не содержащее ни одного элемента, называют *пустым* множеством и обозначают знаком $\oslash$, т.е. $\oslash=\{\ \}$. Пустое множество может быть подмножеством любого множества.

Множество, содержащее все элементы всех подмножеств, принимающих участие в решении какой-либо задачи, называют основным или *универсальным* множеством и обозначают символом U, т.е. если в решении какой-либо задачи принимают участие множества A={a} и B={b,c}, то U ={a,b,c}.

Максимально возможное число подмножеств универсального множества называют семейством подмножеств универсального множества. Это семейство включает пустое подмножество, само универсальное множество и множества, сформированные по одному, два, три и т.д., элементов универсального множества. Семейство подмножеств универсального множества обозначают символом B(U) и называют *булеаном* множества U.

Например, если U={a,b,c}, B(U)={$\oslash$, {a}, {b}, {c}, {a,b}, {b,c}, {a,c}, {a,b,c}}.

Легко видеть, что число элементов булеана B(U) зависит от числа элементов универсального множества U по формуле: $|B(U)|=2^{|U|}$.

Задание множества может быть выполнено перечислением элементов внутри фигурных скобок, либо описанием его характеристических свойств.

При задании множества описанием его характеристических свойств между фигурными скобками после указания текущего значения элемента множества X, т.е. $x \in X$, ставится знак “|“, вслед за которым указывают характеристическое свойство элементов множества, т.е. P(x). При подстановке конкретного значения x=a выражение P(a) принимает значение “истина” или “ложь”, т.е. P(x) есть логическая функция, которую иначе называют-“предикат”.

Множество значений x=a1, x=a2, x=a3 и т.д., для которых $P(x=a_i)$=“истина” формирует множество X={a1, a2, a3,…}.

Множество может быть задано *характеристическим вектором* – вектором, размерность которого равна количеству элементов в универсальном множестве. Каждый компонент характеристического вектора множества А равен либо 1 (если соответствующий элемент универсального множесва содержится в А), либо 0 (если соответствующий элемент универсального множесва не содержится в А).

Над множествами можно проводить ряд традиционных действий. А именно:

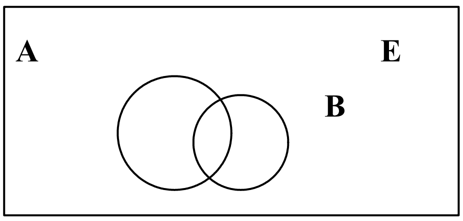
1.*Объединение*. Так называется множество *C*, которое строится по заданным множествам *A* и *B* следующим образом: в него включаются все элементы из *A* и все элементы из *B*. Обозначение: $C = A \cup B$.

2. *Пересечение*. Так называется множество *C*, которое строится по заданным множествам *A* и *B* следующим образом: в него включаются все элементы, принадлежащие одновремен-но множеству *A* и множеству *B*. Обозначение: $C = A \cap B$.

3.*Вычитание.* Так называется множество *C*, которое строится по заданным множест
вам *A* и *B* следующим образом: в него включаются все элементы из *A*, не принадлежащие мно-жеству *B*. Обозначение: $C=A\backslash B$ Часто при включении $A \subset B$ вместо $A\backslash B$ пишут $\overline{B}$ и говорят о *дополнении* подмножества *B*.

4. *Произведение.* Так называется множество *C*, которое строится по заданным множествам *A* и *B* следующим образом: в него включаются все упорядоченные пары (a,b), где $a \in A, b \in B$. Обозначение: $C = A \times B$. Если $A=B$, то $A \times A$ называется *декартовым квадратом* множества *A*.

Диаграммы Венна - это геометрическое представление множеств. С помощью этих диаграмм можно быстро убедиться в справедливости сложных операций над множествами. Диаграммы Венна не заменяют доказательств, а лишь наглядно иллюстрируют их.



E - универсальное множество

A, B - множества

Рис.1 Диаграмма Венна.

Пусть E = {b, c, d, e}; A = {b, c, d} B = {c, e} (рис.1)

Задание

1. Пусть U={a,b,c,d,e,f,g,h,k}

Задать пересечение, объединение, разность множеств S и T, декартово произведение S и T, дополнение множества S до множества U, дополнение множества S∩T до множества U. Изобразить с помощью диаграмм Венна.

Привести множество всех подмножеств множества S.

Варианты заданий.

1) S={a,b,c} T={b,c,f}
2) S={d,f,g} T={d,g,h}
3) S={a,b,c,d} T={d,e,f,g}
4) S={h,g,d} T={a,b,d,g}
5) S={g,d,b,c} T={b,c,d}
6) S={g,d,f,a} T={b,c,e}
7) S={a,b,e,f} T={c,e,f,g}
8) S=u T={c,k,b,h}
9) S={a,b,c,k} T={k,b,c,f}
10) S={d,f,g,k} T={k,d,g,h}
11) S={a,b,c,d,k} T={k,d,e,f,g}
12) S={h,g,d,k} T={k,a,b,d,g}
13) S={g,d,b,c,k} T={k,b,c,d}
14) S={g,d,f,a,k} T={k,b,c,e}
15) S={a,b,e,f,k} T={k,b,c,f}
16) S={k,a,b,c} T={b,c,f,k}
17) S={k,d,f,g} T={d,g,h,k}
18) S={k,a,b,c,d} T={d,e,f,g,k}
19) S={k,h,g,d} T={a,b,d,g,k}
20) S={k,g,d,b,c} T={b,c,d,k}
21) S={k,g,d,f,a} T={b,c,e,k}
22) S={a,b,k} T={b,k,f}
23) S={a,b,k,d} T={d,e,f,g}
24) S={g,d,b,k} T={b,k,d}
25) S={d,k,g} T={d,g,h}
26) S={g,d,k,a} T={b,k,e}
27) S={k,g,d} T={a,b,d,g}
28) S={a,b,k,f} T={e,f,g}

Контрольный тест

1. Заданы множества: A = {a, b, c, d}, B = {c, d, e}, C = {a, c, f, k}. Вычислить (A U C)∩ B.
    - {a, c, d, e, f, k}
    - {a, c, d, e}
    - {c, d, f}
    - {c, d}

2. Заданы множества: A = {a, b, c, d}, B = {c, d, e}, C= {a, c, f, k}. Вычислить (A\B)UC.
    - {c, d, e, f, k}
    - {a, b, c, d, e, f, k}
    - {a, b, c, f, k}
    - {b, d, k}

3. Заданы множества: A = {a, b, c, d}, B = {c, d, e}, C = {a, c, f, k}. Вычислить (B ∩ C)\A.
    - {a, b, c}
    - {c, d, e, f}
    - {b, d, k}
    - Ø

4. Заданы множества: A = {a, b, c, d}, B = {c, d, e}, C = {a, c, f, k}. Вычислить (A ∩ B)X(A ∩ C).
    - {a, b, c, d, e, f, k}
    - {(c, a), (c, c), (d, a), (d, c)}
    - {(c, a), (c, d), (a, c), (c, c)}
    - Ø

5. Перечислите элементы множества A: A = {x: x ε Z, 10 < = x < = 17}.
    - A = Ø
    - A = {11, 12, 13, 14, 15, 16}
    - A = {-17, -16, ..., 15, 16, 17}
    - A ={10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17}

6. Перечислите элементы множества A: A = {x: x ε Z, x ^ 2 < 24}.
    - A = {1, 2, 3, 4}
    - A = {0}
    - A = {-4, -3, -2, ..., 3, 4}
    - A = {0, 1, 2, 3, 4}

7. Перечислите элементы множества A: A = {x: x ε Z, x ^ 2 - 5* x + 5 = 0}.
    - A = Ø
    - A = {3, -1}
    - A = {1,5}
    - A={1}

8. Упростить (A ∩ C) U B.
    - (A U B) ∩ (C U B) .
    - (A ∩ B) U (C ∩ B)
    - (A U C) ∩ (C U B)
    - (B ∩ C) U (C ∩ B)

9. Упростить (A ∩ B) ∩ C

- $A \cap B \cap C$
- $A \cup B \cup C$
- $A \cup B \cap C$
- $A \cap B \cup C$

10. Упростить $(A \setminus B) \setminus C$.

- $(A \cup B) \setminus C$
- $(A \cap B) \setminus (A \cap C)$
- $A \setminus (B \cup C)$
- $(A \cup B) \setminus (A \cup C)$

11. U = {1,2,3,4,5,6} - универсальное множество. A = {1,2,4,5}. Найти характеристический вектор для A.

- (0, 1, 1, 0, 0, 1)
- (0, 1, 1, 1, 1, 0)
- (1, 1, 0, 1, 1, 0)
- (1, 1, 1, 1, 0, 0)

12. U = {1, 2, 3, 4, 5, 6} - универсальное множество. B = {3, 5}. Найти характеристический вектор для B.

- (1, 0, 0, 0, 0, 1)
- (0, 0, 1, 0, 1, 0)
- (1, 0, 1, 0, 0, 0)
- (0, 1, 0, 0, 1, 0)

13. U = {1,2,3,4,5,6} - универсальное множество. A = {1,2,4,5}, B = {3,5}. Найти характеристический вектор для $A \cap B$.

- (0, 0, 0, 0, 0, 1
- (0, 0, 1, 0, 0, 0)
- (1, 1, 1, 1, 1, 0)
- (1, 1, 0, 1, 0, 1)

14. U = {1,2,3,4,5,6} - универсальное множество. A = {1,2,4,5}, B = {3,5}. Найти характеристический вектор для $A \Delta B$.

- (0, 1, 1, 1, 1, 1)
- (1, 1, 1, 1, 0, 0)
- (1, 1, 0, 1, 1, 1)
- (1, 1, 0, 0, 1, 1)

15. Множество S = {2, 5, 8, 11, ...} записать в виде порождающей процедуры.

- $S = \{x : x = n + 3, n \in N\}$
- $S = \{x : x = 2n + 3, n \in N\}$
- $S = \{x : x = 3n - 1, n \in N\}$
- $S = \{x : x = 3n + 1, n \in N\}$

Лабораторная работа № 2 Отношения и функции.

<u>Цель работы:</u> Изучить основные определения отношений и функций и научиться определять их свойства

<u>Теоретические сведения</u>

Если элементы двух множеств X и Y различной природы сопоставить между собой по какому-либо правилу, т.е. для каждого $x \in X$ указать один или несколько элементов множества Y, то может быть сформировано множество пар (x;y), являющееся подмножеством прямого произведения множеств X и Y, т.е.

$\{(x;y)|x \in X, y \in Y\} \subseteq (X \otimes Y)$.

Множество X чаще всего называют областью определения, а множество Y-областью значения. Значение $y \in Y$ называют образом для конкретного значения $x_i \in X$, а значение $x \in X$ - прообразом для конкретного значения $y_j \in Y$.

Сопоставление двух множеств X и Y, когда для каждого элемента $x_i \in X$ существует несколько образов, т.е. $|\{y\}_{x_i}|>1$, называют *соответствием*. Множество пар (x;y) соответствия обозначают Q, т.е.

$Q=\{(x;y)|x \in X, y \in Y\} \subseteq (X \otimes Y)$.

Правило соответствия удобно записать в операторной форме $q:X \rightarrow Y$, где q-оператор соответствия.

Проекция на первую компоненту $Пр_1\{(x;y)\}$ формирует область определения X^0, где $X^0 \subseteq X$, а на вторую компоненту $Пр_2\{(x;y)\}$- область значений Y^0, где $Y^0 \subseteq Y$.

Область определения соответствия может быть задана на прямом произведении множеств X, т.е. ${}_{i=1}{}^{n} X_i = X^n$.

В этом случае

$Q=\{(x_1;x_2;...;x_n;y)|x_i \in X;y \in Y\} \subseteq X^n \otimes Y$

$q:X^n \rightarrow Y$.

Каждому соответствию q может быть найдено обратное соответствие q^{-1}. Для этого достаточно поменять местами компоненты пары соответствия, т.е.

$Q^{-1}=\{(y;x)|x \in X;y \in Y\} \subseteq Y \otimes X$;

$Q^{-1}=\{(y;x_1;x_2;...x_n)| x_i \in X_i;y \in Y\} \subseteq Y \otimes X^n$.

Для двух соответствий $q_1:X \rightarrow Y$ и $q_2:Y \rightarrow Z$ можно найти их композицию, т.е. сформировать новое соответствие $q=(q_1 \circ q_2):X \rightarrow Z$ при условии, что элементы области значений первого соответствия есть элементы области определения второго соответствия: $\{(x;z)|x\in X;\ z\in Z;\ Пр_2\{(x;y)|x\in X;\ y\in Y\}=Пр_1\{(y;z)|y\in Y;\ z\in Z\}\}$.

Например, если $X=\{1;3;5\}$, $Y=\{2;4;6\}$, $Z=\{7;9\}$ и

для $q_1:X\to Y$ имеем $Q_1=\{(1;2);(1;4);(3;4);(5;6)\}\subseteq(X\otimes Y)$,

для $q_2:Y\to Z$ имеем $Q_2=\{(2;9);(4;7);(4;9);(6;7)\}\subseteq(Y\otimes Z)$, то

для $q:X\to Z$ имеем $Q=\{(1;9);(1;7);(3;7);(3;9);(5;7)\}\subseteq(X\otimes Z)$.

Соответствие, когда каждому прообразу найдется единственный образ, но не наоборот, называют *отображением*. То есть отличительной особенностью отображения является условие $|\{y\}_{x_i}|=1$.

Форма записи отображения не отличается от записи соответствия.

В математике часто отображение называют функцией и обозначают символом f. В этом случае оператор функции есть $f:X\to Y$ или $f:X^n\to Y$.

Часто вместо такой записи используют запись:

$y=f(x)$, где $x\in X$, $y\in Y$ или $y=f(x_1;x_2;...;x_n)$, где $(x_1;x_2;...;x_n)\in X^n$, $y\in Y$, для которых элементы (x) или $(x_1;x_2;...;x_n)$ называют аргументами функции или ее независимыми переменными, y - значением функции.

При этом, если для каждого значения $x\in X$ или $(x_1;x_2;...;x_n)\in X^n$ имеется один элемент $y\in Y$, то функция называется всюду определенной, в противном случае -частично определенной. Если область значения функции совпадает с множеством Y, то функция называется *сюръективной*. В случае, когда каждому образу соответствует единственный прообраз, функция называется *инъективной*. Функция, одновременно обладающая свойствами инъективности и сюръективности, называется биективной.

Если представить два множества X и Y в прямоугольной системе координат (см. рис.2), то узлы прямоугольной решетки есть элементы прямого произведения $(x;y)=(X\otimes Y)$. Подмножество, ограниченное линией на рис. 2а), не является функцией, т.к. для x_4 есть два значения y_2 и y_3; подмножество, ограниченное линией на рис. 2б), является всюду определенной биективной функцией, т.к. каждому $x_i\in X$ соответствует единственное значение $y\in Y$; подмножество, ограниченное линией на рис. 2в), является частично определенной функцией, т.к. для x_3 нет значения $y\in Y$.

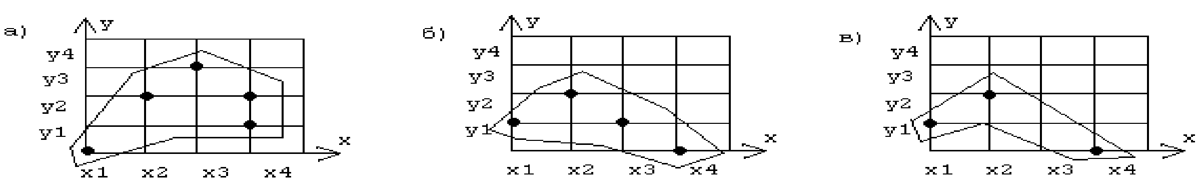


Рис. 2. Графики функций y=f(x).

Соответствие, заданное между двумя или несколькими элементами одного множества X, называют отношением.

Формальная запись отношения не отличается от записи для соответствий, если принять вместо Y множество X. Множество пар отношений обозначают символом R. Например,

$R=\{(x_1;x_2)|x_{1,2}\in X\}\subseteq X^2$;

$R=\{(x_1;x_2;...;x_{n+1})|x_i\in X\}\subseteq X^n\otimes X=X^{n+1}$.

Если (n+1)=1, то отношение называют унарным или одноместным. Такое отношение выделяет в множестве подмножество, удовлетворяющее заданному свойству.

Если (n+1)=2, то отношение называют бинарным или двухместным. Такое отношение позволяет сравнить или упорядочить попарно элементы заданного множества.

Если (n+1)=3, то отношение называют тернарным или трехместным, если равно 4, то четырехместным и т.д.. Наибольшее распространение имеют бинарные отношения в связи с удобством их описания.

Отношения можно задавать перечислением всех его элементов, т.е. формированием списков, или с помощью матриц. При матричном описании бинарного отношения удобно воспользоваться квадратной матрицей ($X\otimes X$), строки и столбцы которой есть элементы множества X, а на пересечении i-ой строки и j-го столбца ставят знак “1”, если предикат $P^2(x_i;x_j)$=“истина” и знак “0”, если предикат $P^2(x_i;x_j)$=”ложь”, т.е.

Например, для множества целых чисел Z и отношения $r_4(x_1;x_2)$ матрица представлена в таблице 2

Таблица 2.

r_4	2	3	4	5	6	8	10
2	1	0	1	0	1	1	1
3	0	1	0	0	1	0	0
4	1	0	1	0	1	1	1
5	0	0	0	1	0	0	1
6	1	1	1	0	1	1	1
8	1	0	1	0	1	1	1
10	1	0	1	1	1	1	1

При графическом представлении отношения все элементы множества X изображаются точками на плоскости листа и называются вершинами графа, а отношения между i-ым и j-ым элементами множества X-линиями, которые называют ребрами (или дугами) графа. В целом фигура, полученная на плоскости листа, называется графом. На рис.3 представлен граф для заданного множества целых чисел и отношения $r_4(x_i;x_j)$.

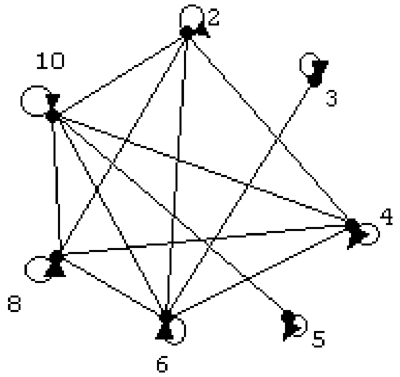


Рис. 3. Граф отношения $r_4(x_i;x_j)$ для X={2;3;4;5;6;8;10}.

Анализ различных бинарных отношений позволяет выделить наиболее характерные свойства, что необходимо для классификации всего множества отношений. Такими свойствами являются: рефликсивность, симметричность и транзитивность.

Бинарное отношение *рефликсивно*, если для любого x_i имеем $r(x_i;x_i)=1$. При матричном задании такого отношения это означает, что на главной диагонали матрицы находятся только "1", а при графическом представлении - петли при каждой вершине графа (см. рис. 4(а)).

Бинарное отношение *антирефлексивно*, если для любого x_i имеем $r(x_i;x_i)=0$, т.е. отношение имеет значение "ложь" применительно к одному элементу x_i. При матричном задании такого отношения это означает, что на главной диагонали матрицы находятся только "0", а при графическом представлении -отсутствие петель при каждой вершине графа (см. рис. 4(б)).

Бинарное отношение *симметрично*, если для любой пары $(x_i;x_j)$ имеем $r(x_i;x_j)=r(x_j;x_i)=1$. При матричном задании такого отношения это означает симметричное расположение "1" относительно главной диагонали, при графическом представлении - отсутствие стрелок на линиях, соединяющих вершины x_i и x_j, или их наличия, но в обе стороны (см. рис. 4(в)).

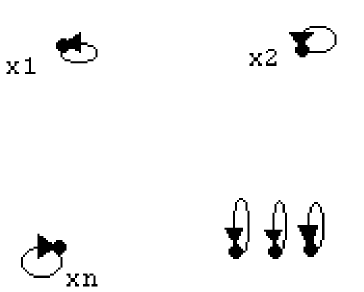
Бинарное отношение *антисимметрично*, если для любой пары $(x_i;x_j)$ при $i\neq j$ имеем $r(x_i;x_j)\neq r(x_j;x_i)$, а при $i=j$ $r(x_i;x_i)=1$. При матричном задании такого отношения это означает несимметричное расположение "1" относительно главной диагонали, но наличие их на главной диагонали, при графическом представлении - наличие стрелок на линиях, соединяющих вершины x_i и x_j и наличие петель у вершин графа (см. рис. 4(г)).

Бинарное отношение *транзитивно*, если для любых трех элементов x_i,x_j,x_k имеем $r(x_i;x_j)=1$ только при условии $r(x_i;x_k)=1$ и $r(x_k;x_j)=1$. При матричном представлении это означает, что если $r(x_i;x_k)=1$ и $r(x_k;x_j)=1$, то это же отношение можно установить между вершинами x_i и x_j через промежуточную вершину x_k, т.е. найти $r(x_i;x_j)=1$; при графическом представлении -

наличие пути из вершины x_i в вершину x_j через промежуточную вершину x_k, используя ребра $(x_i;x_k)$ и $(x_k;x_j)$) (см. рис. 4(д)).

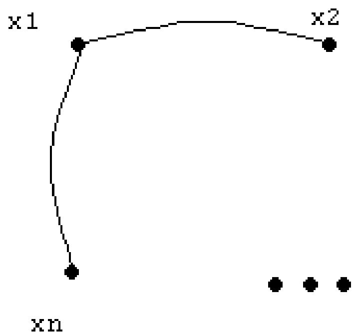
а)

r	x_1	x_2	...	x_n
x_1	1	*	*	*
x_2	*	1	*	*
...	*	*	1	*
x_n	*	*	*	1



в)

r	x_1	x_2	...	x_n
x_1	*	1	*	1
x_2	1	*	*	*
...	*	*	*	*
x_n	1	*	*	*



д)

r	x_1	x_2	...	x_n
x_1	*	1	*	*
x_2	*	*	*	1
...	*	*	*	*
x_n	*	*	*	*

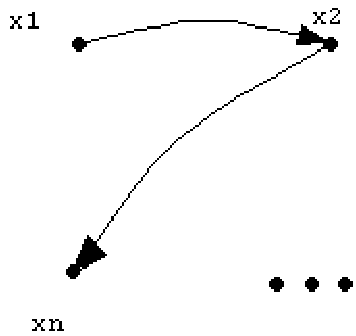
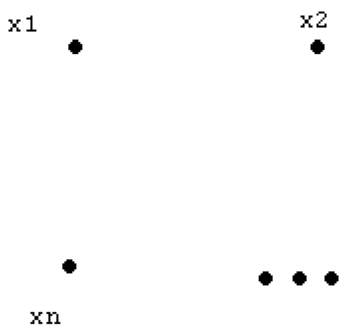


Рис. 3. Матрицы и графы, раскрывающие свойства отношений.

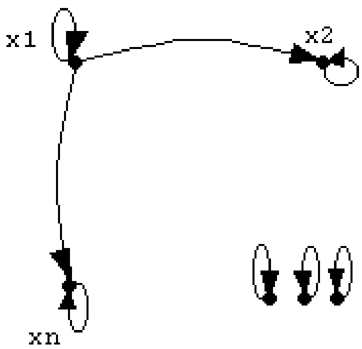
б)

r	x_1	x_2	...	x_n
x_1	0	*	*	*
x_2	*	0	*	*
...	*	*	0	*
x_n	*	*	*	0



г)

r	x_1	x_2	...	x_n
x_1	1	1	*	1
x_2	*	1	*	*
...	*	*	1	*
x_n	*	*	*	1



Свойства отношений позволяют классифицировать множество отношений на типы. Наиболее изученными являются отношения эквиваленции и отношения порядка. Отношение эквиваленции позволяют разбить заданное множество элементов на непересекающиеся подмножества, а отношение порядка -установить порядок между элементами заданного множества.

Бинарное отношение $R\subseteq(X\otimes X)$, удовлетворяющее условиям рефлексивности, симметричности, транзитивности называют отношением *эквиваленции*.

Так на рис. 5а) приведены матрица и граф для двух классов эквиваленции, на рис. 5б) -для одного класса эквиваленции, на рис. 5в) -для трех классов эквиваленции. Анализ матриц показывает, что классу эквиваленции соответствует блок, выделенный на рисунках пунктирной линией, все элементы которого содержат только 1.

Рис. 5. Отношение эквиваленции.

Бинарные отношения $R \subseteq (X \otimes X)$, удовлетворяющие условиям рефлексивности, антисимметричности и транзитивности называют отношением *порядка*. Использование отношения порядка на одном множестве X позволяет упорядочить элементы этого множества, т.е., рассматривая отношение на каждой паре

а)

$r_{\sim}$	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	1	1	0	0
x_2	1	1	0	0
x_3	0	0	1	1
x_4	0	0	1	1

б)

$r_{\sim}$	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	1	1	1	1
x_2	1	1	1	1
x_3	1	1	1	1
x_4	1	1	1	1

в)

$r_{\sim}$	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	1	0	0	0
x_2	0	1	0	0
x_3	0	0	1	1
x_4	0	0	1	1

элементов множества, устанавливать частичный порядок на всём множестве X. Примерами частично упорядоченных множеств являются множество целых чисел с заданным отношением порядка, т.е. {1;2;3…}, множество действительных чисел, в том числе положительных и отрицательных, счетные множества нематематических объектов, упорядоченные по значениям индексов, т.е. X_1, X_2, …,. На рис. 5а) дан пример частичного порядка.

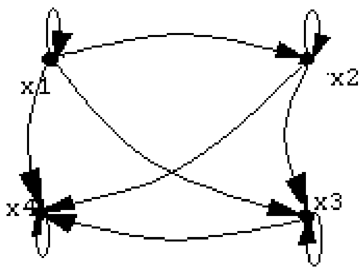
Бинарное отношение $R_{\subseteq}(X \otimes X)$, удовлетворяющее условиям антирефлексивности, асимметричности и транзитивности называют отношением *строго порядка*. Использование отношения строго порядка формирует линейную упорядоченность элементов множества X. На рис. 5б) дан пример отношения строгого порядка.

а)

$r_{\geq}$	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	1	1	1	1
x_2	0	1	1	1
x_3	0	0	1	1
x_4	0	0	0	1

б)

$r_{\geq}$	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	0	1	1	1
x_2	0	0	1	1
x_3	0	0	0	1
x_4	0	0	0	0



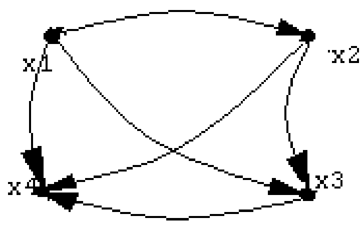


Рис. 6. Отношение порядка.

<u>Задания</u>

1. Задать произвольные бинарные соответствия между множествами S и T
   - с помощью графика;
   - с помощью матрицы.

2. Установить свойства следующих отношений на множестве Z:

   а) $Z_1 + Z_2$ - четно; б) $Z_1 + Z_2 \leq 100$; в) $Z_1 Z_2$ - нечетно.

3. Задать отношение на S
   - рефлексивное;
   - антирефлексивное
   - симметричное;
   - транзитивное;
   - антисимметричное.

4. Задать функцию из S в T
   - произвольную;
   - инъективную;
   - сюръективную;

- биективную.

5. Пусть Z - множество целых чисел. Установить свойства функций, заданных следующими отображениями:

   а) $z \to Z^2$; б) $Z \to -Z$; в) $Z \to 2Z$; г) $Z \to Z + 1$; д) $Z \to |Z|$

Варианты заданий.

1) S={a,b,c} T={b,c,f}
2) S={d,f,g} T={d,g,h}
3) S={a,b,c,d} T={d,e,f,g}
4) S={h,g,d} T={a,b,d,g}
5) S={g,d,b,c} T={b,c,d}
6) S={g,d,f,a} T={b,c,e}
7) S={a,b,e,f} T={c,e,f,g}
8) S=u T={c,k,b,h}
9) S={a,b,c,k} T={k,b,c,f}
10) S={d,f,g,k} T={k,d,g,h}
11) S={a,b,c,d,k} T={k,d,e,f,g}
12) S={h,g,d,k} T={k,a,b,d,g}
13) S={g,d,b,c,k} T={k,b,c,d}
14) S={g,d,f,a,k} T={k,b,c,e}
15) S={a,b,e,f,k} T={k,b,c,f}
16) S={k,a,b,c} T={b,c,f,k}
17) S={k,d,f,g} T={d,g,h,k}
18) S={k,a,b,c,d} T={d,e,f,g,k}
19) S={k,h,g,d} T={a,b,d,g,k}
20) S={k,g,d,b,c} T={b,c,d,k}
21) S={k,g,d,f,a} T={b,c,e,k}
22) S={a,b,k} T={b,k,f}
23) S={a,b,k,d} T={d,e,f,g}
24) S={g,d,b,k} T={b,k,d}
25) S={d,k,g} T={d,g,h}
26) S={g,d,k,a} T={b,k,e}
27) S={k,g,d} T={a,b,d,g}
28) S={a,b,k,f} T={e,f,g}

Контрольный тест

1. Задать отношение **R**= $\{(x,y): x+y=5\}$:
на множествах **A=**$\{1,2,3,4,5\}$ и **B=** $\{1,2,3,4,5\}$ в явном виде
- **R=** {(1,2), (4,1),(2,3),(3,2),(0,5),(5,0)}
- **R**= {(1,4),(2,3),(3,2),(4,1),(5,0)}
- **R=** {(1,4),(2,3),(3,4),(4,5)}

2. Задать отношения **R=**$\{(x,y)\}: y \geq 2x()$ на множестве $A=\{1,2,3,4,5\}$ в виде матрицы

	1	2	3	4	5
1	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0
3	1	0	0	0	0
4	1	0	0	0	0
5	1	1	0	0	0

	1	2	3	4	5
1	0	1	1	1	1
2	0	0	1	1	1
3	0	0	0	1	1
4	0	0	0	0	1
5	0	0	0	0	0

	1	2	3	4	5
1	0	0	1	1	1
2	0	0	0	0	1
3	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0

3. Определить область определения отношения R={(x,y):2+y - нечетное} , заданных на множестве A={1,2,3,4,5}
- $D_{R=}$ (1,2,3,4,5};
- $D_{R=;}$ {1,3,5}
- $D_{R=}$ {2,4}

4. Найти композицию отношений на множестве A = {1,2,3,4}
R = {(1,4), (2,3), (3,2), (4,1)} и Q = {(2,1), (3,2), (4,3)}
- R*Q = $\{(1,1),(2,1),(3,2),(3,3),(4,3),(4,4)\}$;
- R*Q = {(1,1), (2,2), (3,3)};
- R*Q = {(1,3), (2,2), (3,1)}

5. Определить свойства отношения R на множестве A={1,2,3,4,5}
R = {(1,2), (1,3), (2,2), (2,3), (4,4), (4,5)}
- антисимметрично;
- антисимметрично, транзитивно;
- рефлексивно

6. Определить свойство отношения R = {(x,y): x+2y=10} на множестве Z
- антисимметрично;
- антисимметрично, транзитивно;
- рефлексивно

7. Отношение R = {(x,y): 2x>y} на множестве Z является
- эквивалентностью;
- порядком;
- ни тем, ни другим

8. Какие из приведенных отношений на множестве Z является функцией?
R = {(x,y): x>y} , P = {(x,y): x+2y=15}, Q = {(x,y): $x+y^2=26$}

- R;
- P,Q;

- P

9. Отношение R = {(x,y): 2x+4y=10} на множестве Z является
- инъективным отображением;
- сюръективным отображением;
- биективной функцией

10. Функция $y=\frac{1}{x}$ на множестве R является:
- биективным отображением;
- сюръективной функцией;
- инъективной функцией

11.Функция на множестве A = A = {1,2,3,4} задана матрицей

	1	2	3	4
1	0	0	1	0
2	0	0	0	0
3	0	1	0	0
4	0	0	0	1

определить ее свойства:
- биективная;
- инъективная;
- сюръективная

12. Какие из приведенных функций на множестве Z является инъективным?
R = {(x,y): $5x^2$+y=7} , P = {(x,y): x+8y=3} Q = {(x,y): x/y=5}
- P, Q
- R, P
- R, Q

13. Из приведенных отношений на множество R выбрать функции
P = R = {(x,y): xy=10} , Q = {(x,y): x^2y=1} , R = {(x,y): xy^2=25}
- P, Q;
- Q, R;
- R, P

14. Из приведенных отношений на множестве R выбрать отображения
P = {(x,y): |x|=y} , Q = {(x,y): x=|y|} , R = {(x,y): |x|=|y|}
- R;
- P, Q;
- Q

15. На множестве людей задано отношение: x и y находятся в отношении R, если они одного роста. Это отношение является?
- эквивалентностью;
- порядком;
- ни тем, ни другим

Лабораторная работа № 4 Алгебраические структуры

Цель работы:

Теоретические сведения

При изучении алгебраических структур определяющим понятием является понятие *операции*.

Операцией над множеством S называется функция $f : S^n \to S$, $n \in N$.

Операция $S^n \to S$ имеет порядок n. При $n=1$ операции называются *унарными*. Например, операция перемены знака на Z : $x \to y : x + y = 0$, $x, y \in Z$. При $n = 2$ операции называются *бинарными*. Например, операция сложения на Z.

⊗	a	b	c
a	a	a	b
b	b	a	c
c	a	b	b

Операции, определенные на конечных множествах удобно задавать в виде таблиц. Введем произвольную операцию ⊗ на множестве $\{a, b, c\}$.

Следовательно $a \otimes b = a$, $b \otimes b = a$, $c \otimes b = b$, и т.д.

Свойства операций.

1. Бинарная операция ⊗ на множестве A *коммутативна*, если $a \otimes b = b \otimes a$, для всех $a, b \in A$.

Очевидно, что обычная операция сложения на Z коммутативна, а вычитания - нет.

2. Бинарная операция ⊗ на множестве A *ассоциативна*, если $(a \otimes b) \otimes c = a \otimes (b \otimes c)$, для всех $a, b \in A$.

Очевидно, что обычная операция сложения на Z ассоциативна, а вычитания - нет.

3. Пусть ⊗ - бинарная операция на множестве A и $l, r, e \in A$ такие, что $l \otimes a = a$, $a \otimes r = a$, $e \otimes a = a \otimes e = a$, тогда l называют *левой единицей*, r - *правой единицей*, e - *единицей* по отношению к ⊗ на A. Единица на множестве должна быть единственной.

Рассмотрим множество Z - целых чисел. Здесь 0 является правой единицей по отношению к вычитанию и единицей по отношению к сложению.

4. Пусть $\otimes$ - операция на A с единицей е и $x \otimes y = e$. Тогда говорят, что x - *обратный элемент* к y, y- обратный элемент к x. Для каждого элемента существует единственный обратный элемент.

Алгебраической структурой называется пара элементов (A,σ), где A – несущее множество, а *σ-сигнатура*: операции и отношения, заданные на множестве A.

Если сигнатура содержит только отношения, то алгебраическая структура называется *моделью.* Наиболее широко известным примером модели являются графы.

Если сигнатура содержит только операции, то алгебраическая структура называется *алгеброй.*

Рассмотрим сначала алгебры , которые имеют только одну бинарную операцию.

1. *Полугруппой* называется множество S с бинарной операцией $\otimes$, которая удовлетворяет только требованию ассоциативности:

$$x \otimes (y \otimes z) = (x \otimes y) \otimes z \qquad \forall x,y,z \in S.$$

2. *Моноидом* называется множество S вместе с бинарной операцией $\otimes$ такой , что $\otimes$ ассоциативна:

$\exists u \in M : u \otimes x = x = x \otimes u \qquad \forall x \in S$

(u – наз. единицей по отношению к $\otimes$)

3. *Группой* называется множество S с бинарной операции $\otimes$**:**

1) $\otimes$ ассоциативна, т.е. $x \otimes (y \otimes z) = (x \otimes y) \otimes z \quad \forall x,y,z \in S.$

2) существует элемент $u \in S$ (единица по отношению к $\otimes$)

$u \otimes x = x = x \otimes u \qquad \forall x \in S$

3) существуют обратные элементы : $\forall x \in S$ соответствует $y \in S$: $x \otimes y = u = y \otimes x$.

4. *Абелевой группой* называется группа, в которой операция $\otimes$ - *коммутативная*, т.е. $x \otimes y = y \otimes x$, $\forall x,y \in S$

Теперь перейдем к рассмотрению структур , которые имеют более, чем одну операцию.

1. *Кольцом* называется множество F с двумя определенными на нем бинарными операциями $\otimes$ и $\oplus$ такими что:

$\otimes$ ассоциативна ; $x \otimes (y \otimes z) = (x \otimes y) \otimes z \quad \forall x,y,z \in F$

$\oplus$ ассоциативна ; $x \oplus (x \oplus y) = (x \oplus y) \oplus z \quad \forall x,y,z \in F$

$\oplus$ коммутативна; $x \oplus y = y \oplus x \quad \forall x,y \in F$

$\oplus$ имеет единицу, которая называется нулем и обозначается 0; $x \oplus 0 = x \quad \forall x \in F$

существуют обратные элементы относительно $\oplus$; $-x \quad x \oplus (-x) = 0$

$\otimes$ *дистрибутивна* по отношению к $\oplus$.

$x \otimes (y \oplus z) = (x \otimes y) \oplus (x \otimes z) \qquad \forall x,y,z \in F$

Можно утверждать, что структура $(Zn, *, +) \quad \forall n \in N$ является кольцом .

Будем говорить , что кольцо коммутативно, если $\otimes$ коммутативна , и является кольцом с единицей, если существует единица относительно $\otimes$.

$(Zn, *, +)$ – коммутативное кольцо с единицей $\forall n \in N$.

2. *Полем* называется множество F с двумя определенными на нем бинарными операциями $\otimes$ и $\oplus$ такими что:

$\oplus$ ассоциативна: $x \oplus (x \oplus y) = (x \oplus y) \oplus z \quad \forall x,y,z \in F$

$\oplus$ коммутативна: $x \oplus y = y \oplus x \quad \forall x,y \in F$

существует единица по отношению к $\oplus$, обозначаемая $0 \quad x \oplus 0 = x \quad \forall x \in F$

существуют обратные элементы $-x$ по отношению к $\oplus \qquad x \oplus (-x) = 0$

$\otimes$ ассоциативна: $x \otimes (y \otimes z) = (x \otimes y) \otimes z \quad \forall x,y,z \in F$

$\otimes$ коммутативна: $x \otimes y = y \otimes x \quad \forall x,y \in F$

существует единица по $\otimes$ обозначаемая $1 \quad x \otimes 1 = x' \quad \forall x \in F$

$\otimes$ дистрибутивна по отношению к $\oplus$: $x \otimes (y \oplus z) = (x \otimes y) \oplus (x \otimes z) \qquad \forall x,y,z \in F$

существуют обратные элементы по $\otimes$: $\forall \; x \in F \setminus \{0\} \quad \exists \; y \in F: x \otimes y = 1$ обозначается $y = x^{-1}$.

Например множество вещественных чисел с операциями сложения и умножения - $(R, *, +)$ является полем.

3. Решеткой называется множество F с двумя определенными на нем бинарными операциями $\otimes$ и $\oplus$ такими что:

$\otimes$ и $\oplus$ - коммутативны: $x \otimes y = y \otimes x \quad x \oplus y = y \oplus x \quad \forall x,y \in F$

$\otimes$ и $\oplus$ - ассоциативны: $x \otimes (y \otimes z) = (x \otimes y) \otimes z \; x \oplus (x \oplus y) = (x \oplus y) \oplus z \quad \forall x,y,z \in F$

$\otimes$ и $\oplus$ - *идемпотентны:* $x \otimes x = x \quad x \oplus x = x \quad \forall x \in F$

$\otimes$ и $\oplus$ обладают свойствами *поглощения*: $x \otimes (x \oplus y) = x \quad x \oplus (x \otimes y) = x \quad \forall x,y \in F$

Примером решетки может служить множество целых чисел с операциями максимума и минимума из двух чисел.

Решетка называется дистрибутивной, если операции $\otimes$ и $\oplus$ дистрибутивны относительно друг друга: $x \otimes (y \oplus z) = (x \otimes y) \oplus (x \otimes z) \quad x \oplus (y \oplus z) = (x \oplus y) \otimes (x \oplus z) \quad \forall x,y,z \in F$

Решетка называется *ограниченной*, если в ней существует точная верхняя (*sup*) и точная нижняя грань (*inf*): $x \otimes inf = inf \quad x \oplus sup = sup \quad \forall x \in F$

Ограниченная решетка называется решеткой с *дополнениями*, если для всех элементов из F существуют дополнения $x' \in F$: $x \otimes x' = inf \quad x \oplus x' = sup \quad \forall x \in F$.

Дистрибутивная ограниченная решетка с доплолнениями называется Булевой алгеброй. Примером Булевой алгебры служит булеан любого множества с определенными на нем операциями пересечения, объединения и дополнения.

<u>Задания</u>

1. На множестве T задать операцию ∗ так, чтобы алгебра (T,*) была полугруппой
2. На множестве T задать операцию ∗ так, чтобы алгебра (T,*) была моноидом.
3. На множестве T задать операцию ∗ так, чтобы алгебра (T,*) была группой.

Варианты заданий:

1. T = { t_1, t_2, t_3 }
2. T = { s_1, s_2, s_3, s_4 }
3. T = {1, 2, 3, 4}
4. T = {a, b, c, d}
5. T = {@, #, $, %}
6. T = {begin, end, do, for}
7. T = {куб, шар, конус, сфера}
8. T = {кот, собака, корова, курица}
9. T = { aa, ab, ba, bb}
10. T = {11, 12, 21, 22}
11. T = {s, ss, sss, ssss}
12. T = {+, -, *, /}

13. T = {<, >, <=, >=}
14. T = {1, 10, 100, 1000}
15. T = {□, ☎, □, □}
16. T = {кот, собака, корова, курица}
17. T = { aa, ab, ba, bb}
18. T = {11, 12, 21, 22}
19. T = {s, ss, sss, ssss}
20. T = {+, -, *, /}

4. Пусть задано множество T = { 1, 2, 3, 4 }. Установить тип алгебраической системы (T,*), где * - операция на множестве T, задана следующей таблицей:

1)

	1	2	3	4
1	2	3	4	1
2	3	4	1	2
3	4	1	2	3
4	1	2	3	4

2)

	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	2	3	4
3	3	3	3	3
4	4	2	3	4

3)

	1	2	3	4
1	2	2	3	1
2	1	3	3	2
3	1	2	1	3
4	1	2	3	4

4)

	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	3	1	4
3	3	1	4	1
4	4	2	1	2

5)

	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	1	2	1	3
3	1	3	3	2
4	2	2	3	1

6)

	1	2	3	4
1	4	2	1	2
2	3	1	4	1
3	2	3	1	4
4	1	2	3	4

7)

	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	1	2	3	4
3	1	2	3	4
4	1	2	3	4

8)

	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	2	3	4
3	3	3	3	3
4	4	2	3	4

9)

	1	2	3	4
1	1	1	1	1
2	2	2	2	2
3	3	3	3	3
4	4	4	4	4

10)

	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	3	1	4
3	3	1	4	1
4	4	2	1	2

11)

	1	2	3	4

12)

	1	2	3	4

1	4	4	4	4
2	3	3	3	3
3	2	2	2	2
4	1	1	1	1

1	1	2	3	4
2	2	2	3	4
3	3	3	3	3
4	4	2	3	4

13)

	1	2	3	4
1	4	3	2	1
2	4	3	2	1
3	4	3	2	1
4	4	3	2	1

14)

	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	3	1	4
3	3	1	4	1
4	4	2	1	2

15)

	1	2	3	4
1	2	3	4	1
2	3	4	1	2
3	4	1	2	3
4	1	2	3	4

16)

	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	2	3	4
3	3	3	3	3
4	4	2	3	4

17)

	1	2	3	4
1	2	2	3	1
2	1	3	3	2
3	1	2	1	3
4	1	2	3	4

18)

	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	3	1	4
3	3	1	4	1
4	4	2	1	2

19)

	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	1	2	3	4
3	1	2	3	4
4	1	2	3	4

20)

	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	2	3	4
3	3	3	3	3
4	4	2	3	4

5. Установить свойства операций и тип алгебраической системы

N - множество натуральных чисел; Z - множество целых чисел; R – множество действительных чисел; Q - множество рациональных чисел; + - сложение; * - умножение; - - вычитание; / - деление

1) {N, + ,*}
2) {N, + }
3) {N, +,*}
4) {Z, + ,*}
5) {Z, + }
6) {Z,*}
7) {Q, + ,*}
8) {Q, + }
9) {Q, *}
10) {R, + ,*}

11) {R, + }
12) {R, *}
13) {Q, - ,*}
14) {Z, - ,*}
15) {N, + ,-}
16) {N, - ,*}
17) {N, - }
18) {N, -,*}
19) {R, - ,*}
20) {Q, - ,*}

Контрольный тест

1. Определить, является ли операция x°y=y/(x-1) замкнутой на множестве Z:
- да
- нет

2. Определить свойства операции x°y=2xy-5, заданной на множестве Z:

а) коммутативность +
ассоциативность -
единица -
обратный элемент -

б) коммутативность +
ассоциативность -
единица +
обратный элемент +

в) коммутативность -
ассоциативность +
единица -
обратный элемент -

г) коммутативность -
ассоциативность -
единица -
обратный элемент -

3. Определить свойства операции x°y=min(x,x-y), заданной на множестве Z:

а) коммутативность +
ассоциативность -
единица -
обратный элемент -

б) коммутативность -

ассоциативность +
единица -
обратный элемент -

в) коммутативность -
ассоциативность -
единица +
обратный элемент +

г) коммутативность -
ассоциативность -
единица -
обратный элемент -

4. Определить свойства операций, заданной на множестве {a,b,c}

	a	b	c
a	a	b	c
b	b	b	b
c	c	c	c

а) коммутативность +
ассоциативность +
единица +
обратный элемент +

б) коммутативность +
ассоциативность +
единица +
обратный элемент -

в) коммутативность +
ассоциативность +
единица -
обратный элемент -

г) коммутативность -
ассоциативность -
единица -
обратный элемент -

5. Определить тип алгебры ({a,b,c}, °) где ° задано таблицей ;

	a	b	c
a	a	b	c
b	a	b	c
c	a	b	c

- полугруппа
- моноид
- группа
- абелева группа

6. Определить тип алгебры (N, min(x,y)) ;

- полугруппа
- моноид

- группа
- абелева группа

7. Определить тип алгебры ({истина, ложь}, and, or);

- кольцо
- поле
- решетка
- булева алгебра

8. Найти единицу для операции x°y=2x-5y+1, заданной на множестве Z ;

- 1
- x+1
- нет
- 5

9. Определить тип алгебры ({0, 1}, min (x, y), max (x, y)) ;
- кольцо
- поле
- решетка
- булева алгебра

10. Определить тип алгебры ({0, 1, 2}*, +)

	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	1

+	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

- кольцо
- поле
- решетка
- булева алгебра

11.Определить тип алгебры (C, +,*), где C – множество комплексных чисел;
- кольцо
- поле
- решетка
- булева алгебра

12. Найти единицу для операции $x \quad y = \sqrt{2x^2 + y^2}$, (x,y)€{x:x>=0,x€R} ;
- правая единица
- левая единица
- единица 0
- нет единиц

13. Определить тип алгебры ({1, 2, 3}, min(x, y));
- полугруппа
- моноид
- группа
- абелева группа

14. Определить свойства операции сложения квадратных матриц, элементами которых являются целые числа;

а) коммутативность +
ассоциативность +
единица +
обратный элемент +

б) коммутативность +
ассоциативность +
единица -
обратный элемент -

в) коммутативность -
ассоциативность +
единица +
обратный элемент -

г) коммутативность -
ассоциативность -
единица -
обратный элемент -

15. Определить свойства операции умножения квадратных матриц, элементами которых являются целые числа;

а) коммутативность +
ассоциативность +
единица +
обратный элемент +

б) коммутативность +
ассоциативность +
единица -
обратный элемент -

в) коммутативность -
ассоциативность +
единица +
обратный элемент -

г) коммутативность -
ассоциативность -
единица -
обратный элемент -

Лабораторная работа № 5 Элементы комбинаторики

<u>Цель работы:</u>

<u>Теоретические сведения</u>

Комбинаторика изучает вопросы о том, сколько различных комбинаций, подчиненных тем или иным условиям, можно составить из заданных объектов.

Комбинаторные задачи бывают самых различных видов. Но большинство задач решается с помощью двух основных правил – *правила суммы и произведения*.

Если некоторый объект a можно выбрать m способами, а другой объект b можно выбрать n способами, то выбор одного из этих объектов (либо a, либо b) можно осуществить

$N = m + n$ способами.

При использовании правила суммы следует иметь ввиду, что ни один из способов выбора объекта а не должен совпадать с каким-либо способом выбора объекта b. Если же совпадение имеют место, то правило суммы теряет силу, и из суммарного числа (m + n) выборов следует вычесть число k таких совпадений:

$$N = m + n – k.$$

Если некоторый объект a можно выбрать m способами, а другой объект b можно выбрать n способами, причем ни один из способов выбора объекта b не зависит от того, как выбран объект a, то выбор этих двух объектов (a и b) можно осуществить

$N = m * n$ способами.

Правило суммы и произведения обобщаются на произвольное число.

Пусть Ω - множество из n элементов.

Размещениями из n элементов по m называют упорядоченные m – элементные подмножества множества Ω из n элементов.

Два различных размещения из данных n элементов, взятых по m, различаются либо составом входящих в них элементов, либо (при одном и том же составе элементов) порядком их расположения. Число всех размещений из n элементов по m обозначают A_n^m и вычисляют по формуле:

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$$

Различные упорядоченные множества, полученные из Ω, которые отличаются лишь порядком элементов, называются *перестановками* множества Ω. Число всех перестановок из n элементов обозначают P_n и вычисляют по формуле:

$P_n = n!$.

Сочетанием из n элементов по m называется произвольное m - элементное подмножество множества из n элементов. Два различных сочетания из данных n элементов, взятых по m, отличаются составом входящих в них элементов: если два сочетания различны, то в одном из них содержится хотя бы один элемент, не содержащийся в другом. Порядок элементов в подмножестве не существенен. Число сочетаний (m – элементных подмножеств множества из n элементов, где $0 \le m \le n$) обозначают C_n^m и вычисляют по формуле:

$$C_n^m = \frac{1}{m!} A_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

Число различных перестановок, которые можно составить из n элементов, среди которых имеются n_1 элементов 1-го типа, n_2 элементов 2-го типа и т.д., n_k элементов k-го типа, равно

$$P(n_1, \ldots, n_k) = \frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_k!}, \qquad (n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n).$$

Сочетаниями из n элементов по m с повторениями называются группы, содержащие m элементов, причем каждый элемент принадлежит одному из n типов.

Число сочетаний с повторениями обозначается $\overline{C}_n^m$ и вычисляется по формуле:

$$\overline{C}_n^m = C_{n+m-1}^m = C_{n+m-1}^{n-1} = \frac{(n+m-1)!}{m!(n-1)!}$$

Число *размещений с повторениями* обозначается $\overline{A}_n^m$ и вычисляется по формуле:

$$\overline{A}_n^m = n^m$$

Задания

1. Определить количество размещений с неограниченными повторениями объема m из n различных элементов.
2. Определить количество m-перестановок из n различных элементов
3. Определить количество перестановок из n различных элементов.
4. Определить число заполнений m предметов в n различных ячейках.

Варианты заданий:

1) n=10, m=2;	3) n=10, m=4;	5) n=9, m=2;
2) n=10, m=3;	4) n=10, m=5;	6) n=9, m=3;

7) n=9, m=4;
8) n=9, m=5;
9) n=8, m=2;
10) n=8, m=3;
11) n=8, m=4;
12) n=8, m=5;
13) n=11, m=2;
14) n=11, m=3;
15) n=11, m=4;
16) n=11, m=5;
17) n=9, m=5;
18) n=8, m=2;
19) n=8, m=3;
20) n=8, m=4;
21) n=8, m=5;
22) n=11, m=2;
23) n=11, m=3;
24) n=11, m=4
25) n=11, m=5;

Решить 4 задачи по индивидуальному заданию

Контрольный тест

1. Для записи целого числа в компьютере используется 2 байта - 16 двоичных знаков. Первый из них отведен на знак числа (+ или -), а остальные содержат модуль числа. Сколько различных целых чисел может использовать компьютер?
- 512
- 65536
- 256
- 1024

2. Сколько различных вариантов можно получить бросая пять игральных костей?
- 288
- 638
- 1252
- 36

3. Сколько существует различных шестизначных номеров, начинающихся на 38?
- 531441
- 1000000
- 10000
- 6561

4. Сколько существует различных трехзначных чисел, сумма цифр которых равна 3?
- 3
- 6
- 9
- 12

5. В парламентскую комиссию необходимо выбрать пять человек. Среди кандидатов 5 представителей партии №1, 3 представителя партии №2, и 4 партии №3. Сколько разных комиссий можно составить, если представители партии №1 и №2 не могут быть ее членами одновременно.
- 115
- 164
- 220
- 140

6. В парламентскую комиссию необходимо выбрать пять человек. Среди кандидатов 5 представителей партии №1, 3 представителя партии №2, и 4 партии №3. Сколько разных

комиссий можно составить, если в нее должен входить по крайней мере один представитель партии №3.

- 115
- 164
- 330
- 105

7. Сколькими способами можно расставить 8 черных шашек на белых полях шахматной доски..

- 10518300
- 1642738
- 27352000
- 951730

8. Сколько различных слов можно получить из слова АБРАКАДАБРА.

- 123350
- 7650
- 83160
- 15120

9. Сколько различных слов можно получить из слова АБРАКАДАБРА, если обе буквы ББ будут стоять рядом?

- 123350
- 15120
- 7650
- 83160

10. Вычислить число размещений из 8 по 5 без повторений.

- 6719
- 6720
- 6721
- 6722
-

11. Вычислить число сочетаний из 9 по 2 без повторений.

- 16
- 25
- 36
- 40

12. Вычислить число размещений из 7 по 2 с повторениями.

- 128
- 96
- 64
- 49

13. Вычислить число сочетаний из 6 по 5 с повторениями.

- 288
- 256
- 512
- 200

14. Вычислить число перестановок из 8 предметов.

- 8
- 128
- 256
- 40320

15. Сколько существует различных нечетных четырехзначных чисел, читающихся одинаково слева и справа.

- 40
- 50
- 90
- 45

Лабораторная работа №6 Основные понятия теории графов

Цель работы:

Теоретические сведения

Совокупностью объектов произвольной природы и отношений между каждой парой этих объектов может быть изображено на плоскости в виде множества точек, являющихся образом множества объектов, и множества отрезков линий, соединяющих пары точек, что является образом множества отношений. Такой образ совокупности объектов и отношений принято называть графом. Множество точек, являющихся образом множества объектов, называют вершинами графа, а множество отрезков линий, являющихся образом множества отношений, - рёбрами или дугами графа.

Граф может быть задан в форме: $G=<X;r>$, где $r=\{(x_i;x_j)|x_i,x_j \in X\} \in (X \times X)$

Граф $G=<X;r>$ называют неориентированным, если $(x_i;x_j)=(x_j;x_i)$, в этом случае отрезок линии $(x_i;x_j)$ называют ребром.

Граф $G=<X;r>$ называют ориентированным, если $(x_i;x_j) \neq (x_j;x_i)$, в этом случае отрезок линии $(x_i;x_j)$ называют дугой.

На рис. 16 приведены неориентированный и ориентированный графы.

Любая программа или электронная схема, любой производственный или вычислительный процесс могут быть представленны ориентированным графом, а любая схема транспортной или электрической сети - неориентированным графом.

Граф $G=<X;r>$, между двумя вершинами которого может быть задано несколько рёбер или дуг, называют мультиграфом.

Для определения отношения принадлежности вершин графа ребру или дуге и, наоборот,рёбер или дуг-вершине вводится понятие “инциденции”, т.е. вершина x_i инцидентна ребру или дуге $(x_i;x_j)$, если она является концевой вершиной данного отрезка линии, а ребро или дуга $(x_i;x_j)$ инцидентна вершине x_i, если отрезок линии ограничен концевой вершиной x_i. Следует обратить внимание, что отношение принадлежности, определяющее понятие “инциденции”, устанавливает связь между элементами двух разных множеств X и r.

Число дуг для ориентированного графа $G=<X;r>$, исходящих из вершины x_i, называют полустепенью вершины графа и обозначают $deg_j(x_i;x_j)^+$. Вершину x_i, инцидентную исходящей дуге $(x_i;x_j)^+$, называют вершиной - истоком.

Число дуг для ориентированного графа G=<X;r>, заходящих в вершину x_i, называют также полустепенью вершины графа и обозначают $deg_i^-=deg_j(x_i;x_j)^-$. Вершину x_i, инцидентную заходящей дуге $(x_j;x_i)^-$, называют вершиной - стоком.

Две вершины графа называются смежными, если они различны и между ними существует ребро или дуга.

Вершина x_i, несмежная ни с одной вершиной графа, называется изолированной. На рис.16 изолированной является вершина x_2 .

Два ребра также называются смежными, если они различны и имеют общую вершину.

Последовательность смежных рёбер или дуг, соединяющих вершины x_i и x_j , называют маршрутом и обозначают $M_j=((x_i,x_k);\ldots\ldots(x_l;x_j))$. Например, для графа на рис.16а) между вершинами x_0 и x_5 существует шесть маршрутов, т.е.

$M_{0;5}=\{(r_{0;4};r_{4;5});(r_{0;1};r_{1;4};r_{4;5});(r_{0;1};r_{1;5});(r_{0;4};r_{4;1};r_{1;5});(r_{0;4};r_{4;1};r_{1;3};r_{3;5});\ (r_{0;1};r_{1;3};r_{3;5})\}$.

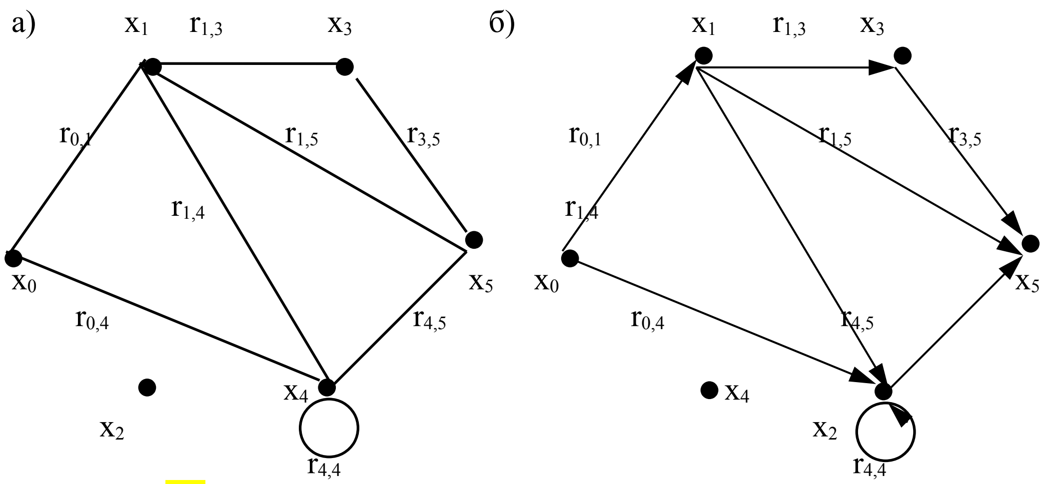


Рис.16. Неориентированный (а) и ориентированный (б) графы.

Маршрут неориентированного графа G=<X;r>, связывающий вершины x_i и x_j , называют цепью.

Маршрут ориентированного графа G=<X;r>, связывающий вершины x_i и x_j , называют путём.

Маршрут называют простым, если при его обходе каждая промежуточная вершина встречается не более одного раза.

Маршрут называют открытым, если его концевые вершины различны, и замкнутым, если его концевые вершины совпадают.

Замкнутый маршрут для неориентированного графа называют циклом, а для ориентированного графа - контуром.

Маршрут называют эйлеровым, если он замкнут и проходит через каждое ребро графа только по одному разу.

Маршрут называют гамильтоновым, если он замкнут и проходит через каждую вершину графа только по одному разу.

Длина маршрута равна числу смежных рёбер, соединяющих вершины x_i и x_j

Длину минимального маршрута, соединяющего вершины x_i и x_j называют расстоянием. Так расстояние между вершинами x_0 и x_5 графа, приведённого на рис.16а), равно 2.

Замкнутый маршрут, который содержит только одно ребро или дугу (длина маршрута равна 1), называют петлёй. На рис.16 петля указана для вершины x_4.

Если ребро или дуга обладают дополнительной характеристикой - протяжённостью $l_{k,l}$, то длина маршрута равна сумме длин рёбер или дуг, его составляющих.

Если ребро или дуга обладают дополнительной характеристикой - пропускной способностью, то пропускная способность маршрута равна минимальной пропускной способности для множества рёбер или дуг, его составляющих.

Граф $G=\langle X;r\rangle$ называют связным, если любые две его вершины можно соединить цепью.

Для ориентированного графа выделяют сильную связность, когда любые две его вершины взаимодостижимы при наличии дуг, и слабую связность, когда любые две его вершины достижимы только при условии замены дуг на рёбра.

Граф $G=\langle X;r\rangle$ называют полным, если любые две его вершины смежны между собой (см. рис.17а)).

Граф $G=\langle X;r\rangle$ называют пустым, если любые две его вершины не смежны между собой (см. рис.17б)).

Граф $\rceil G=\langle X;r'\rangle$ называют дополнительным для графа $G=\langle X;r\rangle$, если он опирается на множество вершин графа G, которые смежны для графа $\rceil G$ только в случае их несмежности в графе G, т.е. $r'=\bar{r}$. Так пустой граф (см. рис.17б)) есть дополнительный для полного графа (см. рис.17а)).

Граф $G=\langle X;r\rangle$ называют деревом, если он связный, но без циклов, петель и кратных рёбер или дуг (см. рис.18а)).

Граф $G=\langle X;r\rangle$ называют лесом, если он несвязный и без циклов, петель и кратных рёбер или дуг.

Расстояние от вершины x_i для графа типа дерево до наиболее удалённой вершины x_j называют эксцентриситетом графа и обозначают e_i.

Множество вершин графа типа дерево, имеющих минимальный эксцентриситет, формируют центроид графа. Наибольшее значение эксцентриситета для множества вершин графа типа дерево определяет диаметр графа. Одна из вершин центроида по выбору формирует центр графа. На рис. 18 представлены основные характеристики графа типа дерево.

Следует обратить внимание, что в связном графе типа дерево число рёбер всегда равно (n-1), где n - число вершин графа.

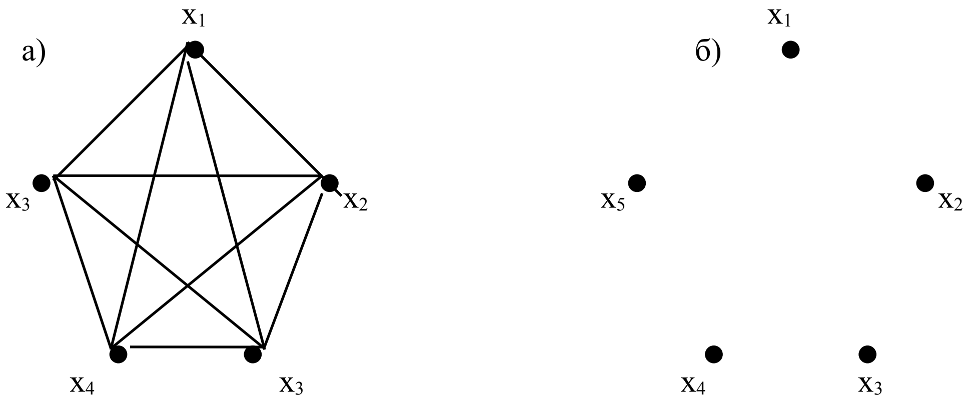


Рис. 17. Полный (а) и пустой (б) графы.

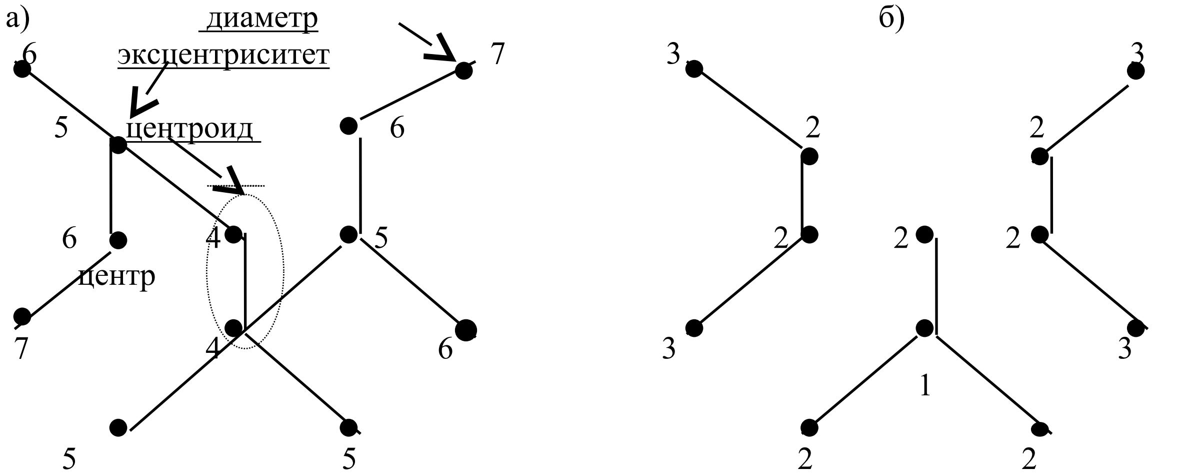


Рис. 18. Граф типа дерево (а) и лес (б).

Граф может быть задан для анализа с помощью таблиц или матриц.

Матричное описание графа удобно для вычисления различных чисел графа и выполнения различных алгебраических операций, т.к. опирается на глубоко разработанную теорию матриц.

Матрица инциденции. Поскольку инциденция есть отношение принадлежности элемента одного множества X другому множеству r, то матрица инциденции $||h_{i;j}||$ есть прямоугольная, число строк которой равно мощности множества $|r|=m$, а число столбцов - мощности множества $|X|=n$. Элементы матрицы инциденции для неориентированного графа определяются соотношением:

$$h_{i;j}^{X}=\begin{cases}1, & \text{если ребро } r_{i;j} \text{ инцидентно вершинам } x_i \text{ и } x_j;\\ 0, & \text{в противном случае;}\end{cases}$$

В таблице 9 представлена матрица инциденции для неориентированного графа (см. рис. 16а)). Следует отметить, что в каждой строке матрицы количество единиц равно двум, что характеризует наличие двух концевых вершин для отрезка линии, представляющего ребро. В каждом столбце матрицы инциденции количество единиц
равно степени вершины, т.е. deg_i, поэтому для последующего анализа желательно выделить строку, раскрывающую степени вершин графа.

Элементы матрицы инциденции для ориентированного графа определяются другим соотношением:

$$h_{i;j}=\begin{cases} +1, & \text{если дуга } r_{i,j} \text{ исходит из вершины } x_i; \\ 0, & \text{если дуга } r_{i,j} \text{ не инцидентна вершинам } x_i \text{ и } x_j; \\ -1, & \text{если дуга } r_{i,j} \text{ заходит в вершину } x_j. \end{cases}$$

Таблица 10.

h	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
$r_{0,1}$	+1	-1	0	0	0	0
$r_{0,4}$	+1	0	0	0	-1	0
$r_{1,3}$	0	+1	0	-1	0	0
$r_{1,4}$	0	+1	0	0	-1	0
$r_{1,5}$	0	+1	0	0	0	-1
$r_{3,5}$	0	0	0	+1	0	-1
$r_{4,4}$	0	0	0	0	± 1	0
$r_{4,5}$	0	0	0	0	+1	-1
δ_i^+	2	3	0	1	2	0
δ_i^-	0	1	0	1	3	3

В таблице 10 представлена матрица инциденции для ориентированного графа (см. рис. 16б)). Также можно отметить, что в каждой строке сумма “+1” и “-1” равна двум, что характеризует наличие для отрезка линии, представляющего дугу, одной вершины - истока и одной вершины - стока.

В каждом столбце матрицы инциденции число “+1” равно полустепени исхода вершины x_i, т.е. deg_i^+, а число “-1” равно полустепени захода вершины x_i, т.е. deg_i^-.

Матрица смежности. Поскольку смежность есть бинарное отношение между элементами одного множества, то матрица смежности $\|r_{i,j}\|$ есть квадратная матрица, число строк и столбцов которой равно мощности множества $|X|=n$.

Элементы матрицы смежности определяются соотношением:

$$r_{i,j}=\begin{cases} 1, & \text{если вершина } x_i \text{ смежна вершине } x_j; \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Таблица 9.

h^X	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
$r_{0,1}$	1	1	0	0	0	0
$r_{0,4}$	1	0	0	0	1	0
$r_{1,3}$	0	1	0	1	0	0
$r_{1,4}$	0	1	0	0	1	0
$r_{1,5}$	0	1	0	0	0	1
$r_{3,5}$	0	0	0	1	0	1
$r_{4,4}$	0	0	0	0	1	0
$r_{4,5}$	0	0	0	0	1	1
δ_i	2	4	0	2	4	3

В таблице 11 представлена матрица смежности для неориентированного графа (см. рис. 16а)). Элементы матрицы смежности, равные 1, расположены симметрично относительно главной диагонали. В каждой строке и в каждом столбце такой матрицы число “1” равно

Таблица 11.

r	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	δ_i
x_0	0	1	0	0	1	0	2
x_1	1	0	0	1	1	1	4
x_2	0	0	0	0	0	0	0
x_3	0	1	0	0	0	1	2
x_4	1	1	0	0	1	1	4
x_5	0	1	0	1	1	0	3
δ_i	2	4	0	2	4	3	

Таблица 12.

r^0	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	δ_i^+
x_0	0	1	0	0	1	0	2
x_1	0	0	0	1	1	1	3
x_2	0	0	0	0	0	0	0
x_3	0	0	0	0	0	1	1
x_4	0	0	0	0	1	1	2
x_5	0	0	0	0	0	0	0
δ_i^-	0	1	0	1	3	3	

степени вершины, т.е. deg_i. Поэтому можно выделить дополнительную строку или столбец для хранения информации о степени каждой вершины графа.

В таблице 12 представлена матрица смежности для ориентированного графа (см. рис. 16б)), но при условии, что строки заданы вершинами-истоками графа, а столбцы - вершинами-стоками. Поэтому итоговый столбец таблицы- δ_i^+ показывает полустепень каждой вершины-истока, а итоговая строка- δ_I^- - полустепень каждой вершины-стока.

По структуре матрицы смежности можно сделать выводы:

1. каждый ненулевой элемент главной диагонали соответствует петле на графе;
2. матрица смежности для неориентированного графа симметрична относительно главной диагонали;
3. матрица смежности для ориентированного графа несимметрична относительно главной диагонали;

Матрица весов. Протяжённость ребра или дуги, а также затраты времени, энергии или финансов на перемещение пакета информации или транспортной единицы по ребру или дуге из вершины x_i в вершину x_j формирует рёберно-взвешенный граф.

Элементы матрицы весов рёберно-взвешенного графа определяются соотношением:

$$r_{i,j}=\begin{cases} 0, \text{ если } i=j; \\ l_{i,j}, \text{ если вершина } x_i \text{ смежна вершине } x_j \text{ и вес ребра } l_{i,j}; \\ \infty, \text{ если вершина } x_i \text{ несмежна вершине } x_j. \end{cases}$$

Задания

1. Ориентированный граф G=(V,E,O) задан аналитическим способом. Необходимо:

a) задать граф геометрическим способом;

b) определить полустепени вершин графа;

c) определить матрицу смежности

d) определить матрицу инцидентности

Для проверки решения использовать программу Grin

Варианты:

1) $V = (v_1,v_2,v_3,v_4,v_5)$, $E= (e_1,e_2,e_3,e_4,e_5,e_6,e_7,e_8,e_9,e_{10})$, $O = ((v_1,v_1), (v_1,v_3), (v_1,v_5), (v_2,v_3), (v_2,v_4), (v_2,v_5), (v_3,v_3), (v_3,v_4), (v_4,v_5), (v_5,v_5))$.
2) $V = (v_1,v_2,v_3,v_4,v_5)$, $E= (e_1,e_2,e_3,e_4,e_5,e_6,e_7,e_8,e_9,e_{10},e_{11})$, $O = ((v_1,v_2), (v_1,v_3), (v_1,v_4), (v_1,v_5), (v_2,v_2), (v_2,v_3), (v_2,v_5), (v_3,v_3), (v_3,v_4), (v_4,v_4), (v_4,v_5))$.
3) $V = (v_1,v_2,v_3,v_4,v_5)$, $E= (e_1,e_2,e_3,e_4,e_5,e_6,e_7,e_8,e_9,e_{10})$, $O = ((v_1,v_2), (v_1,v_4), (v_1,v_5), (v_2,v_2), (v_2,v_3), (v_2,v_5), (v_3,v_4), (v_3,v_5), (v_4,v_4), (v_5,v_5))$.
4) $V = (v_1,v_2,v_3,v_4,v_5)$, $E= (e_1,e_2,e_3,e_4,e_5,e_6,e_7,e_8,e_9,e_{10})$, $O = ((v_1,v_2), (v_1,v_3), (v_2,v_2), (v_2,v_4), (v_2,v_5), (v_3,v_4), (v_3,v_5), (v_4,v_4), (v_4,v_5), (v_5,v_5))$.
5) $V = (v_1,v_2,v_3,v_4,v_5)$, $E= (e_1,e_2,e_3,e_4,e_5,e_6,e_7,e_8,e_9,e_{10},e_{11})$, $O = ((v_1,v_1), (v_1,v_3), (v_1,v_4), (v_1,v_5), (v_2,v_2), (v_2,v_4), (v_2,v_5), (v_3,v_3), (v_3,v_5), (v_4,v_4), (v_4,v_5))$.
6) $V = (v_1,v_2,v_3,v_4,v_5)$, $E= (e_1,e_2,e_3,e_4,e_5,e_6,e_7,e_8,e_9,e_{10})$, $O = ((v_1,v_3), (v_1,v_4), (v_1,v_5), (v_2,v_2), (v_2,v_3), (v_2,v_4), (v_3,v_3), (v_3,v_5), (v_4,v_4), (v_5,v_5))$.
7) $V = (v_1,v_2,v_3,v_4)$, $E= (e_1,e_2,e_3,e_4,e_5,e_6,e_7,e_8)$, $O = ((v_1,v_1), (v_1,v_3), (v_1,v_2), (v_2,v_2), (v_2,v_4), (v_3,v_2), (v_3,v_3), (v_3,v_4))$.
8) $V = (v_1,v_2,v_3,v_4)$, $E= (e_1,e_2,e_3,e_4,e_5,e_6, e_7,e_8)$, $O = ((v_1,v_1), (v_1,v_2), (v_1,v_3), (v_1,v_4), (v_2,v_2), (v_2,v_3), (v_2,v_4), (v_3,v_3))$.
9) $V = (v_1,v_2,v_3,v_4)$, $E= (e_1,e_2,e_3,e_4,e_5,e_6,e_7,e_8)$, $O = ((v_1,v_2), (v_1,v_3), (v_1,v_4), (v_2,v_2), (v_2,v_4), (v_3,v_2), (v_3,v_3), (v_4,v_3))$.
10) $V = (v_1,v_2,v_3,v_4)$, $E= (e_1,e_2,e_3,e_4,e_5,e_6,e_7)$, $O = ((v_1,v_2), (v_2,v_3), (v_2,v_4), (v_3,v_3), (v_4,v_1), (v_4,v_4), (v_3,v_4))$.
11) $V = (v_1,v_2,v_3,v_4)$, $E= (e_1,e_2,e_3,e_4,e_5,e_6,e_7,e_8,e_9)$, $O = ((v_1,v_1), (v_1,v_2), (v_2,v_2), (v_2,v_3), (v_2,v_4), (v_3,v_1), (v_3,v_3), (v_3,v_4), (v_4,v_1))$
12) $V = (v_1,v_2,v_3,v_4)$, $E= (e_1,e_2,e_3,e_4,e_5,e_6,e_7,e_8,e_9)$, $O = ((v_1,v_1), (v_1,v_2), (v_2,v_2), (v_2,v_3), (v_2,v_4), (v_3,v_1), (v_3,v_3), (v_3,v_4), (v_4,v_1))$.
13) $V = (v_1,v_2,v_3,v_4)$, $E= (e_1,e_2,e_3,e_4,e_5,e_6,e_7,e_8)$, $O = ((v_1,v_1), (v_1,v_2), (v_2,v_3), (v_2,v_4), (v_3,v_1), (v_3,v_3), (v_3,v_4), (v_4,v_1))$.
14) $V = (v_1,v_2,v_3,v_4)$, $E= (e_1,e_2,e_3,e_4,e_5,e_6,e_7,e_8,e_9)$, $O = ((v_1,v_1), (v_1,v_3), (v_1,v_2), (v_2,v_2), (v_2,v_4), (v_3,v_2), (v_3,v_3), (v_3,v_4), (v_4,v_3))$.
15) $V = (v_1,v_2,v_3,v_4)$, $E= (e_1,e_2,e_3,e_4,e_5,e_6,e_7,e_8)$, $O = ((v_1,v_1), (v_1,v_2), (v_1,v_3), (v_1,v_4), (v_2,v_2), (v_2,v_3), (v_2,v_4), (v_3,v_3))$.
16) $V = (v_1,v_2,v_3,v_4)$, $E= (e_1,e_2,e_3,e_4,e_5,e_6, e_7,e_8)$, $O = ((v_1,v_1), (v_1,v_2), (v_1,v_3), (v_1,v_4), (v_2,v_2), (v_2,v_3), (v_2,v_4), (v_3,v_3))$.
17) $V = (v_1,v_2,v_3,v_4)$, $E= (e_1,e_2,e_3,e_4,e_5,e_6,e_7,e_8)$, $O = ((v_1,v_2), (v_1,v_3), (v_1,v_4), (v_2,v_2), (v_2,v_4), (v_3,v_2), (v_3,v_3), (v_4,v_3))$.
18) $V = (v_1,v_2,v_3,v_4)$, $E= (e_1,e_2,e_3,e_4,e_5,e_6,e_7)$, $O = ((v_1,v_2), (v_2,v_3), (v_2,v_4), (v_3,v_3), (v_4,v_1), (v_4,v_4), (v_3,v_4))$.
19) $V = (v_1,v_2,v_3,v_4)$, $E= (e_1,e_2,e_3,e_4,e_5,e_6,e_7,e_8,e_9)$, $O = ((v_1,v_1), (v_1,v_2), (v_2,v_2), (v_2,v_3), (v_2,v_4), (v_3,v_1), (v_3,v_3), (v_3,v_4), (v_4,v_1))$

$V = (v_1,v_2,v_3,v_4)$, $E= (e_1,e_2,e_3,e_4,e_5,e_6,e_7,e_8,e_9)$, $O = ((v_1,v_1), (v_1,v_2), (v_2,v_2), (v_2,v_3), (v_2,v_4), (v_3,v_1), (v_3,v_3), (v_3,v_4), (v_4,v_1))$.

Контрольные вопросы

Лабораторная работа № 7 Кратчайшие пути в графе

Цель работы:

Теоретические сведения

Чередующаяся последовательность v_1, e_1, v_2, e_2, ... , e_n, v_{n+1} вершин и ребер графа такая, что $e_i = v_i v_{i+1}$ (i=1, n), называется *маршрутом*, соединяющим вершины 1 и v_{n+1} (или ($v_1 v_{n+1}$)-маршрутом). Очевидно, что для задания маршрута в графе достаточно задать последовательность v_1, v_2, ..., v_{n+1}. его вершин, либо последовательность e_1, e_2,... , e_n его ребер.

Вершина v называется *достижимой* из вершины u, если существует (u, v)-маршрут. Любая вершина считается достижимой из себя самой.

Маршрут называется *цепью*, если все его ребра различны, и *простой цепью*, если все его вершины, кроме, возможно, крайних, различны. Маршрут (1) называется *циклическим*, если $v_1 = v_{n+1}$. Циклическая цепь называется *циклом*, а циклическая простая цепь – *простым циклом*. Число ребер в маршруте называется его *длиной*. Цикл длины 3 часто называют треугольником. Длина всякого цикла не менее трех, если речь идет о простом графе, поскольку в таком графе нет петель и кратных ребер. Минимальная из длин циклов графа называется его *обхватом*.

Граф называется *связным*, если любые две его несовпадающие вершины соединены маршрутом. Очевидно, что для связности графа необходимо и достаточно, чтобы в нем для какой-либо фиксированной вершины u и каждой другой вершины v существовал (u, v)-маршрут.

Всякий максимальный связный подграф графа G называется *связной компонентой* (или компонентой) графа G. Слово "максимальный" означает максимальный относительно включения, т.е. не содержащийся в связном подграфе с большим числом элементов. Множество вершин связной компоненты называется *областью связности*.

Для ориентированного графа вводится понятие ориентированного маршрта – это последовательность вида (1), в которой $e_i = (v_i, v_{i+1})$. Аналогом цепи в этой ситуации служить *путь* (ориентированная цепь). Аналогом цикла служит *контур* (ориентированный цикл).

Задания

Решить задачу коммивояжера

Для проверки решения использовать программу Grin

1.

	X1	X2	X3	X4	X5	X6
X1	∞	31	15	19	8	55
X2	19	∞	22	31	7	35
X3	25	43	∞	53	57	16
X4	5	50	49	∞	39	9
X5	24	24	33	5	∞	14
X6	34	26	6	3	36	∞

2.

	X1	X2	X3	X4	X5	X6
X1	∞	19	25	11	2	35
X2	37	∞	26	58	21	43
X3	10	50	∞	39	22	3
X4	38	39	24	∞	38	45
X5	27	9	32	9	∞	2
X6	33	48	60	53	1	∞

3.

	X1	X2	X3	X4	X5	X6
X1	∞	16	13	35	41	52
X2	19	∞	29	31	26	18
X3	57	51	∞	44	51	7
X4	5	40	32	∞	14	16
X5	33	41	28	3	∞	53
X6	19	54	24	10	41	∞

4.

	X1	X2	X3	X4	X5	X6
X1	∞	39	45	2	51	33
X2	30	∞	20	33	40	35
X3	54	16	∞	55	22	56
X4	19	36	25	∞	18	43
X5	29	8	8	12	∞	25
X6	16	47	31	14	8	∞

5.

	X1	X2	X3	X4	X5	X6
X1	∞	41	27	54	46	5
X2	42	∞	11	32	58	21
X3	36	5	∞	33	22	33
X4	46	24	59	∞	49	59
X5	48	58	11	44	∞	47
X6	26	50	35	19	27	∞

6.

	X1	X2	X3	X4	X5	X6
X1	∞	41	27	54	46	5

X2	42	∞	11	32	58	21
X3	36	5	∞	33	22	33
X4	46	24	59	∞	49	59
X5	48	58	11	44	∞	47
X6	26	50	35	19	27	∞

7.

	X1	X2	X3	X4	X5	X6
X1	∞	21	40	28	60	52
X2	58	∞	11	39	22	56
X3	22	12	∞	23	14	19
X4	25	47	51	∞	20	54
X5	47	43	18	42	∞	52
X6	44	49	50	52	29	∞

8.

	X1	X2	X3	X4	X5	X6
X1	∞	6	56	35	48	29
X2	34	∞	46	46	55	26
X3	29	31	∞	32	13	42
X4	26	34	12	∞	17	7
X5	38	35	40	13	∞	47
X6	60	25	59	36	31	∞

9.

	X1	X2	X3	X4	X5	X6
X1	∞	22	26	56	38	60
X2	34	∞	12	51	37	27
X3	45	33	∞	44	47	37
X4	39	7	16	∞	57	8
X5	35	56	40	58	∞	27
X6	9	20	36	31	18	∞

10.

	X1	X2	X3	X4	X5	X6
X1	∞	4	39	22	10	47
X2	58	∞	56	18	4	35
X3	34	29	∞	17	57	18
X4	52	4	22	∞	15	37
X5	41	44	25	11	∞	32
X6	11	6	19	2	58	∞

11.

	X1	X2	X3	X4	X5	X6
X1	∞	14	40	33	16	51
X2	48	∞	34	4	11	24
X3	57	35	∞	24	38	52
X4	30	50	44	∞	9	31
X5	18	42	24	31	∞	30
X6	1	38	31	19	32	∞

12.

	X1	X2	X3	X4	X5	X6

X1	∞	56	48	39	3	40
X2	47	∞	50	4	10	49
X3	48	50	∞	42	19	16
X4	24	44	47	∞	23	33
X5	38	17	6	51	∞	26
X6	29	59	55	34	18	∞

13.

	X1	X2	X3	X4	X5	X6
X1	∞	41	60	39	46	10
X2	31	∞	59	16	1	51
X3	29	51	∞	14	42	50
X4	35	12	52	∞	16	26
X5	16	39	15	60	∞	57
X6	15	30	38	47	36	∞

14.

	X1	X2	X3	X4	X5	X6
X1	∞	58	28	18	2	50
X2	11	∞	18	47	14	49
X3	49	3	∞	24	35	51
X4	1	46	50	∞	45	15
X5	54	40	14	12	∞	6
X6	8	58	34	27	47	∞

15.

	X1	X2	X3	X4	X5	X6
X1	∞	14	17	25	54	37
X2	57	∞	43	2	13	34
X3	7	24	∞	8	9	7
X4	13	28	30	∞	56	18
X5	26	44	4	52	∞	52
X6	18	5	49	14	12	∞

16.

	X1	X2	X3	X4	X5	X6
X1	∞	19	25	11	2	35
X2	37	∞	26	58	21	43
X3	10	50	∞	39	22	3
X4	38	39	24	∞	38	45
X5	27	9	32	9	∞	2
X6	33	48	60	53	1	∞

17.

	X1	X2	X3	X4	X5	X6
X1	∞	16	13	35	41	52
X2	19	∞	29	31	26	18
X3	57	51	∞	44	51	7
X4	5	40	32	∞	14	16
X5	33	41	28	3	∞	53
X6	19	54	24	10	41	∞

18.

	X1	X2	X3	X4	X5	X6

X1	∞	31	15	19	8	55
X2	19	∞	22	31	7	35
X3	25	43	∞	53	57	16
X4	5	50	49	∞	39	9
X5	24	24	33	5	∞	14
X6	34	26	6	3	36	∞

19.

	X1	X2	X3	X4	X5	X6
X1	∞	39	45	2	51	33
X2	30	∞	20	33	40	35
X3	54	16	∞	55	22	56
X4	19	36	25	∞	18	43
X5	29	8	8	12	∞	25
X6	16	47	31	14	8	∞

20.

	X1	X2	X3	X4	X5	X6
X1	∞	41	27	54	46	5
X2	42	∞	11	32	58	21
X3	36	5	∞	33	22	33
X4	46	24	59	∞	49	59
X5	48	58	11	44	∞	47
X6	26	50	35	19	27	∞

21.

	X1	X2	X3	X4	X5	X6
X1	∞	41	27	54	46	5
X2	42	∞	11	32	58	21
X3	36	5	∞	33	22	33
X4	46	24	59	∞	49	59
X5	48	58	11	44	∞	47
X6	26	50	35	19	27	∞

22.

	X1	X2	X3	X4	X5	X6
X1	∞	21	40	28	60	52
X2	58	∞	11	39	22	56
X3	22	12	∞	23	14	19
X4	25	47	51	∞	20	54
X5	47	43	18	42	∞	52
X6	44	49	50	52	29	∞

23.

	X1	X2	X3	X4	X5	X6
X1	∞	6	56	35	48	29
X2	34	∞	46	46	55	26
X3	29	31	∞	32	13	42
X4	26	34	12	∞	17	7
X5	38	35	40	13	∞	47
X6	60	25	59	36	31	∞

24.

	X1	X2	X3	X4	X5	X6

X1	∞	22	26	56	38	60
X2	34	∞	12	51	37	27
X3	45	33	∞	44	47	37
X4	39	7	16	∞	57	8
X5	35	56	40	58	∞	27
X6	9	20	36	31	18	∞

25.

	X1	X2	X3	X4	X5	X6
X1	∞	4	39	22	10	47
X2	58	∞	56	18	4	35
X3	34	29	∞	17	57	18
X4	52	4	22	∞	15	37
X5	41	44	25	11	∞	32
X6	11	6	19	2	58	∞

26.

	X1	X2	X3	X4	X5	X6
X1	∞	14	40	33	16	51
X2	48	∞	34	4	11	24
X3	57	35	∞	24	38	52
X4	30	50	44	∞	9	31
X5	18	42	24	31	∞	30
X6	1	38	31	19	32	∞

27.

	X1	X2	X3	X4	X5	X6
X1	∞	56	48	39	3	40
X2	47	∞	50	4	10	49
X3	48	50	∞	42	19	16
X4	24	44	47	∞	23	33
X5	38	17	6	51	∞	26
X6	29	59	55	34	18	∞

28.

	X1	X2	X3	X4	X5	X6
X1	∞	41	60	39	46	10
X2	31	∞	59	16	1	51
X3	29	51	∞	14	42	50
X4	35	12	52	∞	16	26
X5	16	39	15	60	∞	57
X6	15	30	38	47	36	∞

Для проверки решения использовать программу Grin

Контрольные вопросы

Лабораторная работа № 9 Определение максимального течение в транспортной сети

Цель работы:

Теоретические сведения

Пусть $\overline{\Gamma} = [A,B]$ - некоторый орграф и $f: B \to \Re$ вещественно-значная функция на множестве ребер; тогда пара $\overline{\Gamma}, f$ называется *сетью*, а функция f в контексте сети называ-ется *функцией пропускной способности* или *пропускной способностью* сети.

Всякая функция $g: B \to \Re$, удовлетворяющая неравенству $g \le f$, называется *пото-ком в сети*. В обсуждении свойств потоков в сети традиционно используется следующее обо-значение:

пусть $h: B \to \Re$ - любая функция и $U,V \subseteq A$ - два любых подмножества вершин; символ $h(U,V)$ будет обозначать сумму значений функции h на ребрах $(x,y) \in B$ таких, что $x \in U$ и $y \in V$; если U состоит из единственной вершины a, то символ $h(a,V)$ обозначает сумму весов ребер, начинающихся в U и заканчивающихся в вершинах из V; аналогичный смысл имеет символ $h(U,a)$ - сумма значений функции h на ребрах, начинающихся в U и заканчивающихся в вершине a.

Поток $g: B \to \Re$ в сети $\overline{\Gamma}, f$ называется *стационарным*, если существуют две вершины $u,v \in A$ и число $w \in \Re$ такие, что выполнены следующие условия:

$$1)\quad g(u,A) - g(A,u) = w;$$
$$2)\quad g(v,A) - g(A,v) = -w;$$
$$3)\quad g(x,A) - g(A,x) = 0 \quad для \quad \forall x \in A, x \neq u, x \neq v.$$

В этой ситуации число w называется *величиной* потока g, вершина u называется *источни-ком*, а вершина v - *стоком* потока g.

Известна следующая классическая *задача о максимальном потоке*: в данной сети для данного источника и для данного стока найти стационарный поток максимально возможной величины. Можно доказать, что такая задача всегда имеет решение. Один из способов ее ре-шения называется *алгоритмом Форда-Фалкерсона*. Сформулируем этот алгоритм по шагам.

Шаг 0. Фиксируем на данной сети $\overline{\Gamma}, f$ с источником u и стоком v произвольный стационарный поток g, например - поток, тождественно равный нулю (т.е. равный нулю на каждом ребре данного орграфа $\overline{\Gamma} = [A,B]$). Нетрудно проверить, что такой поток действитель-но стационарный и имеет величину 0.

Шаг 1. Около вершины u поставим пометку следующего вида:
$(-,\infty)$.

Здесь символ ∞ обозначает число, заведомо превосходящее все числа, которые будут участ-вовать в дальнейших рассмотрениях (в случае программирования это - компьютерная бесконечность, т.е. самое большое число, допускаемое данным программным средст-вом).

Замечание. Почти все дальнейшие действия по алгоритму представляют собой расстановку пометок около некоторых вершин. Цель этой расстановки в том, чтобы в конце концов поставить пометку у стока v или установить, что сток v пометить невозможно. В первом случае окажется возможным заменить имеющийся стационарный поток g на другой стационарный поток, имеющий величину, большую, чем величина потока g. После этого надо будет запустить все сначала. Во втором случае окажется, что имеющийся поток g оптимален, т.е. его величина имеет максимальное возможное значение. Каждая пометка, кроме уже проставленной около источника u, будет иметь вид $(x^{\pm},\varepsilon)$, где ε - некоторое число, а x - имя одной из вер-шин орграфа $\overline{\Gamma} = [A,B]$, причем реально в пометке это имя x будет либо в виде x^{+}, либо в виде x^{-}.

Шаг 2. Пусть $(x,y)\in B$ - некоторое ребро, начало которого, т.е. вершина x, уже имеет некоторую пометку $(z^{\pm},\varepsilon)$ (или, если x - это источник u, то пометку $(-,\varepsilon)$, где $\varepsilon=\infty$). Если $g((x,y)) = f((x,y))$, т.е. поток g равен на ребере (x,y) пропускной способности f, то пометка у вершины y не проставляется. Если же $g((x,y)) < f((x,y))$, то пометка у вершины y выставляется следующим образом.

На первом месте в пометке будет стоять символ x^{+}, т.е. пометка будет такой: (x^{+},μ), где число μ еще нужно найти. Положим
$\mu = \min\{\varepsilon, f((x,y)) - g((x,y))\}$.

Пусть теперь $(x,y)\in B$ такое ребро, у которого пометку имеет конец, т.е. вершина y имеет пометку $(z^{\pm},\varepsilon)$. Если $g((x,y)) \leq 0$, то пометку у вершины x не выставляют; если же $g((x,y)) > 0$, то вершина x получает пометку (y^{-},μ), где
$\mu = \min\{\varepsilon, g((x,y))\}$.

Процедура расстановки пометок в соответствии с Шагом 2 проводится до тех пор, пока не окажется помеченной вершина v, или до тех пор, пока не выяснится, что вершину v поме-тить невозможно. Можно доказать, что в последнем случае поток g, с помощью которого проводился весь Шаг 2, *имеет максимальную возможную величину*, и задача решена.

Если же вершина v оказалась помеченной, то переходим к следующему шагу. Отметим принципиальную подробность: если вершина v оказалась помеченной, то *число, фигурирующее в пометке, обязательно положительно.*

Шаг 3. Пусть вершина v имеет пометку $(x^{\pm},\varepsilon)$. Мы изменим сейчас поток g на нескольких ребрах данного графа, в результате чего получится новый стационарный поток из источника u в сток v, величина которого будет на ε (это число указано в пометке стока v) больше величины потока g.

Если вершина v имеет пометку (x^{+},ε), то на ребре (x,v) изменим поток g, прибавив к его значению на этом ребре число ε. Если вершина v имеет пометку (x^{-},ε), то на ребре (v,x) изменим поток g, вычитая из его значения на этом ребре число ε.

Затем перейдем к вершине x и проделаем то же, что только что делалось относительно вершины v; при этом прибавлять или вычитать будем прежнее число ε. Продолжая так, в соответствии с пометками, отбирать ребра графа и менять на них значение потока (на каждом отбираемом ребре - на одно и то же число ε!), мы придем к источнику u. Это будет означать завершение изменения потока. Можно доказать, что *полученный в результате поток является стационарным и его величина на* ε больше величины исходного потока g.

Затем нужно повторить все сначала с уже новым базовым стационарным потоком.

Определить максимальный поток в сети для заданного графа.

Задания

Контрольные вопросы

Лабораторная работа № 10 Числовые характеристики графа

Цель работы:

Теоретические сведения

Пусть G– связный граф, а u и v– две его несовпадающие вершины. Длина кратчайшего (u, v)-маршрута называется *расстоянием* между вершинами u и v и обозначается d(u, v). Положим d(u, u)=0. Очевидно, что введенное таким образом расстояние удовлетворяет следующим аксиомам метрики:

1. $d(u, v) \geq 0$;
2. d(u, v)=0 тогда и только тогда, когда u=v;
3. d(u, v)=d(v, u);
4. d(u, v)+ d(v, w)=d(u, w) (неравенство треугольника).

Для фиксированной вершины u величина e(u)=max d(uv) называется *эксцентриситетом* вершины u. Максимальный среди всех эксцентриситетов вершин называется *диаметром* графа G и обозначается через d(G). Тем самым

dG =max e(u)

Вершина v называется *периферийной*, если e(v)=d(G). Простая цепь длины d(G), расстояние между концами которой равно d(G), называется *диаметральной цепью*.

Минимальный из эксцентриситетов вершин связного графа называется его *радиусом* и обозначается через r(G).

Очевидно, что радиус графа не больше его диаметра.

Вершина v называется центральной, если e(v)=r(G). Множество всех центральных вершин графа называется его центром. Граф может иметь единственную центральную вершину или несколько центральных вершин. Наконец, центр графа может совпадать с множеством всех вершин.

Функции, заданные на множестве графов {G=<X;r>} и принимающие значения на множестве целых чисел, называют числовыми характеристиками графа или просто числами графа.

Наиболее очевидными и простыми числами графа являются: число вершин графа - n, число рёбер или дуг графа - m, степени и полустепени вершин графа - deg_i.

Все остальные характеристики графа требуют поиска и вычисления их значений.

Если множество вершин графа G можно разбить на попарно непересекающиеся непустые подмножества $X=\{X_1';X_2';\dots;X_{æ}'\}$ так, чтобы никакие две вершины из разных подмножеств не были смежны, то связанные подграфы $G_1=\langle X_1';r_1'\rangle$, $G_2=\langle X_2';r_2'\rangle$, …,$G_{æ}=\langle X_{æ}';r_{æ}'\rangle$ называются компонентами графа $G=\langle X;r\rangle$, а их число æ- *числом компонент связности* графа G, которое обозначают æ(G).

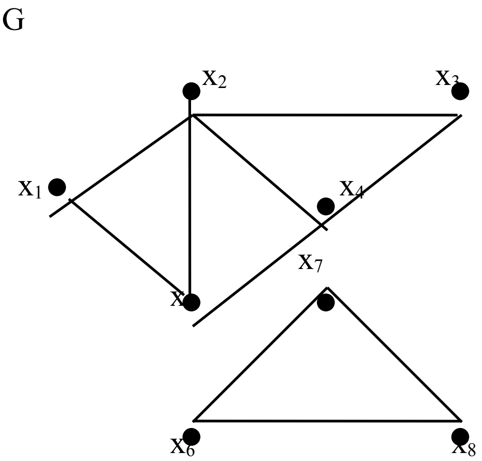


Рис. 25. Цикломатическое число графа $G=\langle X;r\rangle$.

Наименьшее число рёбер, удаление которых приводит к графу без циклов и петель, называют *цикломатическим числом* и обозначают ν(G). Цикломатическое число можно определить по формуле:

$$\nu(G)=m-n+æ(G),$$

где m - число рёбер, n - число вершин, æ(G) - число компонент связности графа.

На рис. 25 дан пример определения цикломатического числа. Для графа $G=\langle X;r\rangle$ имеем: n=8, m=10, æ(G)=2.

Следовательно, ν(G)=10-8+2=4. Можно убрать рёбра $\{(x_1;x_2),(x_2;x_3),(x_2;x_4),(x_6;x_8)\}$ или $\{(x_1;x_5);(x_4;x_5);(x_3;x_4);(x_6;x_7)\}$.

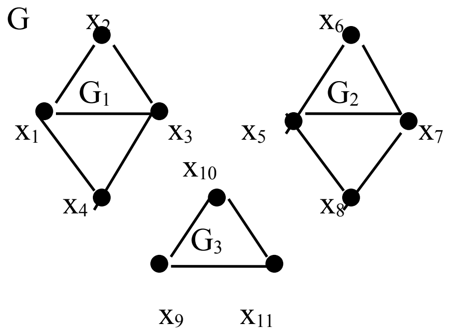


Рис. 24. Компоненты связности графа $G=\langle X;r\rangle$.

Раскраской вершин графа в χ цвета называют разбиение множества вершин графа на попарно непересекающиеся непустые подмножества, состоящие из попарно несмежных вершин, т.е. $X=X_1\cup X_2\cup\dots\cup X_{\gamma}$; $X_i\cup X_j=\varnothing$, где $i\neq j$, $1\leq i,j\leq n$.

Тогда каждому подмножеству X_i можно соотнести особый цвет краски. В этом случае никакие две смежные вершины не могут быть окрашены в один цвет. Наименьшее число χ при котором никакие две смежные вершины графа не могут быть окрашены в один цвет, называют *хроматическим числом* графа.

Нахождение хроматического числа достаточно трудоёмкая задача, имеющая сложный алгоритм и требующая большого объёма вычислений. Однако, можно дать оценку этого числа. Так хроматическое число полного n-вершинного графа равно n, пустого графа - 1, графа с циклом чётной длины - 2, графа с циклом нечётной длины - 3, графа типа дерево - 2. В отдельных случаях может быть рекомендована оценка по следующей формуле:

$\chi \leq \max_i\{\delta_i+1\}$.

Например, для графа, приведённого на рис. 25, хроматическое число равно 3, т.к. он содержит циклы нечётной длины: пусть x_1 - красный, x_2 - синий, x_3 - зелёный, x_4 - красный, x_5 - зелёный, x_6 - красный, x_7 - синий, x_8 - зелёный.

Наибольшее число вершин полного подграфа $G'=\langle X';r'\rangle$, между всеми вершинами которого задано отношение смежности, называют *плотностью графа* G и обозначают $\gamma(G)$, т.е.

$$\gamma(G)= \max_i\{|X'_i|\}.$$

Например, для графа, приведённого на рис. 24, плотность графа равна 3, а на рис. 17а) - 5.

Наибольшее число попарно несмежных вершин графа G формирует *число внутренней устойчивости графа.*

Для поиска этого числа следует воспользоваться условием:

$h_{xi} \cap S=\varnothing$, где $x_i \in S$, $S \subseteq X$ и S-множество несмежных вершин графа G.

Таких подмножеств в графе G может быть несколько. Выбор из множества $\{S\}$ подмножества с наибольшим числом вершин определяет число внутренней устойчивости, т.е.

$$h(G)=\max_i\{|S_i|\}.$$

Наименьшее число вершин графа G смежных со всеми остальными вершинами графа формирует *число внешней устойчивости графа*. Для поиска этого числа следует воспользоваться условием:

$h_{xi} \cap T=\varnothing$, $x_i \in T$, $T \subseteq X$ и T-множество вершин графа G, смежных с вершинами $X \setminus T$.

Таких подмножеств в графе G может быть несколько. Выбор из множества $\{T\}$ подмножества с наименьшим числом вершин определяет число внешней устойчивости, т.е.

$g(G)=\min_i\{|T_i|\}$.

Задания

Для заданного графа определить:

- диаметр и радиус графа;
- числа реберной и вершинной независимости;
- числа реберного и вершинного покрытия;

- цикломатическое и хроматическое числа.

Варианты заданий:

Контрольные вопросы