Лабораторная работа №6 Минимизация логических функций

Цель работы

- Освоить понятия минимизации логических функций (ЛФ).
- Научиться мимнимизировать ЛФ методом Квайна-Мак-Класски.
- Научиться мимнимизировать ЛФ с помощью карт Карно.

Теоретические сведения

Определение. *Минимальная форма (МКФ и МДФ) представления ФЛ* это форма, которая содержит минимальное количество термов и переменных в термах, и не должна допускать последующих упрощений.

Например, функция $x_1+\overline{x_1}x_2$ может быть упрощена, если применить распределительный закон: $x_1x_2+x_3=(x_1+x_3)(x_2+x_3)$, тогда

$x_1+\overline{x_1}x_2=(\overline{x_1}+x_1)(x_1+x_2)=x_1\overline{x_1}+x_1x_1+\overline{x_1}x_2+x_1x_2=$

$=0+x_1+x_2(\overline{x_1}+x_1)=x_1+x_2.$

Упрощение сложных логических выражений может быть осуществлено на основании применения законов и аксиом алгебры логики.

6.1 Числовое и геометрическое представление ФЛ

Многие преобразования, выполняемые над булевыми функциями, удобно интерпретировать с использованием их геометрических представлений f(x).

Так функцию двух переменных можно интерпретировать как некоторую плоскость, заданную в системе координат $xy=x_1x_2$. При произвольно выбранных единичных значениях x_1 и x_2 получается квадрат, вершины которого соответствуют комбинациям переменных (см. рисунок 6.1).

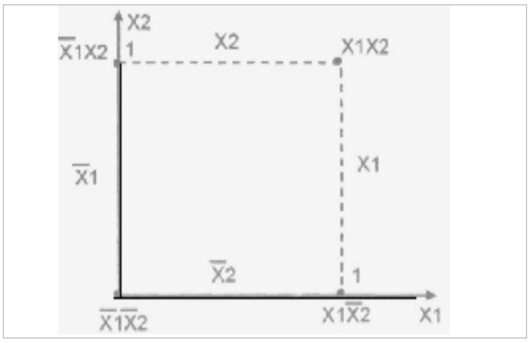

Рис. 6.1-Геометрическое представление ФЛ при n = 2.

Такое геометрическое представление функций двух переменных наглядно показывает: две вершины, принадлежащие одному ребру и называемые соседними, "склеиваются" по переменной, изменяющейся вдоль этого ребра.

Правило склеивания распространяется и на кубическое представление ФЛ.

На рисунке 6.2 показана область определения для произвольной функции трех переменных.

Элементам куба сопоставлены конъюнкции различного ранга: вершинам куба – третий ранг, ребрам куба - второй ранг, граням куба - первый ранг.

Определение. Сумма размерности геометрического эквивалента и ранга, сопоставляемая этому геометрическому эквиваленту конъюнкции, постоянна и равна числу аргументов функции.

Определение. Каждый геометрический эквивалент меньшей размерности покрывается всеми геометрическими эквивалентами большей размерности.

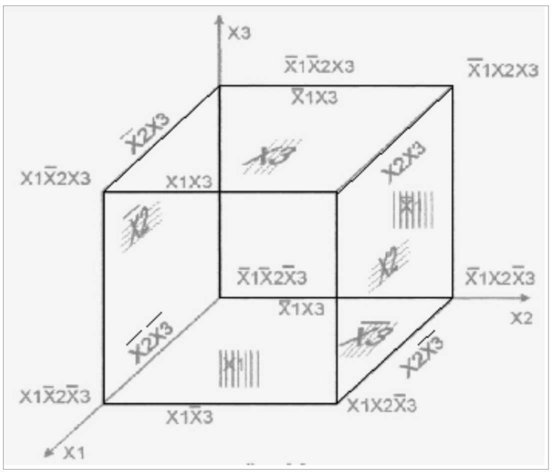

Рис. 6.2-Геометрическое представление ФЛ при n=3

По аналогии будем говорить о покрытии конъюнкции большего ранга соответствующими конъюнкциями меньшего ранга.

Например, конъюнкции $x_1x_2x_3$ и $x_1x_2\bar{x}_3$ покрываются конъюнкцией x_1x_2.

В общем виде операцию покрытия можно записать $AB+A\bar{B}=A$. Чаще употребляется термин склеивание.

В геометрическом смысле каждый набор $x_1,x_2,\ldots,x_n$ может рассматриваться как n -мерный вектор, определяющий точку n-мерного пространства. Исходя из этого, множество наборов, на которых определена функция n переменных, представляют в виде вершин n-мерного куба.

Координаты вершин куба должны быть указаны в порядке, соответствующем порядку перечисления переменных в записи функций.

Отмечая точками вершины, в которых функция принимает значения, равные 1, получаем геометрическое представление ФЛ.

6.2 Построение комплекса кубов и его минимального покрытия

Терм максимального ранга n- куба принято называть 0-кубом (точка вершины) и обозначают K^0. Например, для $f(x_1,x_2,x_3)$= (0,4,7) комплекс 0-кубов будет таким

$$\begin{array}{ll} K^0 = 000 & * \\ \quad\;\; 100 & * \\ \quad\;\; 111 & \end{array}$$

Определение. ***Если два 0-куба из комплекса K^0 различаются только по одной координате, то два таких 0-куба образуют один 1-куб.*** Он представляется общими элементами 0-кубов, причем на месте координаты, по которой различаются 0-кубы, указывают символ X, обозначающий независимую координату (переменную). Различие координат определяют последовательным сравнением первого куба с остальными, затем второго с остальными и так далее. Например, два 0-куба 000 и 100 различаются только по одной координате, и они образуют 1-куб (отрезок), которому соответствует ребро трехмерного куба. Заметим, что 0-куб 111 не склеивается, так как отличается больше чем по одной координате.

Все множество 1-кубов функции называется кубическим комплексом К- один и обозначается- K^1.

$K^1 = \{X00\}$

Комплекс $К^1$ строится по комплексу $К^0$ путем их сравнения и определяет все множество ребер, на концах которых функция принимает единичные значения. Если два 1-куба из комплекса $К^1$ имеют общую независимую компоненту и различаются только по одной координате, то они образуют один 2-куб. Это грань для трехмерного куба. Все множество 2-кубов, построенного из комплекса $К^1$, образует множество комплекса $К^2$ (множество граней). Комплекс $К^3 = 0$ - отсутствует в трехмерном кубе (часто r-куб называют интервалом (расстоянием) r- порядка). Перед построением очередного куба необходимо отметить те кубы, которые склеились хотя бы один раз. Например, звездочкой *. Это необходимо, так как могут быть неотмеченные (не склеившиеся) кубы о которых забывать нельзя. Они являются самостоятельными импликантами, которые так же включают в общее покрытие кубов C(f). Для нашего примера, общее покрытие будет выглядеть

$$C(f) = \left\{ \begin{matrix} X00 \\ 111 \end{matrix} \right\} = \overline{X}_2\ \overline{X}_3 + X_1 X_2 X_3.$$

По индукции можно определить, что два r-куба, содержащие r координат и различающиеся только по одной координате, могут объединяться в (r + 1)-куб, (r + 1)-я независимая координата которого соответствует координате, по которой различаются r-кубы.

Запись (r + 1)-куба состоит из общих компонент двух r-кубов, а компонента, принимающая в них различные значения, обозначается в (r + 1)-кубе как независимая компонента X.

Число независимых координат X в кубе определяет его размерность.

Например, куб 0X1X1XX имеет размерность r = 4.

Определение. Объединение кубов комплексов $К^0, К^1, \ldots, К^n$ функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется кубическим комплексом K(f) функции f.

$$K(f) = K(f) = К^0 \cup К^1 \cup К^2 \cup К^3 \ldots$$

В отличие от аналитических форм записи булевых функций, кубическое представление позволяет задавать булевы функции в виде множества кубов, компонентами которых являются только **три символа 0; 1; X.** Ограниченное количество символов в записи функций алгебры логики позволяет

автоматизировать процесс минимизации с применением компьютерных систем.
Задача минимизации булевых функций по критерию минимальности числа букв входящих в ДНФ или КНФ называется *канонической задачей минимизации*.
Схема, получаемая в результате ее решения не является абсолютно минимальной, т.к. абсолютный минимум оборудования в большинстве случаев так и не достигается.

Определение. Булева функция f(x_1, x_2, …, x_n) представляется как множество С кубов, принадлежащих комплексу K(f), и таких, что каждая вершина комплекса K^0 включена по крайней мере в один куб множества С.
Полученное таким образом множество С называется покрытием комплекса K(f) и покрытием булевой функции. Каждому покрытию C(f) соответствует ДНФ функции.

Например, дана функция
f(x)= (3,4,5,6,7)= $\overline{x_1}\,x_2x_3+x_1\overline{x_2}\,\overline{x_3}+ +x_1\overline{x_2}\,x_3+x_1x_2\overline{x_3}+x_1x_2x_3$
Построим комплекс кубов K^0,K^1,K^2,K^3.

$$\hat{E}^0 = \begin{matrix} 011 & * \\ 100 & * \\ 101 & * \\ 110 & * \\ 111 & * \end{matrix} \qquad \hat{E}^1 = \begin{matrix} \tilde{O}11 & \\ 10\tilde{O} & * \\ 1\tilde{O}0 & * \\ 1\tilde{O}1 & * \\ 11\tilde{O} & * \end{matrix} \qquad \hat{E}^2 = 1\tilde{O}\tilde{O} \qquad K^3 = 0$$

Из комплекса кубов K(f) определяется его покрытие C(f) куда входят не отмеченная импликанта X11 из куба K^1 и покрытие 1XX из куба K^2.

$$C(f) = \left\{ \begin{matrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & x \end{matrix} \right\}$$

Это покрытие включает в себя все 5 вершин комплекса K°. В самом деле, куб x11 может включать (покрывать) 011; 111. Куб 1xx может включать вершины 100, 101, 110, 111. Таким образом, множество C(f) является покрытием комплекса K(f). Отсюда можно написать минимизированное уравнение:
f(x)= (3,4,5,6,7)=$x_2x_3+x_1$.

6.3. Метод Квайна-Мак-Класски

При минимизации по методу Квайна предполагается, что минимизируемая функция представленна в СДНФ.

Метод Квайна состоит из последовательного выполнения нескольких этапов.

1-й этап. Нахождение первичных импликант.

Все минтермы данной функции сравниваются попарно. Если минтермы отличаются одной координатой типа $Fx_i+F\bar{x}_i=F$, то выписывается конъюнкция F, являющаяся минтермом (r+l)-го ранга. Минтермы r-го ранга, для которых произошло склеивание, отмечаются.

Другими словами, нахождение простых импликант сводится к построению комплекса кубов

$K(f) = K^0 \cup K^1 \cup K^2 \cup \ldots \cup K^r$.

При построении последующих кубов, образующие предыдущие кубы отмечаются, чтобы выявить неотмеченные кубы.

Этап заканчивается, когда ни один (r+1)-куб не может быть построен. При этом, все неотмеченные кубы комплекса K(f) тоже являются простыми импликантами и входят в покрытие C(f) функции f.

Пример. Пусть задана функция

$F(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)= (0,1,2,3,4,5,14,15,16,17,18,19,21,23,31)$

Для упрощения, 0-кубы упорядочивают по числу 1-ых координат (см. рисунок 6.3).

0-КУБЫ	**0-КУБЫ**		
исходн.	упорядоч.	**1-КУБЫ**	**2-КУБЫ**
		0000X *	000XX *
00000	00000 *	000X0 *	00X0X
00001	00001 *	00X00 *	X000X *
00010	00010 *	X0000 *	X00X0 *
00011	00100 *	000X1 *	X00X1 *
00100	10000 *	00X01 *	X0X01
00101	00011 *	X0001 *	X001X *
01110	00101 *	0001X *	100XX *
10000	10001 *	X0010 *	10XX1
10001	10010 *	0010X *	
10010	01110	1000X *	**3-КУБ**
10011	10011 *	100X0 *	X00XX
10101	10101 *	X0011 *	
10111	10111 *	X0101 *	X00XX
11111	11111 *	100X1 *	00X0X
		10X01 *	X0X01
		1001X *	**C(f)**=10XX1
		10X11 *	1X111
		101X1 *	01110
		1X111	

Рис. 6.3-Комплекс кубов

Простые и неотмеченные импликанты образуют покрытие C(f), которое может быть избыточным и требует последующих этапов минимизации, а именно - составления таблиц покрытия функции.

2-й этап. Составление таблиц покрытий.

Понятно, что для нахождения минимальной формы покрытия необходимо удалить из покрытия некоторые простые или неотмеченные импликанты. Для этого используют таблицу, строки которой составляют импликанты покрытия, а столбцы - 0-кубы (минтермы) исходной функции. Если импликанта отличается от 0-куба (кроме независимых координат), то на их пересечении не ставится метка + (см. таблицу 6.1).

Таблица 6.1-Таблица покрытий комплекса кубов

Импликанты	Вершины 0-кубов													
	0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 1	0 0 0 0 1 0	0 0 0 1 0 0	1 1 0 0 0 0	0 0 0 0 1 1	0 0 0 1 0 1	1 1 0 0 0 1	1 1 0 0 1 0	0 0 1 1 1 0	1 1 0 0 1 1	1 1 0 1 0 1	1 1 0 1 1 1	1 1 1 1 1 1
X00XX	+	+	+		+	+		+	+		+			
00X0X	+	+		+										
X0X01		+					+	+				+		
10XX1							+	+			+		+	
1X111										+		+	+	+
01110										+				

3-й этап. Определение существенных импликант.

Если в столбце таблицы покрытий имеется только одна метка, то первичная импликанта, стоящая в соответствующей строке, является существенной импликантой, и ее выписывают в новое минимальное покрытие C(f). Из таблицы покрытий исключаются строки, соответствующие существенным импликантам и столбцы минтермов, покрываемым этими существенными импликантами. Покрытие будет иметь вид :

$$C(f) = \begin{cases} x & 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & x & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 & 1 \end{cases} .$$

В результате упрощения, получим новую таблицу 6.2

Таблица 6.2-Покрытия

импликанты	10101
X0X01	+
10XX1	+

4-й этап. Вычеркивание лишних столбцов.

Если в таблице существенных импликант есть два столбца имеющих метки в одинаковых строках, то один из столбцов вычеркивается.

5-й этап. Вычеркивание простых лишних импликант.

Если после вычеркивания столбцов в таблице появляются строки без меток, то импликанты этих строк вычеркиваются.

6-й этап. Выбор минимального покрытия.

В таблице, полученной после выделения существенных импликант, выбирается совокупность простых импликант, обеспечивающая покрытие всех столбцов с минимальной ценой C^A.

В нашем примере выбирается импликанта X0X01 (или 10XX1, т.к. цены C^A одинаковы).

Таким образом, покрытие функции имеет вид:

$$C(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & x \\ 0 & x & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & x & 0 \\ x & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

и определяет минимальную ДНФ

$$\mathbf{f} = \bar{x}_2 \bar{x}_3 + \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_4 + \bar{x}_1 x_2 x_3 x_4 \bar{x}_5 + \bar{x}_2 \bar{x}_4 x_5 + x_1 x_3 x_4 x_5..$$

При использовании метода Квайна для СКНФ необходимо рассматривать значения функций f=0 и макстермы, соответствующие этим значениям. В результате получим

$$\bar{f} = \underset{o}{V}(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Далее необходимо воспользоваться соотношением де - Моргана с тем, чтобы привести функцию к СДНФ. Все дальнейшие действия аналогичны.

6.4 Метод минимизации ФЛ с помощью карт Карно

Одним из способов графического представления булевых функций от небольшого числа переменных являются карты Карно. Их разновидность - карты Вейча. Карты строят как развертки кубов на плоскости. При этом, вершины куба представляются клетками карты, координаты которых совпадают с координатами соответствующих вершин куба (минтермов). Карта заполняется так же, как таблица истинности: значение 1 указывается в клетке, соответствующей набору (минтерму), на котором функция имеет значение 1. Значение f = 0 обычно на картах не отражается. Условное размещение координат переменных и примеры минимизации ФЛ на картах для двух, трех и четырех переменных показаны на рисунке. 6.4.

Способ минимизации ФЛ с помощью карт Карно получил широкое применение среди специалистов. Этому способствовали довольно высокая формализация действий, наглядность графики и относительно простые правила. Как показано на рисунке 6.4, карты Карно представляют прямоугольником (квадратом), на котором размещают 2^n клеток, где n-число переменных ФЛ. При заполнении клеток значениями функций 1, используют условные координаты размещения переменных. Координаты клеток обычно указывают с левой стороны и сверху, используя код Грея. Если нарушить места обозначения координат, то минимальная функция не будет отвечать истине. Каждой клетке соответствует свой минтерм, обозначенный пересечением переменных строк и столбцов. После заполнения клеток карт единицами, определяют соседние клетки.

6.4.1 Соседние клетки

Соседними клетками считают те заполненные клетки, которые имеют общие стороны. Соседними считают и клетки расположенные в противоположных крайних строках и (или) столбиках. В самом деле, если мысленно свернуть карту, то крайние, противоположные строки (столбцы) станут соседними. Поэтому, например, все угловые клетки карт для двух, трех и четырех переменных считают соседними.

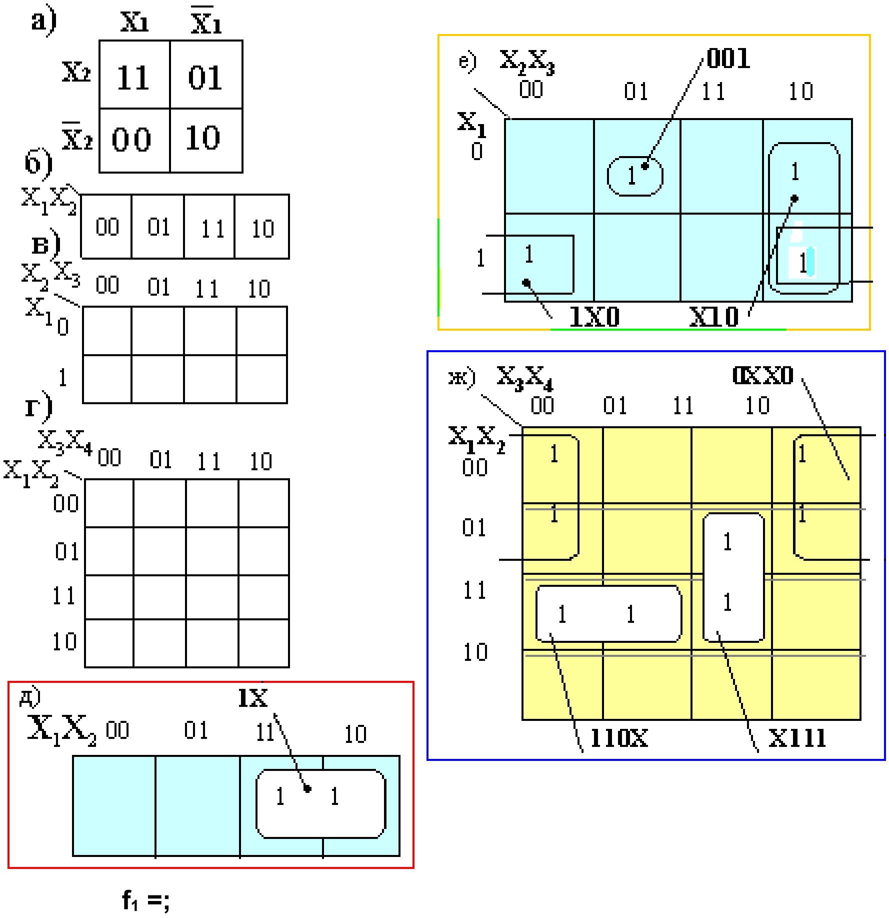

Рисунок 6.4 Карты Карно для двух (а,б), трех (в) четырех (г) переменных; примеры минимизации ЛФ д), е), ж)

При числе переменных больше четырех, карты Карно составляются из нескольких карт для четырех переменных, поэтому, соседними клетками считают еще и те, которые находятся на одинаковых координатах в соседних картах.

Для минимизации функций с числом переменных больше 7 карты Карно практически не применяются.

После определения соседних клеток, их объединяют контурами объединения.

6.4.2 Правило объединения соседних клеток

Контур должен содержать только соседние клетки, при этом, число единиц включенных в контур должно быть равным одному из чисел: 2, 4, 8, 16, 32, 64, …,2^n. Это условие обязательно.

Любой контур объединения может пересекаться с другими. Поэтому, одни и те же единицы могут быть включены одновременно в разные контуры.

Общее число контуров должно быть как можно меньшим, так как каждый контур объединения это новый минтерм функции и чем меньше их будет, тем она минимальна.

С другой стороны, общее число объединенных единиц должно быть по возможности большим, так как это уменьшает число переменных в минтерме, понижая его ранг. Всегда объединение в 2k клеток (соседних единиц) исключает из минтермов k переменных, где k=1,2,3,4,…. Необходимо помнить, что объединение соседних клеток это процесс требующий наличие опыта по выбору наилучшего варианта. Поэтому, каждый раз при минимизации необходимо просматривать несколько вариантов и выбирать лучший, который приводит к минимальной функции. После объединения соседних клеток, переходим к записи для них минтермов.

6.4.3 Определение простых импликант

Каждый отдельный контур объединения соответствует минтерму, который иначе называют простой импликантой. Для определения и записи простой импликанты, прямо по карте Карно, проводится анализ переменных по тем строчкам и столбцам карты, которые пересекают контур объединенных 1 (вершин куба). Начинают анализ с первой переменной X_1.

Если переменная X_1 в любой строчке(столбце), проходящей через контур, не изменяет значения своей координаты (т.е. во всех строчках контура ее значение либо 0, либо 1), то в минтерм объединения записывается ее значение (либо 0, либо1).

Если переменная X_1 в строчках (столбцах), проходящих через контур, изменяет значение своей координаты (т.е. в одной строчке контура ее значение 0, а в другой 1, либо наоборот), то в минтерм объединения записывается, так называемая, неопределенная переменная X на том месте, где должно записываться значение переменной X_1 (рисунок 9.1д,е,ж). Аналогичный анализ проводится последовательно для всех переменных, в результате чего получаем минтерм объединения. На рисунке 9.1д,е,ж они расположены на выносках.

Это первый этап записи минимальной логической функции прямо с карты Карно. На втором этапе меняем значения переменных на соответствующие им переменные по правилу: если значение переменной 0 – то пишем $\overline{X_i}$, если 1 – то пишем X_i. На месте неопределенной переменной X не пишем ничего, т. е. это место опускаем. Тепер соединив все минтермы знаком дизъюнкции, получим минимальную дизъюнктивную нормальную форму логической функции (МДНФ).

При построении минимальной формы для конъюнкции, карты Карно заполняются 0, т.е. минтермами тех наборов, на которых функция равна нулю. Объединение нулей и запись МДНФ для не функции, т.е. $\overline{Y}$ выполняют по тем же правилам. Затем, применив к левой и правой части равенства правило де-Моргана и преобразовав дизъюнкцию правой части в конъюнкцию, получим минимальную конъюнктивную нормальную форму (МКНФ) логической функции. Таким образом, минимальное покрытие выбирается интуитивным путем на основе анализа различных вариантов покрытий (контуров объединений) минимизируемой функции.

Покрытие с минимальной ценой формируется, если каждая существенная вершина будет покрыта кубом с наибольшим числом независимых переменных, а для покрытия всех существенных вершин будет использовано наименьшее число кубов.

Наилучшим считается такое покрытие, где минимум контуров объединения. Если вариантов много, то выбирается тот, который дает максимальную суммарную площадь контуров (прямоугольников). Качество минимизации оценивается по коэффициенту покрытия

$k = m / s$,

где m - количество прямоугольников, s - их площадь. Покрытие лучше, чем меньше k.

В качестве примера использования карт Карно для определения минимальных ДНФ и КНФ рассмотрим функцию, представленную на рисунке 6.5.

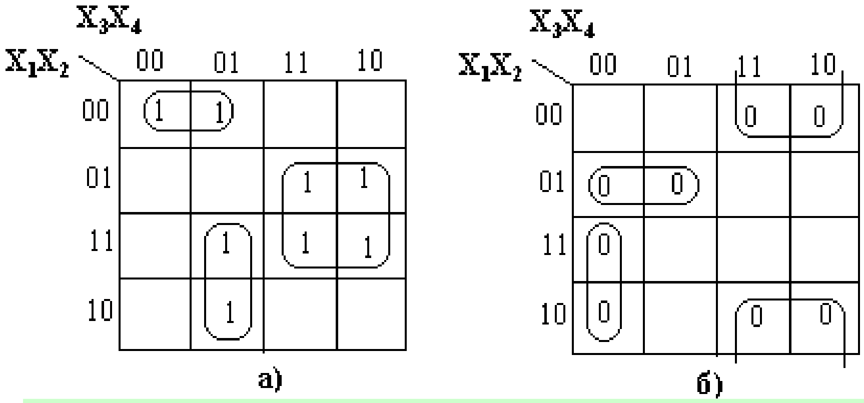

Рис. 6.5-Значения функции, заданные картой Карно

Данной ДНФ (рисунок 6.5 а) соответствует минимальная форма вида:

$$f=\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3+x_1\bar{x}_3x_4+x_2x_3.$$

Нулевые значения этой функции представлены на рисунке 6.5б. Отмеченные на карте клетки определяют функцию $\bar{f}$, обратную f.

При минимизации функции $\bar{f}$, получаем

$$\bar{f}=\bar{x}_1x_2\bar{x}_3+x_1\bar{x}_3\bar{x}_4+\bar{x}_2x_3.$$

Используя правило де Моргана, преобразуем в КНФ:

$f=\overline{\bar{x}_1x_2\bar{x}_3+x_1\bar{x}_3\bar{x}_4+\bar{x}_2x_3}=(x_1+\bar{x}_2+x_3)(\bar{x}_1+x_3+x_4)(x_2+\bar{x}_3)$. При пяти и более переменных строят комбинированную карту, состоящую из совокупности простых, например четырехмерных. Тогда сначала находят минимальные формы внутри четырехмерных карт, а затем, расширяя понятие соседних клеток, отыскивают минимальные термы для совокупности карт. На рисунке 6.6 показаны карты для 5 и 6 переменных.

6.5 Не полностью определенные логические функции в картах Карно

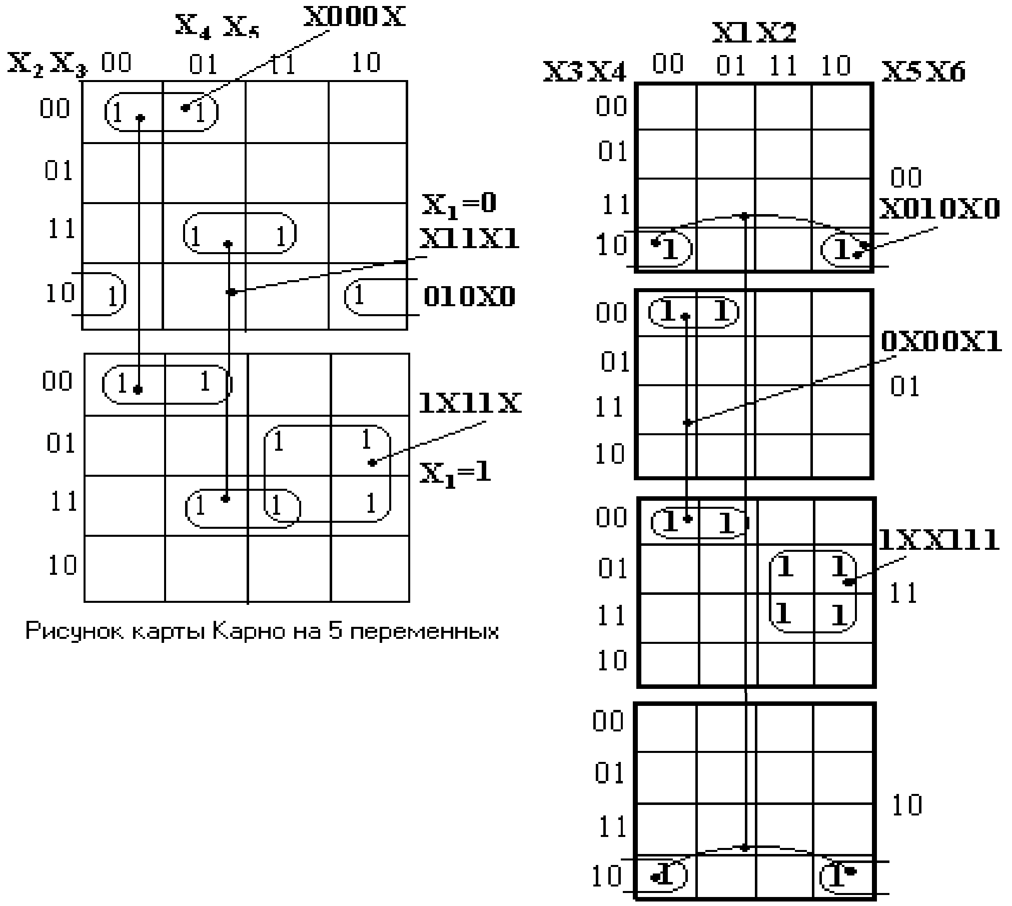

Рисунок 6.6-Карты Карно на 5 и 6 переменных

Не полностью определенные логические функции это функции, значение которых на некоторых наборах переменных несущественно (безразлично). Другими словами, это те функции, наборы переменных которых не используются при построении ЦА. Обычно их обозначают символом *. Например, при рассмотрении двоично-десятичных кодов используют десять функций от 0 до 9, а остальные шесть являются не затребованными и могут иметь различные значения, т.е. они не определены.

При минимизации не полностью определенной функции ее можно доопределить самостоятельно на свое усмотрение, для этого вершины отмеченные символом * изменяют, присваивая им значения 1 или 0, повышая, таким образом, эффективность минимизации.

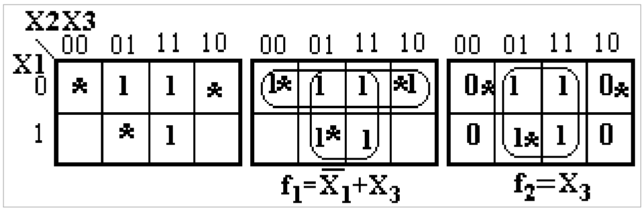

Рис. 6.7 - Не полностью определенные ЛФ в картах Карно

Очень часто это упрощает процесс минимизации, так как добавление, например, единиц до существующих определенных наборов, позволяет включать в контур покрытия большее число единиц, снижая при этом число переменных в МДНФ. Доопределение функции при минимизации нулями также упрощает минимальную КНФ функции. Если функция имеет m неопределенных наборов переменных, то может быть 2^m вариантов решения задачи ее доопределения. Желательно остановиться на варианте, который дает наибольший эффект при минимизации.

Задание.

1. Представить ЛФ в виде СДНФ.
2. Мимнимизировать ЛФ методом Квайна-Мак-Класски.
3. Мимнимизировать ЛФ с помощью карт Карно.
4. Построить схему для ЛФ в минимальной форме.

Индивидуальные задания:

x1	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**
x2	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**
x3	**0**	**0**	**1**	**1**	**0**	**0**	**1**	**1**	**0**	**0**	**1**	**1**	**0**	**0**	**1**	**1**
x4	**0**	**1**	**0**	**1**	**0**	**1**	**0**	**1**	**0**	**1**	**0**	**1**	**0**	**1**	**0**	**1**
1	**0**	**1**	**0**	**0**	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**	**0**	**1**	**1**	**0**	**1**	**0**	**1**
2	**1**	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**	**0**	**0**	**1**	**0**
3	**0**	**1**	**1**	**0**	**0**	**0**	**1**	**1**	**0**	**1**	**0**	**1**	**0**	**1**	**1**	**1**
4	**1**	**1**	**0**	**0**	**0**	**1**	**1**	**0**	**1**	**1**	**0**	**1**	**1**	**0**	**0**	**1**
5	**0**	**1**	**1**	**0**	**1**	**0**	**1**	**1**	**0**	**1**	**1**	**1**	**0**	**1**	**0**	**0**
6	**1**	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**	**1**
7	**0**	**1**	**1**	**1**	**0**	**1**	**0**	**1**	**1**	**1**	**0**	**1**	**0**	**1**	**1**	**0**
8	**1**	**1**	**1**	**0**	**1**	**1**	**0**	**1**	**0**	**1**	**0**	**1**	**1**	**0**	**1**	**0**
9	**1**	**0**	**1**	**0**	**1**	**0**	**1**	**0**	**1**	**1**	**0**	**1**	**0**	**0**	**1**	**0**
10	**0**	**1**	**1**	**0**	**0**	**0**	**1**	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**	**1**	**0**	**1**	**0**
11	**1**	**0**	**1**	**1**	**1**	**0**	**0**	**1**	**0**	**1**	**1**	**1**	**0**	**1**	**0**	**1**
12	**1**	**1**	**1**	**1**	**0**	**1**	**1**	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**	**0**	**0**	**1**	**1**
13	**1**	**0**	**1**	**0**	**1**	**1**	**0**	**0**	**1**	**1**	**0**	**0**	**1**	**1**	**0**	**0**
14	**0**	**1**	**0**	**1**	**0**	**0**	**1**	**1**	**0**	**1**	**1**	**1**	**0**	**0**	**1**	**0**
15	**0**	**0**	**1**	**0**	**0**	**1**	**0**	**0**	**0**	**1**	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**
16	**1**	**1**	**1**	**0**	**1**	**0**	**1**	**1**	**0**	**1**	**1**	**1**	**0**	**0**	**0**	**1**
17	**1**	**1**	**1**	**0**	**1**	**0**	**1**	**0**	**1**	**0**	**0**	**1**	**0**	**0**	**1**	**0**
18	**1**	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**	**0**	**1**	**0**	**1**	**1**	**0**	**0**	**1**	**1**	**0**
19	**0**	**1**	**0**	**1**	**0**	**1**	**1**	**1**	**0**	**1**	**0**	**1**	**1**	**0**	**0**	**1**
20	**1**	**0**	**1**	**1**	**1**	**0**	**1**	**0**	**0**	**1**	**1**	**1**	**0**	**0**	**0**	**1**
21	**0**	**1**	**0**	**1**	**1**	**1**	**0**	**0**	**1**	**0**	**0**	**1**	**1**	**0**	**1**	**0**
22	**1**	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**0**	**0**	**0**	**1**	**0**	**1**	**0**	**0**
23	**1**	**1**	**1**	**0**	**0**	**0**	**1**	**0**	**1**	**1**	**0**	**0**	**1**	**0**	**1**	**1**
24	**1**	**0**	**1**	**0**	**0**	**1**	**1**	**1**	**0**	**1**	**0**	**1**	**0**	**0**	**1**	**0**
25	**0**	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**0**	**0**	**1**	**0**	**1**	**0**	**0**	**1**	**0**