

Лабораторная работа №4 Логические операции и формулы

Цель работы:

1. Изучить основные логические операции
2. Научиться определять значение логической формулы
3. Освоить правила упрощения логических формул
4. Научиться строить комбинационные схемы в программе MicroCap

Теоретические сведения

4.1 Логические операции

Отрицанием высказывания x называется новое высказывание, которое является истинным, если высказывание x ложно, и ложным, если высказывание x истинно.

Отрицание высказывания x обозначается \bar{x} и читается «не x » или «неверно, что x ». Логические значения высказывания x можно описать с помощью таблицы:

x	\bar{x}
1	0
0	1

Конъюнкцией двух высказываний x, y называется новое высказывание, которое считается истинным, если оба высказывания x, y истинны, и ложным, если хотя бы одно из них ложно (т.е. в остальных случаях).

Конъюнкция высказываний x, y обозначается символом $x \& y$ или $x \cdot y$ ($x \wedge y$), читается « x и y ». Высказывания x, y называются членами конъюнкции.

x	y	$x \wedge y$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Все возможные логические значения конъюнкции двух высказываний x и y описываются следующей таблицей истинности.

Дизъюнкцией двух высказываний x , y называется новое высказывание, которое считается истинным, если хотя бы одно из высказываний x , y истинно, и ложным, если они оба ложны.

Дизъюнкция высказываний x , y обозначается символом $x \vee y$, читается « x или y ». Высказывания x , y называются членами дизъюнкции. Все возможные логические значения дизъюнкции двух высказываний x и y описываются следующей таблицей истинности:

x	y	$x \vee y$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Импликацией двух высказываний x , y называется новое высказывание, которое считается ложным, если x истинно, а y – ложно, и истинным во всех остальных случаях.

Импликация высказываний x, y обозначается символом $x \rightarrow y$ (или $x \Rightarrow y$), читается “если x , то y ” или “из x следует y ”. Высказывание x называют условием или посылкой, высказывание y – следствием или заключением высказывание $x \rightarrow y$ - следованием или импликацией.

Логические значения операции импликации описываются следующей таблицей истинности:

x	y	$x \rightarrow y$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Эквиваленцией (или эквивалентностью) двух высказываний x, y называется новое высказывание, которое считается истинным, когда оба высказывания x, y либо одновременно истинны, либо одновременно ложны. И ложным во всех остальных случаях.

Эквиваленция высказываний x, y обозначается символом $x \leftrightarrow y$ (или \Leftrightarrow , реже \sim), читается “ для того, чтобы x , необходимо и достаточно, чтобы y ”, или “ x тогда и только тогда, когда y ”. Высказывания x, y называются членами эквиваленции. Логические значения операции эквиваленции описываются следующей таблицей истинности:

x	y	$x \leftrightarrow y$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Существуют операции, с помощью которых может быть выражена любая из пяти логических операций. Такой операцией является, например, операция “*Штрих Шеффера*”. Эта операция обозначается символом $x \mid y$ и определяется следующей таблицей истинности:

x	y	$x \mid y$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	1

4.2 Формулы алгебры логики. Вычисление их значений.

С помощью логических операций над булевыми переменными можно строить различные сложные выражения. При этом порядок выполнения операций указывается скобками.

Всякое сложное выражение, которое может быть получено из булевых переменных посредством применения логических операций отрицания, конъюнкции, дизъюнкции, импликации и эквиваленции, называется формулой алгебры логики.

Логическое значение формулы алгебры логики полностью определяется логическими значениями входящих в неё булевых переменных.

Как и в случае с логическими операциями все возможные логические значения формулы, в зависимости от значений входящих в неё булевых переменных, могут быть описаны полностью с помощью таблицы истинности.

Например, для формулы $\bar{x} \vee y \rightarrow x \wedge \bar{y}$ таблица истинности имеет вид:

x	y	\bar{x}	\bar{y}	$\bar{x} \vee y$	$x \wedge \bar{y}$	$\bar{x} \vee y \rightarrow x \wedge \bar{y}$
1	1	0	0	1	0	0
1	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	0
0	0	1	1	1	0	0

1	1	0	0	1	0	0
1	0	0	1	0	1	1
0	1	1	0	1	0	0
0	0	1	1	1	0	0

Легко видеть, что если формула содержит n элементарных высказываний, то она принимает 2^n значений, состоящих из нулей и единиц, или, что то же, таблица содержит 2^n строк.

4.3 СВОЙСТВА ЗАКОНОВ И ПРАВИЛА АЛГЕБРЫ ЛОГИКИ

4.3.1 Свойства операций конъюнкции, дизъюнкции и отрицания

Алгебра Буля, основана на логических операциях конъюнкции, дизъюнкции и отрицания, базируется на следующих основных законах:

- переместительный (свойство коммутативности);
- сочетательный (свойство ассоциативности);
- распределительный (свойство дистрибутивности);
- идемпотенции (свойство сохранять степень и постоянство коэффициента);
- инверсии (правило де Моргана).

В таблице 4.1 приведена интерпретация свойств этих законов для операций конъюнкции, дизъюнкции и отрицания относительно некоторых переменных. Следствие 5а получено из 5 путем общего отрицания левой и правой части равенства.

№	Закон	Логич. сложение	Таблица 4.1-Свойства основных законов Логич. умножение
1	коммутативность	$X_1 + X_2 = X_2 + X_1$	$X_1 X_2 = X_2 X_1$
2	ассоциативность	$(X_1 + X_2) + X_3 = X_1 + (X_2 + X_3)$	$(X_1 X_2) X_3 = X_1 (X_2 X_3)$
3	дистрибутивность	$(X_1 + X_2) X_3 = X_1 X_3 + X_2 X_3$	$X_1 X_2 + X_3 = (X_1 + X_3)(X_2 + X_3)$
4	идемпотентность	$X + X = X$	$X X = X$
5	Моргана	$\overline{X_1 + X_2 + \dots + X_n} = \overline{X_1} \overline{X_2} \dots \overline{X_n}$	$\overline{X_1 X_2 \dots X_n} = \overline{X_1} + \overline{X_2} + \dots + \overline{X_n}$
5а	Следствие	$\overline{\overline{X_1 + X_2 + \dots + X_n}} = \overline{\overline{X_1} \overline{X_2} \dots \overline{X_n}}$	$\overline{\overline{X_1 X_2 \dots X_n}} = \overline{\overline{X_1} + \overline{X_2} + \dots + \overline{X_n}}$

Доказать эти соотношения возможно, например, посредством составления таблиц истинности для правой и левой части уравнений.

№	Правило	Дизъюнкция	Конъюнкция
1	Инверсия	$0 = \bar{1}$	$1 = \bar{0}$
2	Неизменности	$x + 0 = x$	$x \cdot 1 = x$
3	Унив. нул. множ.	$x + 1 = 1$	$x \cdot 0 = 0$
4	Повторения	$x + x = x$	$x \cdot x = x$
5	Дополнительн.	$x + \bar{x} = 1$	$x \cdot \bar{x} = 0$
6	Поглощения	$x + xy = x$	$x(x + y) = x$
7	Двойного отриц.	$\overline{\overline{x}} = x$	

Таблица 4.2-Правила преобразований ЛФ

8	Склеивания	$xy + x\bar{y} = x$	$(x + y)(x + \bar{y}) = x$
9		$x + \bar{x}y = x + y$	$(x + y)(x + z) = x + yz$
10		$\bar{x} + xy = \bar{x} + y$	$x(\bar{x} + y) = xy$
11			$\bar{x}(x + y) = \bar{x}y$

Таблица 4.3- Свойства суммы по модулю 2

Переместительный	$x \oplus y = y \oplus x$
Сочетательный	$x \oplus (y \oplus z) = (x \oplus y) \oplus z$
Распределительный	$x \& (y \oplus z) = (x \& y) \oplus (x \& z)$
относит. конъюн.	

Таблица 4.4-Правила суммы по модулю 2

1	$x \oplus x = 0$
2	$x \oplus 0 = x$
3	$x \oplus 1 = \bar{x}$
4	$x \oplus \bar{x} = 1$
5	$x + y = x \oplus y \oplus xy$

Таблица 4.5-Импликация

1	$x \rightarrow x = 1$	6	$1 \rightarrow x = x$
2	$x \rightarrow \bar{x} = \bar{x}$	7	$x \rightarrow y = \bar{y} \rightarrow \bar{x}$
3	$x \rightarrow 1 = 1$	8	$x \rightarrow y \rightarrow x = x$
4	$x \rightarrow 0 = \bar{x}$		$xy = \overline{x \rightarrow y}$
5	$0 \rightarrow x = 1$	9	$x + y = \bar{x} \rightarrow y$
		10	

Таблица 4.6-Правила ЛФ штрих Шеффера и стрелка Пирса

№ n/n	Шеффера "НЕ-И"	Пирса "НЕ-ИЛИ"
1	$x / x = \bar{x}$	$x \downarrow x = \bar{x}$
2	$x / \bar{x} = 1$	$x \downarrow \bar{x} = 0$
3	$x / 1 = \bar{x}$	$x \downarrow 1 = 0$
4	$x / 0 = 1$	$x \downarrow 0 = \bar{x}$
5	$\bar{x} / 0 = 1$	$\bar{x} \downarrow 0 = x$
6	$\bar{x} / 1 = x$	$\bar{x} \downarrow 1 = 0$
7	$x/y = \overline{xy} = \bar{x} + \bar{y}$	$x \downarrow y = \bar{x} \bar{y} = \overline{x + y}$
8	$xy = \overline{x / y} = x/y/x/y$	$xy = (x \downarrow x) \downarrow (y \downarrow y) = \bar{x} \downarrow \bar{y}$
9	$x + y = \overline{\overline{x + y}} = \overline{\overline{xy}} = \bar{x} / \bar{y}$	$x + y = (x \downarrow y) \downarrow (x \downarrow y)$
10	$x / y = \overline{x \downarrow y}$	$\overline{x / y} = \bar{x} \downarrow \bar{y}$
11	$x \downarrow y = \overline{x / y}$	$\overline{x \downarrow y} = \bar{x} / \bar{y}$

В силу отсутствия сочетательного закона раскрытие скобок для функций Шеффера и Пирса выполняются по следующим правилам:

$$(x / y) / (x / z) = \overline{x / (\bar{y} / \bar{z})} = \bar{x} \downarrow (y \downarrow z);$$

$$(x \downarrow y) \downarrow (x \downarrow z) = \overline{x \downarrow (\bar{y} \downarrow \bar{z})} = \bar{x} / (y / z);$$

$$(x / y) \downarrow (x / z) = \overline{x / (\bar{y} \downarrow \bar{z})} = \bar{x} \downarrow (y / z);$$

$$(x \downarrow y) / (x \downarrow z) = \overline{x \downarrow (\bar{y} / \bar{z})} = \bar{x} / (y \downarrow z);$$

$$(x / y) \downarrow (z / k) = \bar{x} \downarrow \overline{\overline{y \downarrow z \downarrow k}};$$

$$(x \downarrow y) / (z \downarrow k) = \bar{x} / \overline{\overline{y/z/k}}.$$

Используя равносильности, можно часть формулы или всю формулу заменить равносильной ей формулой. Такие преобразования формул называются равносильными. (Аналог тождественным преобразованиям в арифметике, алгебре и тригонометрии).

Равносильные преобразования используются для доказательства равносильностей, для приведения формул к заданному виду, для упрощения формул.

Формула А считается проще равносильной ей формулы В, если она содержит меньше букв, меньше логических операций. При этом обычно операции эквивалентность и импликация заменяются операциями дизъюнкция и конъюнкция, а отрицание относят к элементарным высказываниям.

4.4 Функции алгебры логики.

Как уже отмечалось, значение формулы алгебры логики полностью зависит от значений входящих в эту формулу высказываний. Поэтому формула алгебры логики является функцией входящих в нее элементарных высказываний.

Функцией алгебры логики n переменных (или функций Буля) называется функция n переменных, где каждая переменная принимает два значения: 0 и 1, и при этом функция может принимать только одно из двух значений: 0 или 1.

Число различных функций алгебры логики n переменных равно 2^{2^n} .

В частности, различных функций одной переменной четыре, а различных функций двух переменных шестнадцать. Выпишем все функции алгебры логики одной и двух переменных.

Таблица истинности для всевозможных функций двух переменных имеет вид: $f_i = f_i(x, y), i = \overline{1,16}$.

x	y	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}	f_{16}
1	1	1	1	1	1	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0
1	0	1	1	1	0	1	1	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	1	0	1	1	0	0	1	1	0	1	0	1	0	0	0
0	0	1	0	1	1	1	0	1	1	0	1	0	1	0	0	0	0

Из рассмотрения значений этих функций ясно, что их аналитические выражения могут быть записаны следующим образом:

$$\begin{aligned}
 f_1 &\equiv 1, & f_5 &\equiv \overline{x \wedge y}, & f_9 &\equiv \overline{x \leftrightarrow y}, & f_{13} &\equiv \overline{y \rightarrow x}, \\
 f_2 &\equiv x \vee y, & f_6 &\equiv x, & f_{10} &\equiv \overline{y}, & f_{14} &\equiv \overline{x \rightarrow y}, \\
 f_3 &\equiv y \rightarrow x, & f_7 &\equiv x \leftrightarrow y, & f_{11} &\equiv y, & f_{15} &\equiv x \wedge y, \\
 f_4 &\equiv x \rightarrow y, & f_8 &\equiv \overline{x}, & f_{12} &\equiv \overline{x \vee y}, & f_{16} &\equiv 0.
 \end{aligned}$$

Задание.

Для заданной логической функции:

1. построить таблицу истинности;
2. упростить, используя основные законы и правила преобразования и для упрощенной формулы построить таблицу истинности;
3. построить комбинационную схему, соответствующую исходной логической функции и провести ее анализ в MicroCap;
4. построить комбинационную схему, соответствующую преобразованной логической функции и провести ее анализ в MicroCap.

Индивидуальные задания:

1. $(x \vee \overline{y}) \rightarrow (z \oplus \overline{x})$;
2. $\overline{(x \vee \overline{y})} \rightarrow (z \oplus \overline{x})$;
3. $(\overline{x} \vee \overline{y}) \rightarrow (z \oplus x)$;
4. $\overline{(x \vee \overline{y})} \rightarrow \overline{(z \oplus \overline{x})}$;
5. $\overline{(x \rightarrow y) \oplus (z \rightarrow \overline{x})}$;

$\rightarrow \leftrightarrow$

$\overline{} \oplus \overline{} \rightarrow$

$$6. (x | y) \quad (z \quad x);$$

$$7. (z \quad x) \quad (y | x);$$

$$8. (x | y) \quad (z \quad x);$$

$$9. (\bar{z} \rightarrow x) \leftrightarrow (\bar{x} | y);$$

$$10. (z \rightarrow x) \oplus (x | \bar{y});$$

$$11. ((x \downarrow y) \rightarrow z) \oplus y;$$

$$12. \overline{((x \leftrightarrow y) \rightarrow z)} | y;$$

$$13. \overline{(x \vee \bar{y})} \rightarrow (\bar{z} \leftrightarrow x);$$

$$14. \overline{((x \downarrow y) \rightarrow z)} \leftrightarrow y;$$

$$15. \overline{(x \downarrow y)} \rightarrow (z \leftrightarrow \bar{y});$$

$$16. \overline{((x \leftrightarrow y) | \bar{z})} \oplus y;$$

$$17. (\bar{x} \vee y) \rightarrow (\bar{z} \leftrightarrow \bar{x});$$

$$18. \overline{((x \downarrow y) \rightarrow z)} \leftrightarrow \bar{x};$$

$$19. \overline{(x | y) \oplus (\bar{z} \rightarrow y)};$$

$$20. \overline{(x \vee y) \rightarrow (\bar{z} \leftrightarrow y)};$$

$$21. \overline{((x \downarrow y) \rightarrow \bar{z})} \oplus y;$$

$$22. \overline{((x \downarrow y) \rightarrow \bar{z})} \nleftrightarrow y;$$

$$23. \overline{((x \downarrow y) \rightarrow \bar{z})} \leftrightarrow y;$$

$$24. \overline{((x \downarrow y) \rightarrow \bar{z})} \oplus y;$$

$$25. \overline{((x | y) \rightarrow z)} \oplus y;$$