ПЕРВОЕ ВЫСШЕЕ ТЕХНИЧЕСКОЕ УЧЕБНОЕ ЗАВЕДЕНИЕ РОССИИ

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра механики

РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКОЕ ЗАДАНИЕ №2

По дисциплине: «Теоретическая и прикладная механика»

Тема: «Комплексная задача по кинематике материальной точки»

Вариант 12

Выполнил студент гр.	ЭХТ-21-2 (шифр группы)	__________ (подпись)	Потапов В.А. (Ф.И.О.)
Проверил:	профессор (должность)	__________ (подпись)	Мельников В.Г. (Ф.И.О.)

Санкт-Петербург

2023

Задание. Движение точки задано координатным способом на плоскости Oxy. Следует найти траекторию точки и построить ее на рисунке. Скорость, полное ускорение и касательное ускорение найти как функцию времени. Скорость, ускорение, касательное ускорение, нормальное ускорение и радиус кривизны траектории определить в момент времени t_1. Векторы $\overline{v_1}$, $\overline{w_1}$, $\overline{w_{1\tau}}$, $\overline{w_{1n}}$ показать на рисунке.

$x=\sqrt{2}\sin t$, $y=2\cos 2t$, $t_1=\frac{5\pi}{4}$ с

Решение:

А) Определение траектории точки. Здесь следует исключить время из уравнений движения. В данном примере имеем:

$$t=\arcsin\frac{x}{\sqrt{2}},\ t=\frac{\arccos\frac{y}{2}}{2}$$

Отсюда получаем уравнение траектории

$$y=2-2x^2$$

Это гипербола. Из условий $-1\le sint\le 1$ и $-1\le\cos 2t\le 1$ следует что траекторией будет часть гиперболы, заключенная в этих интервалах $-\sqrt{2}\le x\le\sqrt{2}$ и $-2\le y\le 2$. Парабола изображена на рисунке 1.

В) Определение скорости и ускорения точки в зависимости от времени. Вычисляем проекции скорости и ускорения на прямоугольные оси:

$$v_x=\dot{x}=\sqrt{2}\cos t;\ v_y=\dot{y}=-4\sin 2t$$

$$w_x=\ddot{x}(t)=-\sqrt{2}\sin t;\ \ w_y=\ddot{y}(t)=-8\cos 2t;$$

Величины скорости и ускорения равны

$$v=\sqrt{{v_x}^2+{v_y}^2}=\sqrt{\left(\sqrt{2}\cos t\right)^2+\left(-4\sin 2t\right)^2}=\sqrt{2\cos t^2+16\sin 2t^2};$$

$$w=\sqrt{{w_x}^2+{w_y}^2}=\sqrt{\left(-\sqrt{2}\sin t\right)^2+\left(-8\cos 2t\right)^2}=\sqrt{2\sin t^2+64\cos 2t^2};$$

Касательное ускорение будет

$$w_\tau(t)=\frac{dv}{dt}=\frac{-\sin 2t+16\sin 4t}{\sqrt{2\cos t^2+16\sin 2t^2}};$$

С) Определение положения точки и ее кинематических характеристик в заданный момент времени. При $t=t_1=\frac{5\pi}{4}$с имеем координаты точки M_1:

$$x_1=\sqrt{2}\sin\frac{5\pi}{4}=-1\,м,\quad y_1=2\cos 2\frac{5\pi}{4}=0\,м$$

Следовательно координаты точки M_1 равны (4, 8). По формулам предыдущего пункта находим:

$$v_{x1}=\sqrt{2}\cos\frac{5\pi}{4}=-1\text{м/с};\ v_{y1}=-4\sin\left(2\cdot\frac{5\pi}{4}\right)=-4\,м/с,$$

$$v_1=\sqrt{2\cos\frac{5\pi}{4}^2+16\sin 2\frac{5\pi}{4}^2}=\sqrt{17}\approx 4,12\,м/с.$$

Последнее означает, что вектор скорости направлен по касательной траектории вниз. Вектор полного ускорения точки строим по его проекциям:

$$w_x=-\sqrt{2}\sin\frac{5\pi}{4}=1\,м/с^2,\ \ w_y=-8\cos 2\cdot\frac{5\pi}{4}=0\,\frac{м}{с^2},\ w_1=\sqrt{2\sin\frac{5\pi}{4}^2+64\cos 2\cdot\frac{5\pi}{4}^2}=1\,м/с^2.$$

Вектор $\overline{w}_1$ направлен вправо. Далее:

$$w_{1\tau}=w_\tau(0)=\frac{-\sin 2\cdot\frac{5\pi}{4}+16\sin 4\cdot\frac{5\pi}{4}}{\sqrt{2\cos\frac{5\pi}{4}^2+16\sin 2\cdot\frac{5\pi}{4}^2}}=\frac{-\sqrt{17}}{17}\approx -0,24\ \text{м/с}^2$$

$$w_{1n}=\sqrt{w_1^2-w_{1\tau}^2}=\sqrt{(1)^2+\left(\frac{-\sqrt{17}}{17}\right)^2}=\frac{4}{\sqrt{17}}\approx 0,97\ \text{м/с}^2$$

Радиус кривизны траектории будет равен

$$\rho=\frac{v_1^2}{w_{1n}}=\frac{\sqrt{17}^2}{\frac{4}{\sqrt{17}}}\approx 17,52\ \text{м}$$