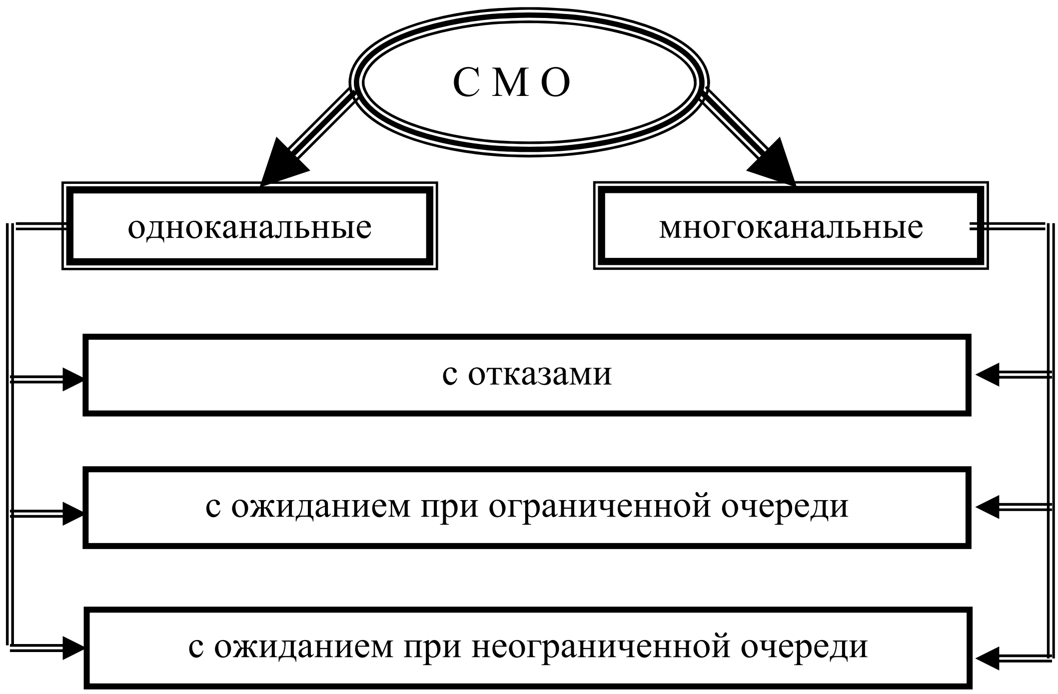
4. ТЕОРИЯ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

4.1. Классификация систем массового обслуживания и их показатели эффективности

Системы, в которых в случайные моменты времени возникают заявки на обслуживание и имеются устройства для обслуживания этих заявок, называются ***системами массового обслуживания*** **(СМО).**

СМО могут быть классифицированы по признаку организации обслуживания следующим образом:



Системы с отказами не имеют очередей.

Системы с ожиданием имеют очереди.

Заявка, поступившая в момент, когда все каналы обслуживания заняты:

- покидает систему с отказами;
- становится в очередь на обслуживание в системах с ожиданием при неограниченной очереди или на свободное место при ограниченной очереди;
- покидает систему с ожиданием при ограниченной очереди, если в этой очереди нет свободного места.

В качестве меры эффективности экономической СМО рассматривают сумму потерь времени:

- на ожидание в очереди;
- на простои каналов обслуживания.

Для всех видов СМО используются следующие ***показатели эффективности***:

- ***относительная пропускная способность*** **-** это средняя доля поступающих заявок, обслуживаемых системой;
- ***абсолютная пропускная способность*** **-** это среднее число заявок, обслуживаемых системой в единицу времени;
- ***вероятность отказа*** **-** это вероятность того, что заявка покинет систему без обслуживания;
- ***среднее число занятых каналов*** **-** для многоканальных СМО.

Показатели эффективности СМО рассчитываются по формулам из специальных справочников (таблиц). Исходными данными для таких расчетов являются результаты моделирования СМО.

4.2. Моделирование системы массового обслуживания: основные параметры, граф состояний

При всем многообразии СМО они имеют ***общие черты***, которые позволяют унифицировать их моделирование ***для нахождения наиболее эффективных вариантов организации таких систем***.

Для моделирования СМО необходимо иметь следующие исходные данные:

- основные параметры;
- граф состояний.

Результатами моделирования СМО являются вероятности ее состояний, через которые выражаются все показатели ее эффективности.

Основные параметры для моделирования СМО включают:

- характеристики входящего потока заявок на обслуживание;
- характеристики механизма обслуживания.

Рассмотрим **х*арактеристики потока заявок***.

Поток заявок **-** последовательность заявок, поступающих на обслуживание.

Интенсивность потока заявок $\boldsymbol{\lambda}$ - среднее число заявок, поступающих в СМО в единицу времени.

Потоки заявок бывают простейшими и отличными от простейших.

Для простейших потоков заявок используются модели СМО.

Простейшим, или ***пуассоновским*** называется поток, являющийся *стационарным*, *одинарным* и в нем *отсутствуют последействия*.

Стационарность означает неизменность интенсивности поступления заявок с течением времени.

Одинарным поток заявок является в том случае, когда за малый промежуток времени вероятность поступления более чем одной заявки близка к нулю.

Отсутствие последействия заключается в том, что число заявок, поступивших в СМО за один интервал времени, не влияет на количество заявок, полученных за другой интервал времени.

Для отличных от простейших потоков заявок используются имитационные модели.

Рассмотрим ***характеристики механизма обслуживания***.

Механизм обслуживания характеризуется:

- ***числом n каналов обслуживания***;
- производительностью канала, или ***интенсивностью обслуживания μ*** - средним числом заявок, обслуживаемых одним каналом в единицу времени;
- дисциплиной очереди (например, ***объемом очереди m***, порядком отбора из очереди в механизм обслуживания и т.п.).

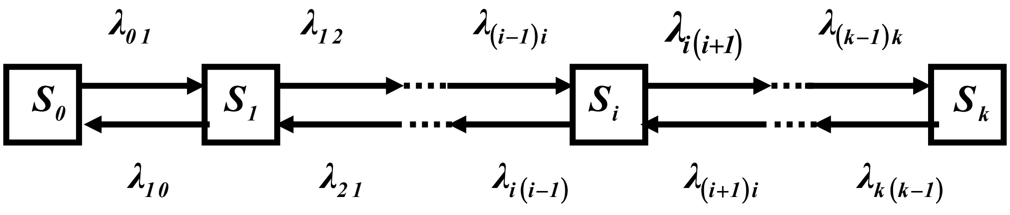
Граф состояний описывает функционирование системы обслуживания как переходы из одного состояния в другое под действием потока заявок и их обслуживания.

Для построения графа состояний СМО необходимо:

- составить перечень всех возможных состояний СМО;
- представить перечисленные состояния графически и отобразить возможные переходы между ними стрелками;
- взвесить отображенные стрелки, т.е. приписать им числовые значения интенсивностей переходов, определяемые интенсивностью потока заявок и интенсивностью их обслуживания.

4.3. Вычисление вероятностей состояний системы массового обслуживания

Граф состояний СМО со ***схемой "гибели и рождения"*** представляет собой линейную цепочку, где каждое из средних состояний имеет прямую и обратную связь с каждым из соседних состояний, а крайние состояния только с одним соседним:



Число состояний в графе на единицу больше, чем суммарное число каналов обслуживания и мест в очереди.

СМО может быть в любом из своих возможных состояний, поэтому ожидаемая интенсивность выхода из какого-либо состояния равна ожидаемой интенсивности входа системы в это состояние. Отсюда система уравнений для определения вероятностей состояний при простейших потоках будет иметь вид:

$$\begin{cases} \lambda_{01} \cdot P_0 = \lambda_{10} \cdot P_1, \\ (\lambda_{10} + \lambda_{12}) \cdot P_1 = \lambda_{01} \cdot P_0 + \lambda_{21} \cdot P_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ (\lambda_{i(i-1)} + \lambda_{i(i+1)}) \cdot P_i = \lambda_{(i-1)i} \cdot P_{i-1} + \lambda_{(i+1)i} \cdot P_{i+1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ (\lambda_{(k-1)(k-2)} + \lambda_{(k-1)k}) \cdot P_{k-1} = \lambda_{(k-2)(k-1)} \cdot P_{k-2} + \lambda_{k(k-1)} \cdot P_k, \\ \lambda_{k(k-1)} \cdot P_k = \lambda_{(k-1)k} \cdot P_{k-1}; \end{cases}$$

где P_i - вероятность того, что система находится в состоянии S_i, $i = \overline{0,k}$;

$\lambda_{i(i+1)}$ $(\lambda_{i(i-1)})$ - интенсивность перехода, или среднее число переходов системы в единицу времени из состояния S_i в состояние S_{i+1} (S_{i-1}).

Используя эту систему уравнений, а также уравнение

$$\sum_{i=0}^{k} P_i = 1,$$

вероятность P_i любого i-ого состояния $(i = \overline{0,k})$ можно вычислить по следующему ***общему правилу***:

вероятность нулевого состояния рассчитывается как

$$P_0 = \big(1 + \lambda_{01}/\lambda_{10} + \lambda_{01} \cdot \lambda_{12} / \lambda_{21} \cdot \lambda_{10} + \ldots + \lambda_{01} \cdot \lambda_{12} \cdots \lambda_{(i-1)i} / \lambda_{i(i-1)} \cdots \lambda_{21} \cdot \lambda_{10} + \\ + \ldots + \lambda_{01} \cdot \lambda_{12} \cdots \lambda_{(i-1)i} \cdots \lambda_{(k-1)k} / \lambda_{k(k-1)} \cdots \lambda_{i(i-1)} \cdots \lambda_{21} \cdot \lambda_{10}\big)^{-1},$$

а затем берется дробь, в числителе которой стоит произведение всех интенсивностей потоков по стрелкам, ведущим слева направо от состояния S_0 *до состояния* S_i, *а в знаменателе - произведение всех интенсивностей по стрелкам, идущим справа налево от состояния* S_i *до состояния* S_0, *и эта дробь умножается на рассчитанную вероятность* P_0

$$P_i = \big(\lambda_{01} \cdot \lambda_{12} \cdots \lambda_{(i-1)i} / \lambda_{i(i-1)} \cdots \lambda_{21} \cdot \lambda_{10}\big) \cdot P_0.$$

Выводы по четвертому разделу

Системы массового обслуживания имеют один или несколько каналов обслуживания и могут иметь ограниченную или неограниченную очередь (системы с ожиданием) заявок на обслуживание, не иметь очереди (системы с отказами). Заявки на обслуживание возникают в случайные моменты времени. Системы массового обслуживания характеризуются следующими показателями эффективности: относительная пропускная способность, абсолютная пропускная способность, вероятность отказа, среднее число занятых каналов.

Моделирование систем массового обслуживания осуществляется для нахождения наиболее эффективных вариантов их организации и предполагает следующие исходные данные для этого: основные параметры, граф состояний. К таким данным относятся следующие: интенсивность потока заявок, количество каналов обслуживания, интенсивность обслуживания и объем очереди. Число состояний в графе на единицу больше, чем сумма числа каналов обслуживания и мест в очереди.

Вычисление вероятностей состояний системы массового обслуживания со схемой «гибели и рождения» осуществляется по общему правилу.

Вопросы для самопроверки

- Какие системы называются системами массового обслуживания?
- Как классифицируются системы массового обслуживания по признаку их организации?
- Какие системы массового обслуживания называются системами с отказами, а какие – с ожиданием?
- Что происходит с заявкой, поступившей в момент времени, когда все каналы обслуживания заняты?
- Что рассматривают в качестве меры эффективности экономической системы массового обслуживания?
- Какие используются показатели эффективности системы массового обслуживания?
- Что служит исходными данными для расчетов показателей эффективности систем массового обслуживания?
- Какие исходные данные необходимы для моделирования систем массового обслуживания?
- Через какие результаты моделирования системы массового обслуживания выражают все показатели ее эффективности?
- Что включают основные параметры для моделирования систем массового обслуживания?
- Чем характеризуются потоки заявок на обслуживание?
- Чем характеризуются механизмы обслуживания?
- Что описывает граф состояний системы массового обслуживания

- Что необходимо для построения графа состояний системы массового обслуживания?
- Что представляет собой граф состояний системы массового обслуживания со схемой «гибели и рождения»?
- Чему равно число состояний в графе состояний системы массового обслуживания?
- Какой вид имеет система уравнений для определения вероятностей состояний системы массового обслуживания?
- По какому общему правилу вычисляется вероятность любого состояния системы массового обслуживания?

Примеры решения задач

1. Построить граф состояний системы массового обслуживания и привести основные зависимости ее показателей эффективности.

Решение.

а) n-канальная СМО с отказами (задача Эрланга)

Основные параметры:

- каналов $\boldsymbol{n}$,
- интенсивность потока $\boldsymbol{\lambda}$,
- интенсивность обслуживания $\boldsymbol{\mu}$.

Возможные состояния системы:

S_0 - все каналы свободны (ноль заявок в системе);

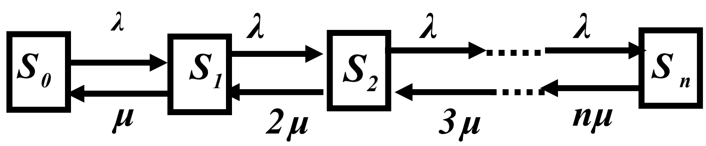
S_1 - один канал занят, остальные свободны (одна заявка в системе);

S_2 - два канала заняты, остальные свободны (две заявки в системе);

....

S_n - все $\boldsymbol{n}$ каналов заняты ($\boldsymbol{n}$ заявок в системе).

Граф состояний:



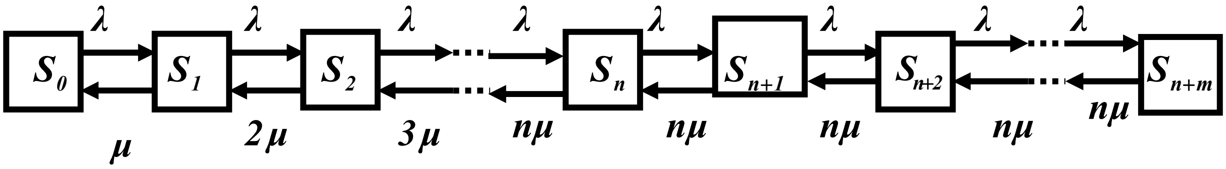
Показатели эффективности системы:

- относительная пропускная способность $q = 1 - P_n$,
- абсолютная пропускная способность $A = \lambda \cdot q$,
- вероятность отказа $P_{отк} = P_n$,
- среднее число занятых каналов $\bar{z} = \dfrac{A}{\mu}$.

б) n-канальная СМО с m-ограниченной очередью

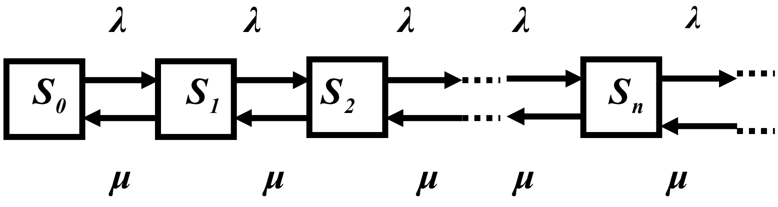
Возможные состояния системы:

S_0 - все каналы свободны (ноль заявок в системе);
S_1 - один канал занят, остальные свободны (одна заявка в системе);
S_2 - два канала заняты, остальные свободны (две заявки в системе);
....
S_n - все n каналов заняты (n заявок в системе), ноль заявок в очереди;
S_{n+1} - все каналы заняты, одна заявка в очереди;
S_{n+2} - все каналы заняты, две заявки в очереди;
....
S_{n+m} - все каналы заняты, m заявок в очереди.
Граф состояний:



в) Одноканальная СМО с неограниченной очередью

Возможные состояния системы:
S_0 - все каналы свободны (ноль заявок в системе);
S_1 - канал занят, ноль заявок в очереди;
S_2 - канал занят, одна заявка в очереди;
....
S_n - канал занят, $n-1$ заявка в очереди;
....
Граф состояний:



Показатели эффективности системы:

- среднее число заявок в системе $L_{сист} = L_{очер} + {}^{1}\!/\!_{\mu}$,
- среднее время пребывания заявки в системе $W_{сист} = \left({}^{1}\!/\!_{\lambda}\right) \cdot L_{сист}$,
- среднее число заявок в очереди $L_{очер} = \dfrac{\left({}^{\lambda}\!/\!_{\mu}\right)^2}{1 - {}^{\lambda}\!/\!_{\mu}}$,

- среднее время пребывания заявки в очереди $W_{очер} = \left(\frac{1}{\lambda}\right) \cdot L_{очер}$,
- абсолютная пропускная способность $A = \lambda$,
- относительная пропускная способность $q = 1$.

г) n-канальная СМО с неограниченной очередью

Возможные состояния системы:

S_0 - все каналы свободны (ноль заявок в системе);

S_1 - один канал занят, остальные свободны (одна заявка в системе);

S_2 - два канала заняты, остальные свободны (две заявки в системе);

....

S_n - все n каналов заняты (n заявок в системе), ноль заявок в очереди;

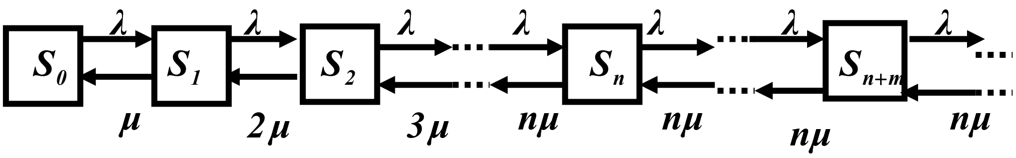
S_{n+1} - все каналы заняты, одна заявка в очереди;

....

S_{n+m} - все каналы заняты, m заявок в очереди;

....

Граф состояний:



Показатели эффективности системы:

- среднее число занятых каналов $\bar{z} = \lambda / \mu$,
- среднее число заявок в системе $L_{сист} = L_{очер} + 1/\mu$,
- среднее число заявок в очереди $L_{очер} = \dfrac{\left(\lambda/\mu\right)^2}{1 - \lambda/\mu}$,
- среднее время пребывания заявки в очереди $W_{очер} = \left(\frac{1}{\lambda}\right) \cdot L_{очер}$.

2. Вычислительный центр имеет три ЭВМ. В центр поступает на решение в среднем четыре задачи в час. Среднее время решения одной задачи - полчаса. Вычислительный центр принимает и ставит в очередь на решение не более трех задач. Необходимо оценить эффективность центра.

РЕШЕНИЕ. Из условия ясно, что имеем многоканальную СМО с ограниченной очередью:

- число каналов $n = 3$;
- интенсивность потока заявок $\lambda = 4$ (задача / час);
- время обслуживания одной заявки $t_{об} = 0.5$ (час / задача), интенсивность обслуживания $\mu = \dfrac{1}{t_{об}} = 2$ (задача / час);
- длина очереди $m = 3$.

Перечень возможных состояний:

S_0 - заявок нет, все каналы свободны;

S_1 - один канал занят, два свободны;

S_2 - два канала заняты, один свободен;

S_3 - три канала заняты;

S_4 - три канала заняты, одна заявка в очереди;

S_5 - три канала заняты, две заявки в очереди;

S_6 - три канала заняты, три заявки в очереди.

Граф состояний:

$$\begin{tikzcd}
\boxed{S_0} \arrow[r, shift left, "\lambda"] & \boxed{S_1} \arrow[l, shift left, "\mu"] \arrow[r, shift left, "\lambda"] & \boxed{S_2} \arrow[l, shift left, "2\mu"] \arrow[r, shift left, "\lambda"] & \boxed{S_3} \arrow[l, shift left, "3\mu"] \arrow[r, shift left, "\lambda"] & \boxed{S_4} \arrow[l, shift left, "3\mu"] \arrow[r, shift left, "\lambda"] & \boxed{S_5} \arrow[l, shift left, "3\mu"] \arrow[r, shift left, "\lambda"] & \boxed{S_6} \arrow[l, shift left, "3\mu"]
\end{tikzcd}$$

Рассчитаем вероятность состояния S_0:

$$P_0 = \left(1 + \lambda/\mu + \lambda\cdot\lambda/2\mu\cdot\mu + \lambda\cdot\lambda\cdot\lambda/3\mu\cdot2\mu\cdot\mu + \lambda\cdot\lambda\cdot\lambda\cdot\lambda/3\mu\cdot3\mu\cdot2\mu\cdot\mu + \right.$$

$$+\lambda\cdot\lambda\cdot\lambda\cdot\lambda/3\mu\cdot3\mu\cdot2\mu\cdot\mu + \lambda\cdot\lambda\cdot\lambda\cdot\lambda\cdot\lambda/3\mu\cdot3\mu\cdot3\mu\cdot2\mu\cdot\mu +$$

$$\left. +\lambda\cdot\lambda\cdot\lambda\cdot\lambda\cdot\lambda\cdot\lambda/3\mu\cdot3\mu\cdot3\mu\cdot3\mu\cdot2\mu\cdot\mu\right) = 0.122.$$

Показатели эффективности:

- вероятность отказа (все три ЭВМ заняты и три заявки стоят в очереди)

$$P_{m+n} = \frac{\left(\lambda/\mu\right)^{m+n}}{n^m \cdot n!} \cdot P_0 = 0.048;$$

- относительная пропускная способность

$$q = 1 - P_{m+n} = 0.952;$$

- абсолютная пропускная способность

$$A = \lambda \cdot q = 3.808;$$

- среднее число занятых ЭВМ

$$\bar{z} = \frac{A}{\mu} = 1.904.$$

3. (Задача с использованием СМО с отказами.) В ОТК цеха работают три контролера. Если деталь поступает в ОТК, когда все контролеры заняты обслуживанием ранее поступивших деталей, то она проходит непроверенной. Среднее число деталей, поступающих в ОТК в течение часа, равно 24, среднее время, которое затрачивает один контролер на обслуживание одной детали, равно 5 мин. Определить вероятность того, деталь пройдет ОТК необслуженной, насколько загружены контролеры и сколько их необходимо поставить, чтобы $P^{*}_{обс} \geq 0{,}95$ (* - заданное значение $P_{обс}$).

РЕШЕНИЕ. По условию задачи $\lambda = 24 \quad дет./ч = 0{,}4 \quad дет/мин, \quad t_{обс} = 5 мин$, тогда $\mu = 0{,}2, \quad p = \lambda / \mu = 2$.

1) Вероятность простоя каналов обслуживания:

$$P_0 = \left(1 + \frac{\lambda}{\mu} + \frac{\lambda \cdot \lambda}{\mu \cdot 2\mu} + \frac{\lambda \cdot \lambda \cdot \lambda}{\mu \cdot 2\mu \cdot 3\mu}\right)^{-1} = \left(1 + p + p^2 / 1 \cdot 2 + p^3 / 1 \cdot 2 \cdot 3\right)^{-1} = ,$$

$$= \frac{1}{2^0 / 0! + 2^1 / 1! + 2^2 / 2! + 2^3 / 3!} = \frac{1}{1 + 2 + 2 + 1{,}3} = 0{,}1587$$

где 0!=1.

2) Вероятность отказа в обслуживании:

$P_{отк} = 2^3 \cdot 0{,}1587 / 3! = 0{,}21$.

3) Вероятность обслуживания:

$P_{обс} = 1 - 0{,}21 = 0{,}79$.

4) Среднее число занятых обслуживанием каналов:

$\overline{n_з} = 2 \cdot 0{,}79 = 1{,}58$.

5) Доля каналов, занятых обслуживанием:

$k_з = 1{,}58 / 3 = 0{,}526$.

6) Абсолютная пропускная способность:

$A = 0{,}4 \cdot 0{,}79 = 0{,}316$.

При $n = 3 \quad P_{обс} = 0{,}79 \leq P^{*}_{обс} = 0{,}95$. Произведя аналогичные расчеты для $n = 4$, получим

$P_0 = 0{,}14, \quad P_{отк} = 0{,}093, \quad P_{обс} = 0{,}907$.

Так как $P_{обс} = 0{,}907 \leq P^{*}_{обс} = 0{,}95$, то произведя расчеты для $n = 5$, получим

$P_0 = 0{,}137, \quad P_{отк} = 0{,}035, \quad P_{обс} = 0{,}965 \geq P^{*}_{обс} = 0{,}95$.

ОТВЕТ. Вероятность того, что при $n = 3$ деталь пройдет ОТК необслуженной, составляет 21%, и контролеры будут заняты обслуживанием на 53%.

Чтобы обеспечить вероятность обслуживания более 95%, необходимо не менее пяти контролеров.

4. (Задача с использованием СМО с неограниченным ожиданием.) Сберкасса имеет трех контролеров-кассиров ($n = 3$) для обслуживания вкладчи-

ков. Поток вкладчиков поступает в сберкассу с интенсивностью $\lambda = 30$ чел./ч. Средняя продолжительность обслуживания контролером-кассиром одного вкладчика $\bar{t}_{\text{обс}} = 3$ мин.

Определить характеристики сберкассы как объекта СМО.

РЕШЕНИЕ. Интенсивность потока обслуживания $\mu = 1/\bar{t}_{\text{обс}} = 1/3 = 0{,}333$, интенсивность нагрузки $p = \dfrac{\lambda}{\mu} = \dfrac{30 чел./час}{0{,}333 чел./мин} = \dfrac{30/60\ чел./мин}{0{,}333 чел./мин} = 1{,}5$.

1) Вероятность простоя контролеров-кассиров в течение рабочего дня (см. предыдущую задачу №3):

$$P_0 = \frac{1}{\frac{1{,}5^0}{0!} + \frac{1{,}5^1}{1!} + \frac{1{,}5^2}{2!} + \frac{1{,}5^3}{3!} + \frac{1{,}5^4}{3!(3-1{,}5)}} = 0{,}210.$$

2) Вероятность застать всех контролеров-кассиров занятыми:

$$P_n = \frac{1{,}5^3}{3!}0{,}21 = 0{,}118.$$

3) Вероятность очереди:

$$P_{\text{оч}} = \frac{1{,}5^4}{3!(3-1{,}5)}0{,}21 = 0{,}118.$$

4) Среднее число заявок в очереди:

$$\bar{L}_{\text{оч}} = \frac{1{,}5^4}{(3-1)!(3-1{,}5)^2}0{,}21 = 0{,}236.$$

5) Среднее время ожидания заявки в очереди:

$$\bar{t}_{\text{оч}} = \frac{0{,}236}{0{,}5} = 0{,}472 \text{ мин.}$$

6) Среднее время пребывания заявки в СМО:

$$\bar{t}_{\text{смо}} = 0{,}472 + 3 = 3{,}472 \text{ мин.}$$

7) Среднее число свободных каналов:

$$\bar{n}_{\text{св}} = 3 - 1{,}5 = 1{,}5.$$

8) Коэффициент занятости каналов обслуживания:

$$k_{\text{з}} = \frac{1{,}5}{3} = 0{,}5.$$

9) Среднее число посетителей в сберкассе:

$$\bar{z} = 0{,}236 + 1{,}5 = 1{,}736 \text{ чел.}$$

ОТВЕТ. Вероятность простоя контролеров-кассиров равна 21% рабочего времени, вероятность посетителю оказаться в очереди составляет 11,8%, среднее число посетителей в очереди 0,236 чел., среднее время ожидания посетителями обслуживания 0,472 мин.

5. (Задача с применением СМО с ожиданием и с ограниченной длиной очереди.) Магазин получает ранние овощи из пригородных теплиц. Автомобили с грузом прибывают в разное время с интенсивностью $\lambda = 6$ машин в день. Подсобные помещения и оборудование для подготовки овощей к продаже позволяют обрабатывать и хранить товар, привезенный двумя автомашинами ($m = 2$). В магазине работают три фасовщика ($n = 3$), каждый из которых в среднем может обрабатывать товар с одной машины в течение $\bar{t}_{\text{обс}} = 4$ ч. Продолжительность рабочего дня при сменной работе составляет 12 ч.

Определить, какова должна быть емкость подсобных помещений, чтобы вероятность полной обработки товаров была $P^*_{\text{обс}} \geq 0{,}97$.

РЕШЕНИЕ. Определим интенсивность загрузки фасовщиков:

$p = \lambda / \mu = 6 / 3 = 2$, $\mu = 1 / \bar{t}_{\text{обс}} = 1 \cdot 12 / 4 = 3$ авт./дн.

1) Найдем вероятность простоя фасовщиков при отсутствии машин (заявок):

$$P_0 = 1 : \left\{ \frac{2^0}{0!} + \frac{2^1}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \frac{2^3}{3!} + \frac{2^{3+1}}{3!(3-2)} \left[1 - \left(\frac{2}{3} \right)^2 \right] \right\} = 0{,}128,$$

причем 0!=1,0.

2) Вероятность отказа в обслуживании:

$$P_{\text{отк}} = P_{n+m} = 0{,}128 \frac{2^{3+2}}{3!3^2} = 0{,}075.$$

3) Вероятность обслуживания:

$P_{\text{обс}} = 1 - 0{,}075 = 0{,}925$.

Так как $P_{\text{обс}} = 0{,}925 < P^*_{\text{обс}} = 0{,}97$, произведем аналогичные вычисления для $m = 3$, получим

$P_0 = 0{,}122$, $P_{\text{отк}} = 0{,}048$, $P_{\text{обс}} = 0{,}952$.

Так как $P_{\text{обс}} = 0{,}952 < P^*_{\text{обс}} = 0{,}97$, примем $m = 4$.

Для этого случая

$P_0 = 0{,}12$, $P_{\text{отк}} = 0{,}028$, $P_{\text{обс}} = 0{,}972$,

$0{,}972 > 0{,}97$, емкость подсобных помещений необходимо увеличить до $m = 4$.

Для достижения заданной вероятности обслуживания можно увеличивать число фасовщиков, проводя последовательно вычисления СМО для $n = 4,\ 5$ и т.д. Задачу можно решить, увеличивая емкость подсобных поме-

Найдем остальные параметры СМО для рассчитанного случая при $P_0 = 0{,}12$, $P_{\text{отк}} = 0{,}028$, $P_{\text{обс}} = 0{,}972$,

щений, число фасовщиков, уменьшая время обработки товаров.

4) Абсолютная пропускная способность:

$A = 0{,}972 \cdot 6 = 5{,}832$ авт./дн.

5) Среднее число занятых обслуживанием каналов (фасовщиков):

$\bar{n}_{зан} = 5{,}832 / 3 = 1{,}944$.

6) Среднее число заявок в очереди:

$$\bar{L}_{оч} = \frac{2^4}{3 \cdot 3!} \cdot \frac{1 - (2/3)^4 (4 + 1 - 4 \cdot 2/3)}{(1 - 2/3)^2} \cdot 0{,}12 = 0{,}548.$$

7) Среднее время ожидания обслуживания:

$$\bar{t}_{оч} = \frac{0{,}548}{6} = 0{,}09 \text{ дн.}$$

8) Среднее число машин в магазине:

$\bar{z} = 0{,}548 + 1{,}944 = 2{,}492$ авт.

9) Среднее время пребывания машины в магазине:

$$\bar{t}_{смо} = \frac{2{,}492}{6} = 0{,}415 \text{ дн.}$$

ОТВЕТ. Емкость подсобных помещений магазина должна вмещать товар, привезенный 4 автомашинами ($m = 4$), при этом вероятность полной обработки товара будет $P_{обс} = 0{,}972$.

Задания для самостоятельной работы

Для каждой из следующих ситуаций определить:

a) к какому классу относится объект СМО;

b) число каналов n;

c) длину очереди m;

d) интенсивность потока заявок λ;

e) интенсивность обслуживания одним каналом μ;

f) количество всех состояний объекта СМО.

В ответах указать значения по каждому пункту, используя следующие сокращения и размерности:

a) ОО – одноканальная с отказами; МО – многоканальная с отказами; ОЖО – одноканальная с ожиданием с ограниченной очередью; ОЖН - одноканальная с ожиданием с неограниченной очередью; МЖО – многоканальная с ожиданием с ограниченной очередью; МЖН - многоканальная с ожиданием с неограниченной очередью;

b) n=**…** (единиц);

c) m=**…** (единиц);

d) λ=**xxx/xxx** (единиц /мин);

e) μ=**xxx/xxx** (единиц /мин);

f) (единиц).

1. Дежурный по администрации города имеет пять телефонов. Телефонные звонки поступают с интенсивностью 90 заявок в час, средняя продолжительность разговора составляет 2 мин.

2. На стоянке автомобилей возле магазина имеются 3 места, каждое из которых отводится под один автомобиль. Автомобили прибывают на стоянку с интенсивностью 20 автомобилей в час. Продолжительность пребывания автомобилей на стоянке составляет в среднем 15 мин. Стоянка на проезжей части не разрешается.

3. АТС предприятия обеспечивает не более 5 переговоров одновременно. Средняя продолжительность разговоров составляет 1 мин. На станцию поступает в среднем 10 вызовов в сек.

4. В грузовой речной порт поступает в среднем 6 сухогрузов в сутки. В порту имеются 3 крана, каждый из которых обслуживает 1 сухогруз в среднем за 8 ч. Краны работают круглосуточно. Ожидающие обслуживания сухогрузы стоят на рейде.

5. В службе «Скорой помощи» поселка круглосуточно дежурят 3 диспетчера, обслуживающие 3 телефонных аппарата. Если заявка на вызов врача к больному поступает, когда диспетчеры заняты, то абонент получает отказ. Поток заявок составляет 4 вызова в минуту. Оформление заявки длится в среднем 1,5 мин.

6. Салон-парикмахерская имеет 4 мастера. Входящий поток посетителей имеет интенсивность 5 человек в час. Среднее время обслуживания одного клиента составляет 40 мин. Длина очереди на обслуживание считается неограниченной.

7. На автозаправочной станции установлены 2 колонки для выдачи бензина. Около станции находится площадка на 2 автомашины для ожидания заправки. На станцию прибывает в среднем одна машина в 3 мин. Среднее время обслуживания одной машины составляет 2 мин.

8. На вокзале в мастерской бытового обслуживания работают три мастера. Если клиент заходит в мастерскую, когда все мастера заняты, то он уходит из мастерской, не ожидая обслуживания. Среднее число клиентов, обращающихся в мастерскую за 1 ч, равно 20. Среднее время, которое затрачивает мастер на обслуживание одного клиента, равно 6 мин.

9. АТС поселка обеспечивает не более 5 переговоров одновременно. Время переговоров в среднем составляет около 3 мин. Вызовы на станцию поступают в среднем через 2 мин.

10. На автозаправочной станции (АЗС) имеются 3 колонки. Площадка при станции, на которой машины ожидают заправку, может вместить не более одной машины, и если она занята, то очередная машина, прибывшая к станции, в очередь не становится, а проезжает на соседнюю станцию. В среднем машины прибывают на станцию каждые 2 мин. Процесс заправки одной машины продолжается в среднем 2,5 мин.

11. В небольшом магазине покупателей обслуживают два продавца. Среднее время обслуживания одного покупателя – 4 мин. Интенсивность потока покупателей – 3 человека в минуту. Вместимость магазина такова, что одновременно в нем в очереди могут находиться не более 5 человек. Покупатель, пришедший в переполненный магазин, когда в очереди уже стоят 5 человек, не ждет снаружи и уходит.

12. Железнодорожную станцию дачного поселка обслуживает касса с двумя окнами. В выходные дни, когда население активно пользуется железной дорогой, интенсивность потока пассажиров составляет 0,9 чел./мин. Кассир затрачивает на обслуживание пассажира в среднем 2 мин.

Для каждой из указанных в вариантах СМО интенсивность потока заявок равна λ и интенсивность обслуживания одним каналом μ. Требуется:
- составить перечень возможных состояний;
- построить граф состояний по схеме "гибели и размножения".

В ответе указать для каждой задачи:
- количество состояний системы;
- интенсивность перехода из последнего состояния в предпоследнее.

Вариант № 1
1. одноканальная СМО с очередью длиной в 1 заявку
2. 2-канальная СМО с отказами **(задача Эрланга)**
3. 31-канальная СМО с 1-ограниченной очередью
4. Одноканальная СМО с неограниченной очередью
5. 31-канальная СМО с неограниченной очередью

Вариант № 2
1. одноканальная СМО с очередью длиной в 2 заявки
2. 3-канальная СМО с отказами **(задача Эрланга)**
3. 30-канальная СМО с 2-ограниченной очередью

4. Одноканальная СМО с неограниченной очередью
5. 30-канальная СМО с неограниченной очередью

Вариант № 3

1. одноканальная СМО с очередью длиной в 3 заявки
2. 4-канальная СМО с отказами **(задача Эрланга)**
3. 29-канальная СМО с 3-ограниченной очередью
4. Одноканальная СМО с неограниченной очередью
5. 29-канальная СМО с неограниченной очередью

Вариант № 4

1. одноканальная СМО с очередью длиной в 4 заявки
2. 5-канальная СМО с отказами **(задача Эрланга)**
3. 28-канальная СМО с 4-ограниченной очередью
4. Одноканальная СМО с неограниченной очередью
5. 28-канальная СМО с неограниченной очередью

Вариант № 5

1. одноканальная СМО с очередью длиной в 5 заявок
2. 6-канальная СМО с отказами **(задача Эрланга)**
3. 27-канальная СМО с 5-ограниченной очередью
4. Одноканальная СМО с неограниченной очередью
5. 27-канальная СМО с неограниченной очередью

Вариант № 6

1. одноканальная СМО с очередью длиной в 6 заявок
2. 7-канальная СМО с отказами **(задача Эрланга)**
3. 26-канальная СМО с 6-ограниченной очередью
4. Одноканальная СМО с неограниченной очередью
5. 26-канальная СМО с неограниченной очередью

Вариант № 7

1. одноканальная СМО с очередью длиной в 7 заявок
2. 8-канальная СМО с отказами **(задача Эрланга)**
3. 25-канальная СМО с 7-ограниченной очередью
4. Одноканальная СМО с неограниченной очередью
5. 25-канальная СМО с неограниченной очередью

Вариант № 8

1. одноканальная СМО с очередью длиной в 8 заявок
2. 9-канальная СМО с отказами **(задача Эрланга)**
3. 24-канальная СМО с 8-ограниченной очередью
4. Одноканальная СМО с неограниченной очередью
5. 24-канальная СМО с неограниченной очередью

Вариант № 9

1. одноканальная СМО с очередью длиной в 9 заявок
2. 10-канальная СМО с отказами **(задача Эрланга)**
3. 23-канальная СМО с 9-ограниченной очередью
4. Одноканальная СМО с неограниченной очередью

5. 23-канальная СМО с неограниченной очередью

<u>Вариант № 10</u>

1. одноканальная СМО с очередью длиной в 10 заявок
2. 11-канальная СМО с отказами **(задача Эрланга)**
3. 22-канальная СМО с 10-ограниченной очередью
4. Одноканальная СМО с неограниченной очередью
5. 22-канальная СМО с неограниченной очередью