Автономная некоммерческая образовательная организация высшего образования
«Сибирский институт бизнеса и информационных технологий»

КЕЙС

Дисциплина: **Высшая математика**

Выполнила студентка:

Сухоруков Ю.Е.

Город Омск

Омск 2022

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАДАНИЕ №1. ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

Задача 1. Модель межотраслевого баланса.

В таблице приведены коэффициенты прямых затрат и конечная продукция отраслей на плановый период, усл. ден.ед.

Отрасль		*Потребление*		*Конечный продукт*
		Промышленность	*Сельское хозяйство*	
Производство	*Промышленность*	*a*	*b*	*t*
	Сельское хозяйство	*c*	*d*	*f*

Найти:

1. *плановые объемы валовой продукции отраслей, межотраслевые поставки, чистую продукцию отраслей;*
2. *необходимый объем валового выпуска каждой отрасли, если конечное потребление продукции сельского хозяйства увеличится на k%, а промышленности на l%.*

Вариант	***a***	***b***	***c***	***d***	***t***	***f***	***k***	***l***
13	0,4	0,25	0,5	0,4	300	200	30	40

Решение. Заполним таблицу данными варианта 13:

Отрасль		Потребление		Конечный продукт
		Промышленность	Сельское хозяйство	
Производство	Промышленность	*0,4*	*0,25*	*300*
	Сельское хозяйство	*0,5*	*0,4*	*200*

Найдем плановые объемы валовой продукции отраслей

$$X = \begin{bmatrix} X1 \\ X2 \end{bmatrix}$$

Зная, что задана матрица

$$A=\begin{bmatrix} 0{,}4 & 0{,}25 \\ 0{,}5 & 0{,}4 \end{bmatrix}$$

прямых затрат и вектор конечного продукта

$$Y=\begin{bmatrix} 300 \\ 200 \end{bmatrix}$$

Используем основную формулу межотраслевого баланса $X = (E - A)^{-1}Y$.
Обратная матрица к матрице

$$E\text{-}A=\begin{bmatrix} 0{,}6 & -0{,}25 \\ -0{,}5 & 0{,}6 \end{bmatrix}$$

Имеет вид

$$(E\text{-}A)^{-1}=\frac{-1}{0{,}6*0{,}6-(-0{,}5)*(-0{,}25)}\begin{bmatrix} 0{,}6 & -0{,}25 \\ -0{,}5 & 0{,}6 \end{bmatrix}^{T}=\begin{bmatrix} 2{,}553 & 1{,}064 \\ 2{,}128 & 2{,}553 \end{bmatrix}$$

$$X=(E\text{-}A)^{-1}=Y=\begin{bmatrix} 2{,}553 & 1{,}064 \\ 2{,}128 & 2{,}553 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 300 \\ 200 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 978{,}723 \\ 1148{,}936 \end{bmatrix}$$

Таким образом, плановый объем валовой продукции отраслей равен $x_1 = 978{,}723$ (промышленность), $x_2 = 1148{,}936$ (сельское хозяйство).

Найдем межотраслевые поставки. Коэффициент прямых затрат определяется как объём ресурса i, необходимый для производства единицы продукта j, т.е. $a_{ij} = \frac{x_{ij}}{x_j}$, $i, j = 1, 2, 3$. Отсюда можно найти $x_{ij} = a_{ij} \cdot x_j$, $i, j = 1, 2, 3$.

Получаем:

$x_{11} = a_{11} \cdot x_1 = 0{,}4 \cdot 978{,}723 = 391{,}489.$

$x_{21} = a_{21} \cdot x_1 = 0{,}5 \cdot 978{,}723 = 489{,}362.$

$x_{12} = a_{12} \cdot x_2 = 0,25 \cdot 1148,936 = 287,234.$
$x_{22} = a_{22} \cdot x_2 = 0,4 \cdot 1148,936 = 459,574.$

Получаем таблицу:

Отрасль		Потребление		Конечный продукт
		Промышленность	Сельское хозяйство	
Производство	Промышленность	*391,489*	*287,234*	*300*
	Сельское хозяйство	*489,362*	*459,574*	*200*

Найдем условно чистую продукцию отраслей из формулы

$x_j = x_{1j} + x_{2j} + z_j$, откуда $z_j = x_j - (x_{1j} + x_{2j})$, $j = 1, 2$.

Получим: $z1 = x1 - (x11 + x21) = 97{,}872$, $z2 = x2 - (x12 + x22) = 402{,}128$

Найдем необходимый объем валового выпуска каждой отрасли, если конечное потребление продукции сельского хозяйства увеличится на 30%, а промышленности на 40%, то есть новый вектор конечной продукции примет вид:

$$Y' = \begin{bmatrix} 300 \cdot 1,3 \\ 200 \cdot 1,4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 390 \\ 280 \end{bmatrix}.$$

Тогда валовой выпуск будет равен:

$$X' = (E - A)^{-1} Y' = \begin{bmatrix} 2,553 & 1,064 \\ 2,128 & 2,553 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 390 \\ 280 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1293,617 \\ 1544,681 \end{bmatrix}.$$

Новый валовой выпуск для промышленности: 1293,617, для сельского хозяйства: 1544,681.

Решение

Для разложения вектора по базису запишем векторное уравнение: x 1 · p1 + x 2 · q 2 + x 3 · r 3 = x

x1 · p1+x2 · q2+x3 · r3=x Найдем определитель матрицы.

Так как определитель матрицы не равен нулю, то введённая система векторов является базисом. △ = 29 △ =29

Показать подробное решение. Решим уравнение методом Гаусса:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

Подставим значения из решения системы Гаусса в векторное уравнение x = - 3 a1 + 2 · a2 + 0 · a3

Ответ:

x = -3a1 + 2a2 + 0a3

Задание 3

$$\begin{cases} 2x_1+3x_2-2x_3+x_4=0 \\ x_1+x_2+3x_3-5x_4=0 \\ -3x_1-5x_22+7x_3-7x_4=0 \end{cases}$$

Решение

Выпишем основную матрицу системы:

2	**3**	**-2**	**1**
1	**1**	**3**	**-5**
-3	**-5**	**7**	**6**
x_1	x_2	x_3	x_4

Приведем матрицу к треугольному виду. Будем работать только со строками, так как умножение строки матрицы на число, отличное от нуля, и прибавление к другой строке для системы означает умножение уравнения на это же число и сложение с другим уравнением, что не меняет решения системы. Умножим 1-ую строку на (-1). Умножим 2-ую строку на (2). Добавим 2-ую строку к 1-ой:

0	-1	8	-11
1	1	3	-5
-3	-5	7	6

Умножим 2-ую строку на (3). Добавим 3-ую строку к 2-ой:

0	-1	8	-11
0	-2	16	-9
-3	-5	7	6

Умножим 1-ую строку на (-2). Добавим 2-ую строку к 1-ой:

0	0	0	13
0	-2	16	-9
-3	-5	7	6

Найдем ранг матрицы.

0	**0**	**0**	**13**
0	**-2**	**16**	**-9**
-3	**-5**	**7**	**6**

Выделенный минор имеет наивысший порядок (из возможных миноров) и отличен от нуля (он равен произведению элементов, стоящих на обратной диагонали), следовательно rang(A) = 3.
Этот минор является базисным. В него вошли коэффициенты при неизвестных x_1,x_2,x_3, значит, неизвестные x_1,x_2,x_3 – зависимые (базисные), а x_4 – свободные.
Преобразуем матрицу, оставляя слева только базисный минор.

0	**0**	**0**	-13
0	**-2**	**16**	9
-3	**-5**	**7**	-6

Система с коэффициентами этой матрицы эквивалентна исходной системе и имеет вид:

$- 2x_2 + 16x_3 = 9x_4$

$- 3x_1 - 5x_2 + 7x_3 = - 6x_4$

Методом исключения неизвестных находим **нетривиальное**

решение:

Получили соотношения, выражающие зависимые переменные x_1, x_2, x_3 через свободные x_4, то есть нашли **общее решение**:

$x_3 = -13x_4$

$x_2 = -{}^{9}/_{2}x_4$

$x_1 = {}^{19}/_{2}x_4$