«Математический проект «Задача Кеплера»»

Задание: ознакомьтесь с примером историко-методологического проекта по теме и выполните письменно данный проект.

Проектное задание

В 1618 году королевский математик и астролог австрийского двора Иоганн Кеплер (1571–1630) женился и решил благоустроить свое домашнее хозяйство. В тот год урожай винограда был очень хорош, и мимо его дома в Линце по Рейну плыли суда, груженные бочками вина. Кеплер попросил доставить несколько бочек во двор своего дома. Так и было сделано. А потом пришел оценщик, который определил вместимость бочек одним очень простым измерением. Он просовывал мерный шест в отверстие, затыкаемое пробкой, и, поглядев на длину стержня, закрашенного вином, тут же объявлял цену. Это показалось Кеплеру странным: бочки были разными, а способ измерения вместимости – один и тот же. Любопытство побудило Кеплера исследовать этот вопрос математически. Поставленную задачу новобрачный решал примерно три дня.

В итоге он создал предпосылки для рождения интегрального исчисления, описав многие методы вычисления площадей и объемов, а также решил несколько экстремальных задач.

Об этом он написал в книге *«Новая стереометрия винных бочек, преимущественно австрийских, как имеющих самую выгодную форму и исключительно удобное употребление для них кубической линейки, с присоединением к архимедовой стереометрии»*.

В наши дни вычислять объемы различных тел (значительно более сложных, чем у Кеплера) необходимо при решении многих технических задач: при нахождении объема корпуса корабля, объема газгольдера, объема водохранилища и др. И решать такие задачи приходится почти каждому инженеру, каждому технику. Простые и общие методы решения подобных задач даются высшей математикой. Познакомьтесь с рассуждениями Кеплера.

Познавательные проектные вопросы

1. **Рассуждения Кеплера о том, что такое бочка (рис. 1).**

«Всякое искусное и удобное измерение объема требует известной правильности фигуры, ибо объемы сосудов, не имеющих никакой определенной правильной формы, не поддаются соображению и требуют только рук и подсчета влитой жидкости», тому же «... жидкость, долго хранимая в металлических сосудах, портится от ржавчины; стеклянные глиняные не достаточны по размерам и ненадежны; каменные не подходят для употребления из-за веса,– значит, остается ... хранить вина в деревянных. Из одного целого ствола опять-таки нельзя приготовить сосудов достаточно вместительных и в нужном количестве, да если и можно, то они трескаются. Поэтому бочки следует строить из многих соединенных друг с другом кусков дерева.

Избегнуть же вытекания жидкости через щели между отдельными кусками нельзя ни при помощи какого-нибудь материала, ни каким-нибудь другим способом, кроме сжимания их связками. Так как эти связки делаются из гибкого материала – березы, дуба и т.п., то под давлением тяжести жидкого вещества, которое ими с силой сжимается, они раздаются по самому вместительному ободу. По этому основному соображению бочары и прибегают к круглым днищам, чтобы, давая на краях иную фигуру, не сделать сосуд перекошенным и непрочным, так как пузо бочки, по сказанному, стремится к круговой форме.

Это можно видеть на флягах, в которых через Альпы переносят в Германию итальянские вина. По условиям их употребления они имеют сжатую форму, чтобы их можно было вешать на бока мулов и безопасно переносить через узкие проходы... и вот с той самой стороны, где они более плоски, они хуже выдерживают напор и легче трескаются.

К Круговая или цилиндрическая фигура прибавляет еще то удобство, что при перевозке вин на телегах по земле главный вес приходится на вино и наименьший на дерево. На этом основании, если бы из деревян-ных дощечек можно было сколотить шар, то шарообразные сосуды были бы самыми желательными.[5] Но так как связками доски в шар сжать нельзя, то его место и заступает цилиндр. Но этот цилиндр не может быть вполне правильным, потому что ослабшие связки тотчас же сде-лались бы бесполезными и не могли бы быть натянуты сильнее, если бы бочка не имела конической фигуры, несколько суживающейся в обе сто-роны от пуза ее.

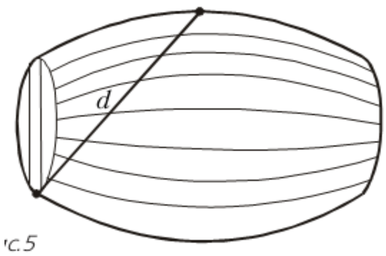


Рис. 1

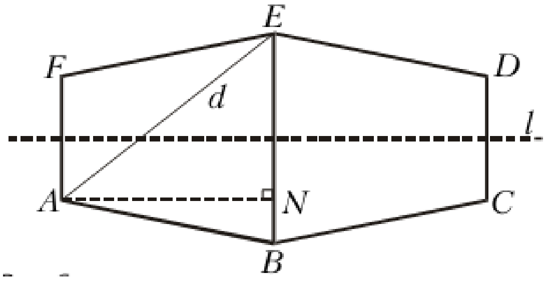


Рис. 2

2. Какую математическую модель винной бочки предложил Кеплер (рис. 2)?

В «... бочка имеет форму пузатого цилиндра, или, говоря точнее, бочка представляется как бы разделенной на два усечен-ных конуса, вершины которых, на-правленные в противоположные сто-роны, отсечены деревянными дни-щами бочки, а основание общее, раз-деляющее конусы и образующее наи-больший круг, опоясывающий боч-ки». Это значит, что Кеплер предла-гает такую математическую модель винной бочки: две одинаковые поло-вины, полученные вращением рав-нобоких трапеций ABEF и BCDE вокруг их общей оси симметрии l

3. Что такое кубическая линейка?

На линейке, которой пользовался продавец вина, пометки были про-ставлены не так, как на обычной, а по «кубическому закону» (рис.7). Идея очень проста: при увеличении линейных размеров в k раз объем увеличивается в k^3 раз. (В самом деле, в k раз увеличиваются и длина, и ширина, и высота.)7

4. Почему австрийская бочка самая вместительная из всех цилиндрических бочек (при фиксированном *d*)?

И когда он получил ответ, то не смог сдержать своего восхищения австрийскими бочарами, которые «как бы по здравому и геометрическому смыслу при построении бочки соблюдают правило, чтобы за радиус днища брать треть длины клепок. Именно, при таком устройстве цилиндр, мысленно построенный между двумя днищами, будет иметь две половины, весьма близко подходящие к условиям теоремы V, и потому будет самым вместительным.

Бочары за длину клепки берут... полуторную величину диаметра основания, что дает... приближение к наивместительнейшей фигуре, потому что клепки изгибаются и с обеих сторон выходят за обручи, которые охватывают и сжимают днища, так что излишек в длине против полуторного диаметра основания и приходится на эти выступающие оконечности, которые не принимались во внимание по правилу теоремы V».

5. Чем отличается рейнская бочка от австрийской?

объем австрийской бочки равен, $\frac{\pi}{3\sqrt{3}}d^3$, что составляет лишь 75% рейнской бочки.

6. Какие математические задачи пришлось решить Кеплеру, чтобы удовлетворить свое любопытство?

Кеплер пишет: «Когда же я узнал, что такое употребление попе-речной линейки установлено здесь общественными властями и измерители ручаются за его правильность, то я, как новобрачный, счел для себя подходящим взять новый предмет математических занятий и исследовать геометрические законы такого удобного и крайне необходимого в домашнем хозяйстве измерения и выяснить его основания, если таковые имеются».

Зададимся теперь вопросом о том, насколько же оно нечувствительно. Для этого сначала нужно определиться с тем, какую относительную погрешность нахождения объёма бочки мы считаем допустимой.

7. Какие теоремы были сформулированы и доказаны Кеплером при решении поставленной им задачи?

Теорема V. Из всех цилиндров, имеющих одну и ту же диагональ, самым большим и вместительным будет тот, в котором отношение диаметра к высоте равно $\sqrt{2}$

Теорема XII. У цилиндра, имеющего общую высоту и диагональ осевого сечения с прямым усечённым конусом, диаметр основания равен среднему арифметическому диаметров оснований усечённого конуса

Теорема XIII. Избыток усечённого конуса над цилиндром, имеющим общие с ним диагональ осевого сечения и высоту, относится к этому цилиндру, как двенадцатая часть квадрата разности диаметров оснований конуса к квадрату диаметра основания цилиндра.

8. Что нового вы узнали в результате выполнения данного проекта?

в результате выполнения данного проекта, мы

- познакомились с удивительной историей открытия методов вычисления площадей и объемов ;

– познакомились с биографией математика и астронома XVII века Иоганна Кеплера;

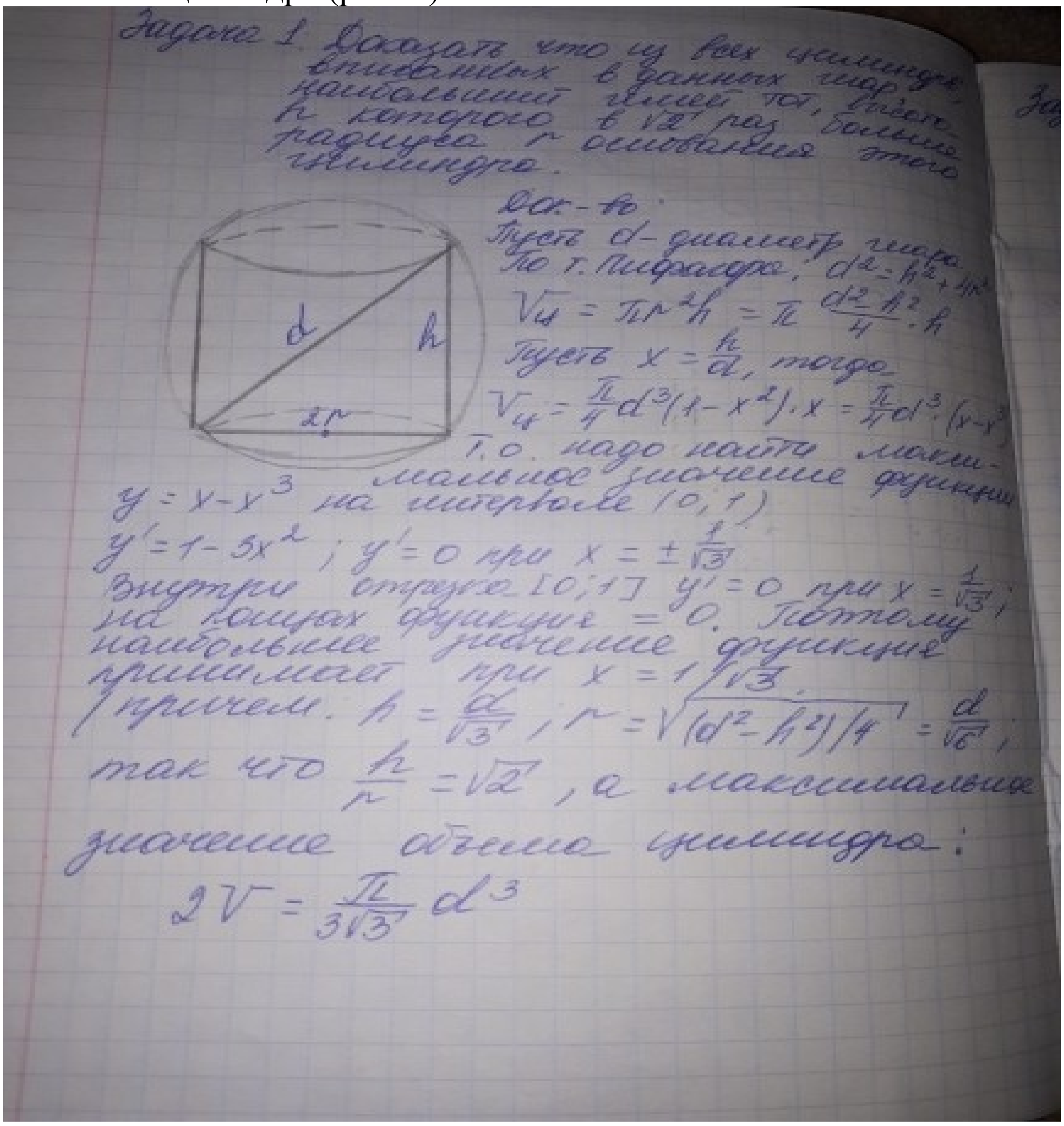
– систематизировали и обобщили знания и умения по теме школьного курса геометрии;

– использовали знания по теме «Производная и её применение к исследованию функций» при решении геометрических задач;

– улучшили самостоятельную работу с математическим текстом;

Математические задачи проекта

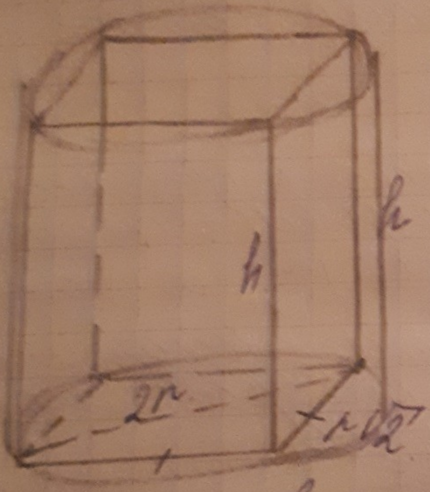
Задача 1. Доказать, что из всех цилиндров, вписанных в данный шар, наибольший объем имеет тот, высота *h* которого в $\sqrt{2}$ раз больше радиуса *r* основания этого цилиндра (рис. 3).



Задача 2. Доказать, что отношение объемов цилиндра и вписанного в него прямоугольного параллелепипеда, основание которого – квадрат со стороной длины $r\sqrt{2}$, а высота совпадает с высотой цилиндра, не зависит ни от *r*, ни от *h* и равно $\frac{\pi}{2}$ (рис. 4).

Задача 2. Доказать, что отношение объемов цилиндра и вписанного в него прямоугольного параллелепипеда, основание которого — квадрат со стороной длиной $r\sqrt{2}$, а высота совпадает с высотой цилиндра, не зависит ни от r, ни от h и равно $\pi/2$.

Док-во:



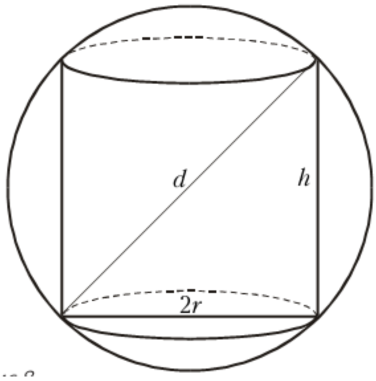
$$V_{\text{пар-да}} = a \cdot b \cdot c = h \cdot r\sqrt{2} \cdot r\sqrt{2} = 2r^2h$$

$$V_{\text{цилиндра}} = \pi r^2 h$$

А отношение:

$$\frac{V_{\text{пар-да}}}{V_{\text{цил.}}} = \frac{2r^2h}{\pi r^2 h} = \frac{2}{\pi}$$

Т.к. r и h сокращаются, поэтому отношение объемов не зависит ни от r, ни от h и равен $2/\pi$.



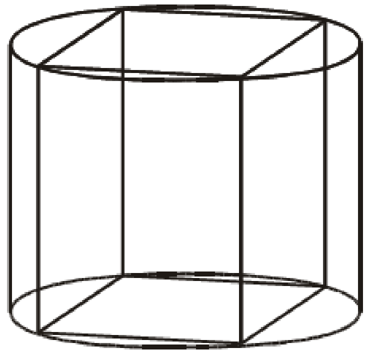
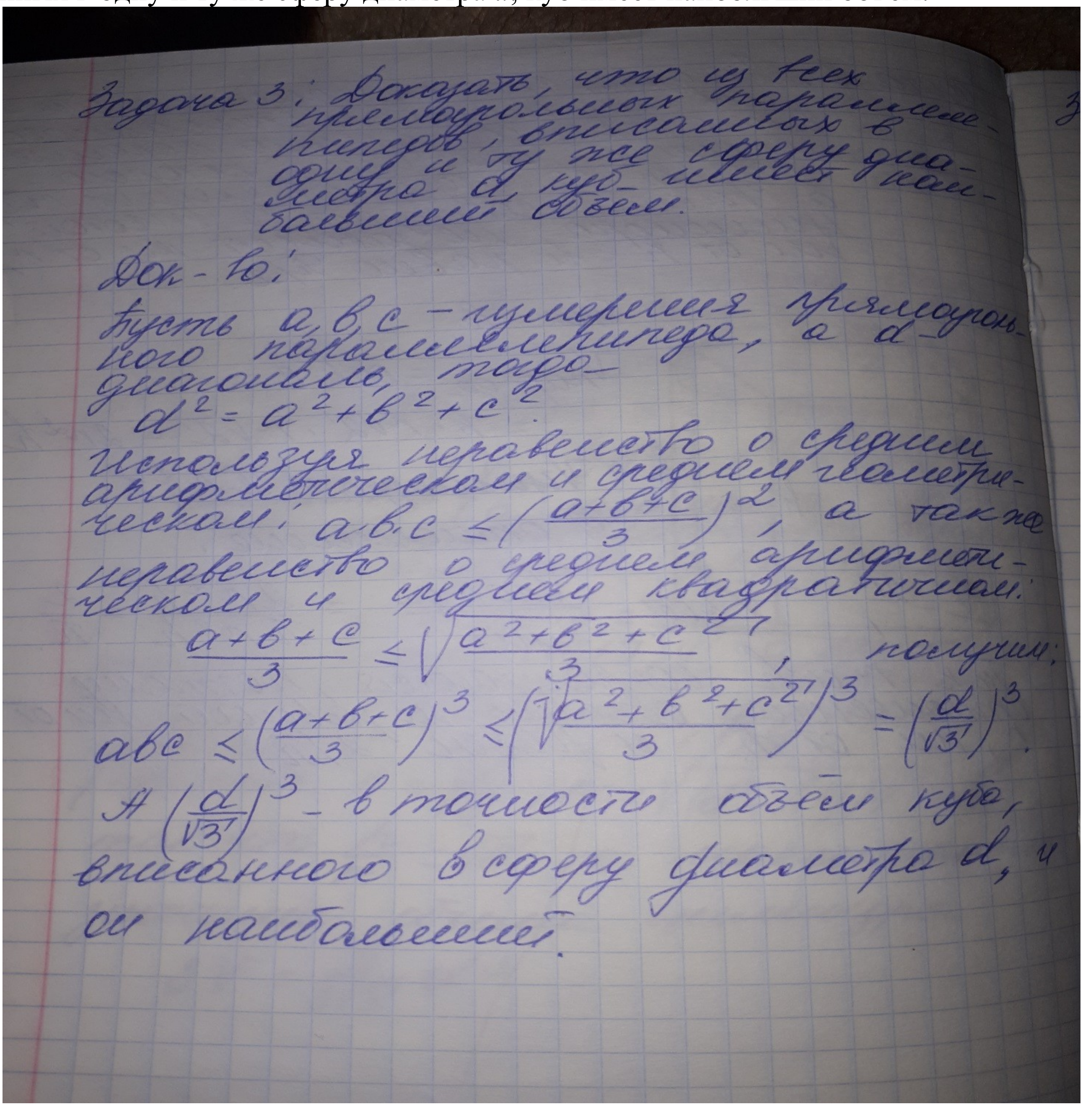


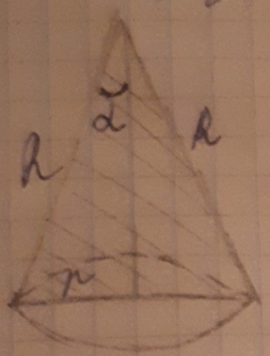
Рис. 3 Рис. 4

Задача 3. Доказать, что из всех прямоугольных параллелепипедов, вписанных в одну и ту же сферу диаметра *d*, куб имеет наибольший объем.



Задача 4. Решите задачу о конусе максимального объема, где α – половина величины угла осевого сечения конуса, R – образующая конуса.

Задача 4: Решить задачу о конусе максимального объема, где α – половина величины угла осевого сечения конуса, R – образующая конуса.



Решение:

$V_{конуса} = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ (r – радиус конуса)

где $r = R \cdot \cos\alpha$, тогда

$V_{конуса} = \frac{1}{3}\pi (R\cdot\cos\alpha)\cdot(R\sin\alpha)^2 =$

$= \frac{\pi}{3} R^3 \cdot \sin^2\alpha \cdot \cos\alpha.$

Значит объем максимален, когда максимально значение функции $y = \sin^2\alpha \cdot \cos\alpha$.

$y' = 2\sin\alpha \cdot \cos^2\alpha - \sin^3\alpha$

$y' = 0$, когда $\alpha = \mathrm{arctg}\sqrt{2}$.

Тогда $V_{конуса} = 2\pi R^2 / 9\sqrt{3}$.

$(2\,\mathrm{arctg}\sqrt{2} = 109^\circ 27')$