Методы решения текстовых задач в курсе алгебры 9 класса

Введение……………………………………………………………………….......3
Глава I. Текстовая задача. Этапы решения задачи
1.1 Понятие «текстовая» задача. …………………………..……………….6
1.2 Анализ условия………………… ……………………..……………..8
1.3 Составление плана решения ………………………………..…………..9
1.4 Реализация плана решения. …………………………………..……….11
1.5 Анализ и проверка правильности решения……………………….……...11
Глава II. Математическое моделирование – один из основных методов решения текстовых задач в основной школе
2.1 Понятие модели и моделирования ……………………………..…...17
2.2 Методы решения задач …………………………..…………………18
2.3 Моделирование как учебная деятельность…………………………....25
Глава III. Практическая реализация этапов решения текстовых задач …....28
Заключение……………………………………………………………..…34
Литература……………………………………………………………...….35
Приложение 1 …………………………………………………….…....36
Приложение 2 ………………………………………………….……...39
Приложение 3 ………………………………………………..………...42

Введение

При обучении математике задачи имеют большое и многостороннее значение. Решая математическую задачу, человек познает много нового: знакомится с новой ситуацией, описанной в задаче, с применением математической теории к ее решению, познает новый метод решения или новые теоретические разделы математики, необходимые для решения задачи, и т. д. Иными словами, при решении математических задач человек приобретает математические знания, повышает свое математическое образование.

При овладении методом решения некоторого класса задач у человека формируется умение решать такие задачи, а при достаточной тренировке – и навык, что тоже повышает уровень математического образования.

В последние годы самые сильные отрицательные эмоции у учащихся на уроках математики вызывает задание решить задачу. Примерно половина из них на контрольной работе или экзамене даже не приступает к решению текстовых задач.

Почему так происходит? Зачем надо обучать детей решению текстовых задач и как это делать? Эти и другие подобные вопросы все чаще возникают в современной школе. Именно поэтому эта проблема показалась одной из актуальных на сегодняшний день.

Основная задача современного учителя математики не создание у учащихся механического применения полученных навыков, а умения их применения в нестандартных ситуациях. Поэтому в данной работе попытаемся проследить процесс обучения методам решения задач в курсе алгебры 9 класса, рассмотреть структуру обучения их решения в школьных учебниках, а также выделить преимущества и недостатки при обучении решения задач конкретным методом.

Целью же данной работы будет рассмотрение возможности обучения общим методам решения задач, а также сравнение методов для определения трудностей и преимуществ, связанных с их применением при обучении математике.

Для решения проблемы данной темы следует рассмотреть следующие задачи:

− изучить методическую литературу с целью определения общих этапов решения задачи;

− проанализировать действующие учебники по алгебре для девятого класса и программу по математике для общеобразовательных школ;

− изучить опыт передовых учителей и осуществить наблюдение за деятельностью учителей в данном направлении;

− обобщить и систематизировать накопленный мною опыт и опыт передовых учителей по данной теме.

Вообще чтобы научиться решать задачи надо их решать, причем решать различные задачи и по-разному (то есть разными способами), анализировать решения, сравнивать, находить преимущества и недостатки в каждом конкретном случае.

Первая глава моей работы посвящена основным составным частям задачи в школьном курсе, и на что, при обучении их решению, следует обратить внимание.

Во второй главе рассказывается о математическом моделировании и методах решения текстовых задач.

В третьей главе показана работа с текстовыми задачами в курсе алгебры 9 класса.

Я предполагаю, что новые подходы, формы, направления работы над задачей более успешно позволяют организовать процесс решения текстовых задач.

Данная проблема рассматривается в книге «Совершенствование методики работы учителя математики» [4]. В ней показано, как опираясь на систему психолого-дидактических закономерностей, учитель может выбрать оптимальные методические пути в обучении математике. Описывается ряд интересных методов и приемов обучения.

В пособии «Методы решения задач по алгебре от простых до самых сложных» [6] собран многолетний опыт работы авторов с различными по уровню подготовки школьниками, предложены наиболее простые методики обучения решению задач, которые помогают избежать типичных ошибок.

Книга «Решение алгебраических задач» [3] поможет ученикам научиться решать сюжетные задачи арифметическим методом, с опорой на гармоническую связь образного и логического мышления.

Глава I Текстовая задача. Этапы решения задачи

1.1 Понятие «текстовая» задача.

В обучении математике велика роль текстовых задач.

Решая задачи, учащиеся приобретают новые математические знания, готовятся к практической деятельности. Задачи способствуют развитию их логического мышления. Большое значение имеет решение задач и в воспитании личности учащихся. Поэтому важно, чтобы ученик имел глубокие представления о текстовой задаче, о её структуре, умел решать такие задачи различными способами.

Текстовая задача – есть описание некоторой ситуации на естественном языке с требованием дать количественную характеристику какого-либо компонента этой ситуации, установить наличие или отсутствие некоторого отношения между её компонентами или определить вид этого отношения.

Математические задачи, в которых есть хотя бы один объект, являющийся реальным предметом, принято называть текстовыми (сюжетными, практическими, арифметическими и т.д.). Перечисленные названия берут начало от способа записи (задача представлена в виде текста), сюжета (описываются реальные объекты, явления, события), характера математических выкладок (устанавливаются количественные отношения между значениями некоторых величин, связанные чаще всего с вычислениями). В последнее время наиболее распространенным является термин « текстовая задача ».

Придерживаясь современной терминологии, можно сказать, что текстовая задача представляет собой словесную модель ситуации, явления, события, процесса и т.п. Как в любой модели, в текстовой задаче описывается не все событие или явление, а лишь, его количественные и функциональные характеристики.

Решение задач – это работа несколько необычная, а именно умственная работа. А чтобы научиться какой-либо работе, нужно предварительно хорошо изучить тот материал, над которым придётся работать, те инструменты, с помощью которых выполняется эта работа.

Значит, для того чтобы научиться решать задачи, надо разобраться в том, что собой они представляют, как они устроены, из каких составных частей они состоят, каковы инструменты, с помощью которых производится решение задач.

Каждая задача – это единство условия и цели. Если нет одного из этих компонентов, то нет и задачи. Это очень важно иметь в виду, чтобы проводить анализ текста задачи с соблюдением такого единства. Это означает, что анализ условия задачи необходимо соотносить с вопросом задачи и, наоборот, вопрос задачи анализировать направленно с условием. Их нельзя разрывать, так как они составляют одно целое.

Любая текстовая задача состоит из двух частей: условия и требования (вопроса).

В условии соблюдаются сведения об объектах и некоторых величинах, характеризующих данные объекта, об известных и неизвестных значениях этих величин, об отношениях между ними.

Требования задачи – это указание того, что нужно найти. Оно может быть выражено предложением в повелительной или вопросительной форме («Найти площадь треугольника» или «Чему равна площадь прямоугольни-ка?»)

Термином «решение задачи» обозначают понятия:

1) решением задачи называют результат, т.е. ответ на требование задачи;
2) решением задачи называют процесс нахождения этого результата, причем этот процесс рассматривают двояко: и как метод нахождения результат и как последовательность тех действий, которые выполняет решающий, применяя тот или иной метод (т.е. в данном случае под решением задачи понимается вид деятельности человека, решающего задачу).

Решить математическую задачу – это значит найти такую последовательность общих положений математики (определений, аксиом, теорем, правил, законов, формул), применяя которые к условиям задачи или к их следствиям (промежуточным результатам решения), получаем то, что требуется, – ее ответ.

При обучении решению задач необходимо научить учащихся разбираться в условии задач, в том, как они устроены, из каких составных частей они состоят, как и с чего начинается их решение.

Далее рассмотрим составные части задачи и рекомендации к учащимся при их решении.

1.2 Анализ условия

Первый этап - анализ условия. Нельзя приступать к решению задачи, не уяснив четко, в чем заключается задание, т. е. не установив, каковы данные и искомые или посылки и заключения. Первый совет учителя: не спешить начинать решать задачу. Этот совет не означает, что задачу надо решать как можно медленней. Он означает, что решению задачи должна предшествовать подготовка, заключающаяся в следующем:

а) сначала следует ознакомиться с задачей, внимательно прочитав ее содержание. При этом схватывается общая ситуация, описанная в задаче;

б) ознакомившись с задачей, необходимо вникнуть в ее содержание. При этом нужно следовать такому совету: выделить в задаче данные и искомые, а в задаче на доказательство – посылки и заключения;

в) если задача связана с геометрическими фигурами, полезно сделать чертеж к задаче и обозначить на чертеже данные и искомые (это тоже совет, которому должен следовать ученик);

г) в том случае, когда данные (или искомые) в задаче не обозначены, надо ввести подходящие обозначения.

Уже на первой стадии решения задачи, стадии анализа задания, рекомендуют ответить на вопрос: "Возможно ли решить задачу при таком условии?" Не всегда сразу удается ответить на этот вопрос, но иногда это можно сделать.

Отвечая на этот вопрос, полезно выяснить, однозначно ли сформулирована задача, не содержит ли она избыточных или противоречивых данных. При этом выясняют, достаточно ли данных для решения задачи.

1.3 Составление плана решения

Составление плана решения задачи (2-й этап – поиск пути решения). Составление плана решения задачи, пожалуй, является главным шагом на пути ее решения. Правильно составленный план решения задачи почти гарантирует правильное ее решение. Но составление плана может оказаться сложным и длительным процессом. Поэтому крайне необходимо предлагать ученику ненавязчивые вопросы, советы, помогающие ему лучше и быстрее составить план решения задачи, фактически определить метод её решения.

Известна ли решающему какая-либо подобная задача? Аналогичная задача? Подумайте, известна ли вам задача, к которой можно свести решаемую. Если такая задача известна решающему, то путь составления

плана решения данной задачи очевиден: свести решаемую задачу к решенной ранее. Может оказаться, что родственная задача неизвестна решающему и он не может свести данную задачу к какой-либо известной. План же сразу составить не удается.

В литературе советуют воспользоваться советом: "Попытайтесь сформулировать задачу иначе". Иными словами, попытайтесь перефразировать задачу, не меняя ее математического содержания.

При переформулировании задачи пользуются либо определениями данных в ней математических понятий (заменяют термины их определениями), либо их признаками (точнее сказать, достаточными условиями). Надо отметить, что способность учащегося переформулировать текст задачи является показателем понимания математического содержания задачи.

Некоторые авторы относят к переформулировке задачи и перевод ее на язык математики, т. е. язык алгебры, геометрии или анализа. Это, скорее, формализация задачи, "математизация" ее. К такому приему и приходится часто прибегать при решении многих текстовых задач.

Составляя план решения задачи, всегда следует задавать себе (или решающему задачу ученику) вопрос: "Все ли данные задачи использованы?" Выявление неучтенных данных задачи облегчает составление плана ее решения.

При составлении плана задачи иногда бывает полезно следовать совету: "Попытайтесь преобразовать искомые или данные". Часто преобразование искомых или данных способствует более быстрому составлению плана решения. При этом искомые преобразуют так, чтобы они приблизились к данным, а данные – так, чтобы они приблизились к искомым. Так, при каждом случае тождественных преобразований данные преобразуются, постепенно приближаясь к результату (искомому). Аналогично уравнение, систему уравнений, неравенство или систему неравенств преобразуют в равносильные, чтобы найти их корни или множество решений.

Нередко случается так, что, следуя указанным выше советам, решающий задачу все же не может составить план ее решения. Тогда может помочь еще один совет: "Попробуйте решить лишь часть задачи", т. е. попробуйте сначала удовлетворить лишь части условий, с тем чтобы далее искать способ удовлетворить оставшимся условиям задачи. Другими словами: может ли задача с помощью анализа быть разбита на части, а затем решения этих задач синтетическим путем объединяются в единое целое.

Рекомендуют также в составлении плана решения задачи ответить на вопрос: "Для какого частного случая возможно достаточно быстро решить эту задачу?" Обнаружив такой частный случай, решающий ставит перед собой новую цель - воспользоваться решением задачи в найденном частном случае для более общего (но, может быть, не самого общего) случая.

1.4 Реализация плана решения

Реализация плана решения задачи (3-й этап – непосредственно решение). План указывает лишь общий контур решения задачи. При реализации плана решающий задачу рассматривает все детали, которые вписываются в этот контур. Эти детали надо рассматривать тщательно и терпеливо. Но при этом ученику (решающему задачу) полезно следовать некоторым советам:

а) Проверяйте каждый свой шаг, убеждайтесь, что он совершен правильно. Иными словами, нужно доказывать правильность каждого шага

ссылками на соответствующие, известные ранее математические факты, предложения.

б) При реализации плана поможет и совет: "Замените термины и символы их определениями". Так, термин "предел числовой последовательности" для доказательства, например, того предложения, что предел суммы двух последовательностей, имеющих пределы, равен сумме пределов этих последовательностей, можно заменить, и вполне успешно, его определением.

1.5 Анализ и проверка правильности решения

Анализ и проверка правильности решения задачи (4-й этап – проверка и исследование задачи). Даже очень хорошие ученики, получив ответ и тщательно изложив ход решения, считают задачу решенной. А ведь получение результата не означает еще, что задача решена правильно. Тем более не означает, что для решения выбран лучший, наиболее удачный, изящный, если можно так выразиться, вариант. По В. М. Брадису, задачу можно считать решенной, если найденное решение: 1) безошибочно, 2) обоснованно, 3) имеет исчерпывающий характер. Поэтому анализ решения задачи, проверка решения и достоверности результата должны быть этапом решения задачи. Итак, два совета: "Проверьте результат", "Проверьте ход решения". Проверка результата может производиться различными способами. Проверяя правильность хода решения, мы тем самым убеждаемся и в правильности результата.

Второй способ проверки результата заключается в получении того же результата применением другого метода решения задачи, поэтому полезно всегда задавать решающему вопрос: "Нельзя ли тот же результат получить

иначе?" Иными словами, стоит последовать совету: "Решите задачу другим способом". Если при решении задачи другим способом получен тот же результат, что и в первом случае, задачу можно считать решенной правильно. Далее можно рассмотреть какой из использованных методов удобнее в данном случае. К тому же получение различных вариантов решения одной и той же задачи имеет важное обучающее значение.

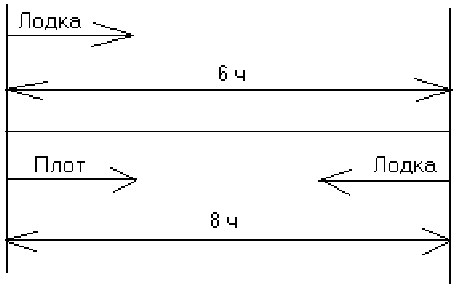
Приведенная схема дает лишь общее представление о процессе решения задач как о сложном и многоплановом процессе. Рассмотрим пример решения задачи, показав конкретно этот процесс.

Задача. Лодка прошла по течению реки расстояние между двумя пристанями за 6 ч, а обратный путь она совершила за 8 ч. За сколько времени пройдет расстояние между пристанями плот, пущенный по течению реки?

1. Анализ задачи.

В задаче речь идет о двух объектах: лодка и плот. Лодка имеет какую-то собственную скорость, а река, по которой плывет и лодка, и плот, имеет определенную скорость течения. Именно поэтому лодка совершает путь между пристанями по течению реки за меньшее время (6 ч), чем против течения (8 ч). Но эти скорости (собственная скорость лодки и скорость течения реки) в задаче не даны (они неизвестны), так же как неизвестно расстояние между пристанями. Однако требуется найти не эти неизвестные скорости и расстояния, а время, за которое плот проплывет неизвестное расстояние между пристанями.

Схематическая запись задачи.



2. Поиск способа решения задачи.

Нужно найти время, за которое плот проплывает расстояние между пристанями *A* и *B*. Для того чтобы найти это время, надо знать расстояние *AB* и скорость течения реки. Оба они неизвестны, поэтому обозначим расстояние *AB* буквой s (км), а скорость течения реки примем равной a км/ч. Чтобы связать эти неизвестные с данными задачи (время движения лодки по и против течения реки), нужно еще знать собственную скорость лодки. Она тоже неизвестна, положим, что она равна v км/ч. Отсюда естественно возникает план решения, заключающийся в том, чтобы составить систему уравнений относительно введенных неизвестных.

3. Осуществление решения задачи.

Итак, пусть расстояние *AB* равно s км, скорость течения реки a км/ч, собственная скорость лодки v км/ч, а искомое время движения плота на пути в s км равно x ч. Тогда скорость лодки по течению реки равна $(v + a)$ км/ч. За 6 ч лодка, идя с этой скоростью, прошла путь *AB* в s км. Следовательно,

$6\,(v + a) = s \qquad (1)$

Против течения эта лодка идет со скоростью (v - a) км/ч и путь AB в s км она пройдет за 8 ч, поэтому

$8(v - a) = s$ (2)

Наконец, плот, плывя со скоростью a км/ч, покрыл расстояние s км за x ч, следовательно,

$ax = s$ (3)

Уравнения (1), (2), (3) образуют систему уравнений относительно неизвестных s, a, v и x. Так как требуется найти лишь x, то остальные неизвестные постараемся исключить.

Для этого из уравнений (1) и (2) найдем: $v + a = \frac{s}{6}$, $v - a = \frac{s}{8}$.

Вычитая из первого уравнения второе, получим:

$2a = \frac{s}{6} - \frac{s}{8}$, отсюда $a = \frac{s}{48}$.

Поставим найденное выражение для a в уравнение (3): $\frac{s}{48} \cdot x = s$.

Так как, очевидно, s не равно 0, то можно обе части полученного уравнения разделить на s. Тогда найдем: $x = 48$.

4. Проверка решения.

Итак, мы нашли, что плот проплывет расстояние между пристанями за 48 ч. Следовательно, его скорость, равная скорости течения реки, равна $\frac{s}{48}$ км/ч. Скорость же лодки по течению равна $\frac{s}{6}$ км/ч, а против течения $\frac{s}{8}$ км/ч. Для того, чтобы убедиться в правильности решения, достаточно проверить, будут ли равны собственные скорости лодки, найденные двумя способами:

1) от скорости лодки по течению отнять скорость течения реки, т.е. $\frac{s}{6} - \frac{s}{8}$;
2) к скорости лодки против течения реки прибавить скорость течения реки,

т.е. $\frac{s}{6} + \frac{s}{48}$.

Произведя вычисления, получаем верное равенство: $\frac{7s}{48} = \frac{7s}{48}$.

Значит, задача решена правильно.

Ответ: плот проплывет расстояние между пристанями за 48 ч.

Анализ решения.

Мы свели решение этой задачи к решению системы трех уравнений с четырьмя неизвестными. Однако найти-то надо было нам лишь одно из этих неизвестных. Поэтому, естественно, возникает мысль, что проведенное решение не самое удачное, хотя и достаточно простое. Можно предложить другое решение.

Зная, что лодка проплыла расстояние *AB* по течению реки за 6 ч, а против – за 8 ч, найдем, что в 1 ч лодка, идя по течению, проходит $\frac{1}{6}$ часть этого расстояния, а против течения $\frac{1}{8}$. Тогда разность между ними $\frac{1}{6} - \frac{1}{8} = \frac{1}{24}$ есть удвоенная часть расстояния *AB*, проплываемая плотом за 1 ч. Значит. Плот за 1 ч проплывет $\frac{1}{48}$ часть расстояния *AB*, следовательно, все расстояние *AB* он проплывет за 48 ч.

При таком решении не понадобилось составлять систему уравнений. Однако, несомненно, это решение сложнее приведенного выше, хотя бы потому, что не всякий догадается найти разность скоростей лодки по тече-нию и против течения реки. Часто эту разность принимают не за удвоенную часть расстояния *AB*, проплываемую плотом за 1 ч, а за скорость плота.

Таким образом, структура процесса решения задачи зависит в первую очередь от характера задачи и, конечно, от того, какими знаниями и умениями обладает решающий задачу.

Приведенная выше схема решения задач является лишь примерной. При фактическом решении указанные там этапы обычно не отделены друг от друга, а переплетаются между собой. Так, в процессе анализа задачи обычно производится и поиск решения. При этом полный пан решения устанавливается не до осуществления решения, а в процессе. Тогда поиск решения ограничивается лишь нахождением идеи решения. Порядок этапов также иногда может меняться.

Памятка по решению текстовых задач.

1. Прочитайте задачу целиком. Определите ее тип.
2. Подумайте, какие величины известны, а какие надо найти.
3. Выберите вспомогательную модель (краткая запись, таблица, чертеж и т.д.) и занесите исходные данные.
4. Определите зависимости между исходными и искомыми величинами.
5. Постройте решаемую модель (уравнение, систему уравнений и т.д.)
6. Преобразуйте созданную модель и найдите искомые величины.
7. Вернитесь к условию задачи и прочитайте еще раз.
8. Проверьте, все ли искомые величины найдены.
9. Сделайте проверку.

Глава II. Математическое моделирование – один из основных методов решения текстовых задач в основной школе

2.1. Понятие модели и моделирования

Для решения многих научных и практических задач широко используется метод моделирования. Реальные объекты или процессы иногда бывают настолько сложны и многогранны, что их изучение невозможно без построения и исследования модели, отображающей лишь какую-то сторону этого процесса или объекта и потому более простую, чем эта реальность.

Под *моделью* (от лат. *mode1u* — мера) понимают мысленно представимую или материально реализованную систему, которая, отражая и воспроизводя объект исследования, способна замещать его при определенных условиях так, что изучение ее дает новую информацию об этом объекте.

Все математические понятия, такие, как число, функция, уравнение, геометрическая фигура и др. представляют собой особые модели количественных отношений и пространственных форм окружающей действительности.

Эти модели математика сконструировала в процессе своего многовекового развития. Но и в настоящее время продолжается конструиро-вание различных математических моделей, и любое творчество в области математики связано с созданием новых моделей. Для изучения этих моделей в математике разработаны многочисленные методы, такие, как методы решения уравнений, исследования функций, измерения и вычисление длин, площадей и объемов геометрических фигур и тел и т.д. Наконец, в математике разработаны и особы методики для использования в практике результатов исследования математических моделей. Примером такой методики являются приемы решения практических задач с помощью уравнений.

Однако, обнаруживается такой парадокс: то, что они имеют дело с моделями, изучают модели, учащиеся, как правило, не знают. Да и откуда им это знать, если в программах и учебниках эти понятия почти отсутствуют? Учащиеся в 9 классе с удивлением узнают, что привычные для них понятия, уравнения, числа, фигуры являются научными моделями, что, решая задачи, они моделируют.

На первом уроке темы «Математическое моделирование» учащиеся в ответ на вопрос "Что такое модель и моделирование?" не дав четкого определения, указали лишь на модели геометрических тел; моделирование они определяли как процесс построения таких моделей. Отвечая на вопрос "Где и для чего используется моделирование?» школьники опять-таки ссылались на те же модели геометрических тел. На вопрос "Какова роль моделирования в науке?" дети либо вовсе не смогли дать ответа, либо ограничивались указанием на роль моделей как наглядных образов.

В системе обучения решению задач (текстовых, сюжетных), в основе которой лежало широкое использование моделирования задачи рассматривались как особые знаковые модели реальных ситуаций (задачных ситуаций), а процесс их решения - как построение цепи моделей (вспомогательной, обобщенной предметной, логической математической и др.).

2.2. Методы решения задач

Существуют различные методы решения текстовых задач: арифметический, алгебраический, геометрический, логический, практический и др. В основе каждого метода лежат различные виды математических моделей. Например, при алгебраическом методе решения задачи составляют-ся уравнения или неравенства, при геометрическом — строятся диаграммы или графики. Решение задачи логическим методом начинается с составления алгоритма.

Следует иметь в виду, что практически каждая задача в рамках выбранного метода допускает решение с помощью различных моделей. Так, используя алгебраический метод, ответ на требование одной и той же задачи можно получить, составив и решив совершенно разные уравнения, используя логический метод — построив разные алгоритмы. Ясно, что и в этих случаях мы также имеем дело с различными методами решения конкретной задачи, которые (с целью избежать разночтения и неоднозначность трактовки термина «метод решения») будем называть *способами решения.*

Иногда для краткости изложения вместо того чтобы говорить, что зада-ча решена определенным способом в рамках, например, арифметического метода, будем говорить, что «задача решена арифметическим способом» или «задача решена арифметическим методом», а то и просто — «задача решена арифметически».

Арифметический метод. Решить задачу арифметическим методом — значит найти ответ на требование задачи посредством выполнения арифметических действий над числами. Одну и ту же задачу во многих случаях можно решить различными арифметическими способами. Задача считается решенной различными способами, если ее решения отличаются связями между данными и искомыми, положенными в основу решений, или последовательностью использования этих связей.

Задача. Поют в хоре и занимаются танцами 82 студента, занимаются танцами и художественной гимнастикой 32 студента, а поют в хоре и занимаются художественной гимнастикой 78 студентов. Сколько студентов поют в хоре, занимаются танцами и художественной гимнастикой отдельно, если известно, что каждый студент занимается только чем-то одним?

Решение.

1-й способ.

1) 82 + 32 + 78 = 192 (чел.) — удвоенное число студентов, поющих в хоре, занимающихся танцами и художественной гимнастикой;

2) 192 : 2 = 96 (чел.) — поют в хоре, занимаются танцами и художественной гимнастикой;

3) 96 – 32 = 64 (чел.) — поют в хоре;

4) 96 - 78 = 18 (чел.) — занимаются танцами;

5) 96 - 82 = 14 (чел.) — занимаются художественной гимнастикой.

2-й способ.

1) 82 - 32 = 50 (чел.) — на столько больше студентов поют в хоре, чем занимаются художественной гимнастикой;

2) 50 + 78 = 128 (чел.) — удвоенное число студентов, поющих в хоре;

3) 128 : 2 = 64 (чел.) — поют в хоре;

4) 78 - 64 = 14 (чел.) — занимаются художественной гимнастикой;

5) 82 - 64 18 (чел.) — занимаются танцами.

Ответ: 64 студента поют в хоре, 14 студентов занимаются художественной гимнастикой, 18 студентов занимаются танцами.

Алгебраический метод. Решить задачу алгебраическим методом — это значит найти ответ на требование задачи, составив и решив уравнение или систему уравнений (или неравенств). Одну и ту же задачу можно также решить различными алгебраическими способами. Задача считается решенной различными способами, если для ее решения составлены различные уравнения или системы уравнений (неравенств), в основе составления которых лежат различные соотношения между данными и искомыми.

Задача. Рабочий может сделать определенное число деталей за три дня. Если он в день будет делать на 10 деталей больше, то справится с заданием за два дня. Какова первоначальная производительность рабочего и сколько деталей он должен сделать?

Решение.

1-й способ.

Пусть x д./день — первоначальная производительность рабочего. Тогда $(x + 10)$ д./день — новая производительность, $3x$ д. — число деталей, которые он должен сделать. По условию получаем уравнение $3x = 2(x + 10)$, решив которое найдем $x = 20$. Первоначальная производительность рабочего 20 деталей в день, он должен сделать 60 деталей.

2-й способ.

Пусть x д. — число деталей, которые должен сделать рабочий. Тогда $\frac{x}{2}$ — новая производительность, $\left(\frac{x}{2} - 10\right)$ д./день — первоначальная производительность рабочего. По условию получаем уравнение $x = 3\left(\frac{x}{2} - 10\right)$, решив которое найдем $x = 60$. Рабочий должен сделать 60 деталей, его первоначальная производительность 20 деталей в день.

Ответ: 20 деталей в день; 60 деталей.

Аналитико-Геометрический метод. Решить задачу аналитико-геометрическим методом — значит найти ответ на требование задачи, используя как алгебраические выражения, уравнения, неравенства, системы уравнений и неравенств так и геометрические построения или свойства геометрических фигур. Одну и ту же задачу можно также решить различными геометрическими способами. Задача считается решенной различными способами, если для ее решения используются различные построения или свойства фигур.

Задача. Из двух городов A и B, расстояние между которыми 250 км, навстречу друг другу выехали два туриста. Скорость движения первого равна 20 км/ч, второго — 30 км/ч. Через сколько часов туристы встретятся?

Решение.

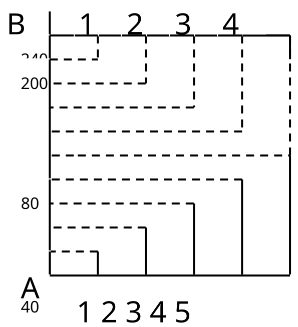
1-й способ. Математическую модель задачи представим в виде диаграммы. Примем длину одного отрезка по вертикали за 10 км, а длину одного отрезка по горизонтали — за 1 ч. Отложим на вертикальной прямой отрезок *AB* равный 250 км. Он будет изображать расстояние между городами. Для удобства проведем еще одну ось времени через точку 6. Затем на вертикаль-ных прямых станем откладывать отрезки пути, пройденные каждым туристом за 1 ч, 2ч, 3ч. и т. д.(рис 1. а). Из чертежа видим, что через 5 ч они встретятся.

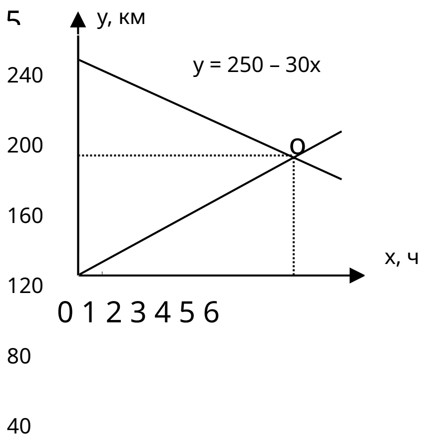
2-й способ. В прямоугольной системе координат по горизонтали отложим время движения (в часах), по вертикали — расстояние (в километрах). Примем длину одного отрезка по вертикали за 10 км, а длину одного отрезка по горизонтали — за 1 ч. Построим графики, характеризующие движение каждого туриста. Движение первого туриста определяется функцией $y = 20x$, второго — $y = 250 - 30x$. Абсцисса точки их пересечения (точки *O*) указывает, через сколько часов туристы встретятся (рис 1.б). Из чертежа видно, что ее значение равно 5. Ордината указывает, на каком расстоянии от пункта *A* произойдет встреча. Ее значение равно 100.

3-й способ. Пусть время движения туристов до встречи изображается отрезком *OT*, а скорость сближения—отрезком *0S*. (рис 1. в). Тогда площадь *S* прямоугольника $0S0_1T$ (она равна $0S \cdot OT$) соответствует расстоянию между городами *A* и *B* (пройденный путь есть произведение скорости движения на время движения). Учитывая, что туристы сближаются каждый час на 20 + 30 = 50 (км), расстояние между городами равно 250 км, имеем уравнение

$250 = 50 \cdot OT$, решив которое находим $OT = 5$ (ч). Итак, туристы встретятся через 5 ч.

Ответ: через 5 ч.





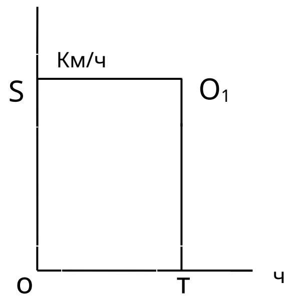


Рис.1. а б в

Практический метод. Решить задачу практическим методом — значит найти ответ на требование задачи, выполнив практические действия с предметами или их копиями (моделями, макетами и т.п.).

Задача. Некто истратил 30 грн. своих денег, после чего удвоил оставшиеся деньги. Затем он истратил 60 грн., после чего опять удвоил оставшиеся деньги. Когда он еще истратил 90 грн., у него осталось 70 грн. Сколько денег было вначале?

Решение.

Чтобы определить, сколько денег было первоначально, возьмем оставшееся количество денег и выполним обратные операции в обратном порядке. Берем оставшиеся 70 грн., добавляем к ним истраченные 90 грн. (160 грн.), затем делим эту сумму пополам и узнаем, сколько денег было до того, как второй раз удвоили оставшиеся деньги (80 грн.). После этого добавляем 60 грн. и находим, сколько денег было до того, как истратили 60 грн. (140 . грн). Делим эту сумму пополам и узнаем, сколько денег было до того, как первый раз удвоили оставшиеся деньги (70 грн.), прибавляем истраченные в первый раз 30 грн. и находим первоначальное количество денег (100 грн).

Ответ: первоначально было 100 грн.

Иногда в ходе решения задачи применяются несколько методов: алгебраический и арифметический; геометрический, алгебраический и арифметический; арифметический и практический и т. п. В этом случае считают, что задача решается комбинированным (смешанным) методом.

Задача. Четыре товарища купили телевизор. Первый внес половину суммы, вносимой остальными, второй — треть того, что внесли все его товарищи, третий — четверть того, что все его товарищи, четвертый — оставшиеся 650 р. Сколько было уплачено за телевизор?

Решение. Пусть первый товарищ внес x грн., второй — y грн., третий — z грн. Тогда, решая задачу чисто алгебраическим методом, по условию задачи получим достаточно громоздкую систему трех уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}(x + z + 650), \\ y = \frac{1}{3}(x + z + 650), \\ z = \frac{1}{4}(x + y + 650). \end{cases}$$

Комбинированный метод позволяет получить ответ на требование задачи более простым путем.

Решение начнем алгебраическим методом.

Пусть первый товарищ внес x грн., тогда все остальные внесли $2x$ грн. Отсюда находим стоимость телевизора: $x + 2x = 3x$ (грн.). Значит, первый внес $\frac{1}{3}$ стоимости телевизора.

Пусть второй товарищ внес y грн, тогда все остальные внесли $3y$ грн. Отсюда находим стоимость телевизора: $y + 3y = 4y$ (грн.). Значит, второй внес $\frac{1}{4}$ стоимости телевизора.

Пусть третий товарищ внес z грн., тогда все остальные внесли $4z$ грн. Отсюда находим стоимость телевизора: $z + 4z = 5z$ (грн.). Значит, третий внес $\frac{1}{5}$ стоимости телевизора.

Продолжим решение арифметическим методом.

Первый, второй и третий внесли $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}=\frac{47}{60}$ стоимости телевизора. Значит, четвертый внес остальные $1-\frac{47}{60}=\frac{13}{60}$ стоимости. По условию это составляет 650 грн. Следовательно, телевизор стоит $650 \cdot \frac{60}{13} = 3000$ грн.

Ответ: 3000 грн.

2.3. Моделирование как учебная деятельность

Когда учащиеся, решая практическую математическую (сюжетную), понимая, что она представляет собой знаковую модель некоторой реальной ситуации, составляют последовательность различных ее моделей, затем изучают эти модели и, наконец, переводят получение решение на язык исходной задачи, то тем самым школьники овладевают методом моделирования.

При обучении математическому моделированию в процессе решения текстовых задач можно отметить несколько уровней обучения в порядке нарастающей сложности:

1. Обучение «языку» на котором будет вестись моделирование (изучение теории и решение системы упражнений, направленных на ее закрепление).

2. Обучение «переводу» реальной ситуации на данный математический язык.

3. Обучение выбору существенных переменных и построению схемы их взаимосвязей.

4. Обучение составлению математических выражений, реально существующих отношений и связей (в частности составлению уравнения по условию задачи).

5. Обучение решению математически выраженных отношений и связей, истолкованию полученного ответа.

6. Обучение исследованию полученного решения (в частности простейшим навыкам самоконтроля).

Очевидно, что ученик, владеющий в какой-то степени методом моделирования по сравнению с тем, кто этим методом не владеет, будет успешнее решать задачи методом составления уравнения. Разобравшись в условии, он просто переведет его на математический язык, построит математическую модель этой задачи: введет переменную, запишет с ее помощью все существующие в задаче соотношения и составит математическое выражение, связывающее их (уравнение, неравенство, систему уравнений или неравенств с одной или несколькими переменными). Затем ему останется только найти значения переменной, при которых выражение обращается в истинное числовое равенство, и проверить, какие из них являются адекватными условию задачи.

На сегодняшний день наиболее перспективным и продуманным подходом является выбор трехэтапной работы над текстовыми задачами: 1) составление математической модели; 2) решение полученной математической модели; 3) ответ на вопрос задачи.

Как показывает практика, наибольшую трудность для учащихся представляет первый этап. Это объясняется тем, что выполнение второго этапа отрабатывается и вне связи с текстовыми задачами: решаются уравнения и неравенства, системы уравнений. Выполнение третьего этапа обычно не вызывает особых затруднений у учеников, хотя и здесь могут появиться ошибки из-за невнимательности: полученное значение x сразу заносится в ответ, хотя вопрос задачи касался другой величины и т.д.

Для того, чтобы построить методическую систему работы учителя по обучению построению математической модели задачи, необходимо проанализировать эту деятельность, определить ее состав и структуру.

Деятельность моделирования задачи состоит в следующем:

1) Определение процесса описанного в задаче;

2) Определение видов этого процесса (видов задачной ситуации);

3) Указание величин, характеризующих каждый из видов процесса;

4) Запись соотношения, характеризующего выделенный процесс;

5) Анализ, какие из указанных величин известны, а какие нет;

6) Введение обозначения буквой одной из неизвестных величин (желательно той, о которой спрашивается в задаче);

7) Выражение каждой из неизвестных величин через известные и введенную букву. Если это сделать не удается – введение новой буквы для другой неизвестной величины;

8) Проверка, соответствуют ли друг другу единицы измерения величин. Если нет. То приведение их в соответствие;

9) Составление уравнения или системы уравнений.

Умение строить математическую модель данной задачной ситуации означает владение всеми указанными действиями.

Метод математического моделирования позволяет научить детей осознанно, а не формально решать текстовые задачи, творчески подходить к их решению, что особенно актуально в связи с введением ЗНО.

Глава III. Практическая реализация этапов решения текстовых задач

Текстовые алгебраические задачи курса алгебры 9 класса, можно условно классифицировать по типам:

- задачи на числовые зависимости;
- задачи, связанные с понятием «процента»;

- задачи на прогрессии;
- задачи на движение;
- задачи на совместную работу;
- задачи на смеси и сплавы.

Рассмотрим примеры решения некоторых типов задач из приведенной выше классификации, предварительно выделив особенности задач каждого типа, которые надо учитывать при их решении.

Задачи на движение

Уравнения, которые составляются на основании условий задач на движение, обычно содержат такие величины, как расстояние, скорости движущихся объектов, время, а также скорость течения воды (при движении по реке). При решении этих задач принимают следующие допущения:

1. Если нет специальных оговорок, то движение считается равномерным.
2. Повороты движущихся тел, переходы на новый режим движения считаются происходящими мгновенно.
3. Если тело с собственной скоростью x движется по реке, скорость течения которой равна y, то скорость движения тела по течению считается равной $(x+y)$, а против течения – $(x-y)$.

Задача. Пароход прошел 4 км против течения реки, а затем прошел еще 33 км по течению, затратив на весь путь один час. Найдите собственную скорость парохода, если скорость течения реки равна 6,5 км/ч.

Решение:

Пусть x км/ч – собственная скорость парохода.

Тогда $(x+6,5)$ км/ч – скорость парохода по течению.

$(x-6,5)$ км/ч – скорость парохода против течения.

Так как против течения пароход прошел 4 км со скоростью $(x-6,5)$ км/ч, то $\frac{4}{x-6,5}$ ч. – время движения парохода против течения.

Так как по течению пароход прошел 33 км со скоростью $(x+6,5)$ км/ч, то $\frac{33}{x+6,5}$ ч. – время движения парохода по течению.

По условию $\frac{4}{x-6,5}+\frac{33}{x+6,5}=1$. Решим полученное уравнение

$$\frac{4}{x-6,5}+\frac{33}{x+6,5}-1=0$$

$$\frac{4(x+6{,}5)+33(x-6{,}5)-(x+6{,}5)(x-6{,}5)}{(x+6{,}5)(x-6{,}5)}=0$$

Откуда получаем квадратное уравнение

$x^2-37x+146{,}25=0 \Rightarrow x_1=4{,}5$ км/ч и $x_2=32{,}5$ км/ч.

Осуществим отбор полученных решений.

Через x мы обозначили собственную скорость парохода, при этом скорость течения реки 6,5 км/ч, поэтому $x_1=4{,}5$ не подходит по смыслу задачи (при такой скорости пароход не выплыл бы против течения).

Поэтому, собственная скорость парохода равна 32,5 км/ч.

Ответ: 32,5 км/ч.

Смотри приложение 1.

Задачи на совместную работу

Содержание задач этого типа сводится обычно к следующему: некоторую работу, объем которой не указывается и не является искомым, выполняют несколько человек или механизмов, работающих равномерно, то есть с постоянной для каждого из них производительностью. В таких задачах объем всей работы, которая должна быть выполнена, принимается за 1; время t, требующееся для выполнения всей работы, и p – производительность труда, то есть объем работы, сделанной за единицу времени, связаны соотношением $p=\frac{1}{t}$

Задача 1. Двое рабочих выполняют некоторую работу. После 45 минут совместной работы первый рабочий был переведен на другую работу, и второй рабочий закончил оставшуюся часть работы за 2 часа 15 минут. За какое время мог бы выполнить работу каждый рабочий в отдельности, если известно, что второму для этого понадобится на 1 час больше, чем первому.

Решение:

Пусть x ч – время работы первого по выполнению всей работы.

y ч – время работы второго рабочего.

По условию $x=y-1$, и первое уравнение составлено.

Пусть объем всей работы равен 1. Тогда $\frac{1}{x}$ – производительность труда первого рабочего, $\frac{1}{y}$ – производительность труда второго рабочего. Так как они работали 45 мин $=\frac{3}{4}$ часа совместно, то $\frac{3}{4}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)$ – объем работы, выполненной рабочими за 45 минут.

Так как второй рабочий работал один 2 часа 15 минут = $2\frac{1}{4}ч=\frac{9}{4}ч$, то

$\frac{9}{4}\cdot\frac{1}{y}$ – объем работы, выполненной вторым рабочим за 2 часа 15 минут.

По условию $\frac{3}{4}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)+\frac{9}{4y}=1$.

Таким образом, мы получили систему двух уравнений

$$\begin{cases} x=y-1; \\ \frac{3}{4}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)+\frac{9}{4y}=1. \end{cases}$$

Решим ее, для этого выражение для *x* из первого уравнения подставим во второе

$$\frac{3}{4(y-1)}+\frac{3}{y}=1 \Rightarrow \frac{3y+12y-12-4y^2+4y}{4y(y-1)}=0 \Rightarrow 4y^2-19y+12=0$$

$$y_1=\frac{3}{4} \text{ и } y_2=4.$$

Из двух значений для *y* рассмотрим $y_1=\frac{3}{4}$, но 45 мин. рабочие работали вместе, а потом второй рабочий работал еще отдельно, поэтому $y_1=\frac{3}{4}$ не подходит по смыслу задачи. Для полученного $y_2=4$ найдем из первого уравнения первоначальной системы значение *x*

$$x=4-1 \Rightarrow x=3$$

Итак, первый рабочий выполнит работу за 3 часа, второй – за 4 часа.

Ответ: 3 ч, 4 ч.

Замечание: эту задачу можно было решить, не вводя вторую переменную *y*, а выразить время работы второго рабочего через *x*, тогда нужно было составить одно уравнение и решить его.

Смотри приложение 2.

Задачи на смеси и сплавы

В задачах этого типа основным является понятие «концентрация». пусть смесь массы *M* содержит некоторое вещество массой *m*. Тогда:

- концентрацией данного вещества в смеси (сплаве) называется величина $c=\frac{m}{M}$;
- процентным содержанием данного вещества называется величина $c\cdot 100\%$;

Из последней формулы следует, что при известных величинах концентрации вещества и общей массы смеси (сплава) масса данного вещества определяется по формуле $m = c \cdot M$.

Задачи на смеси (сплавы) можно разделить на два вида:

1. Задаются, например, две смеси (сплава) с массами m_1 и m_2 и с концентрациями в них некоторого вещества, равными соответственно c_1 и c_2. Смеси (сплавы) сливают (сплавляют). Требуется определить массу этого вещества в новой смеси (сплаве) и его новую концентрацию. Ясно, что в новой смеси (сплаве) масса данного вещества равна $c_1 m_1 + c_2 m_2$, а концентрация $c = \frac{c_1 m_1 + c_2 m_2}{m_1 + m_2}$.

2. Задается некоторый объем смеси (сплава) и от этого объема начинают отливать (убирать) определенное количество смеси (сплава), а затем доливать (добавлять) такое же или другое количество смеси (сплава) с такой же концентрацией данного вещества или с другой концентрацией. Эта операция проводится несколько раз.

При решении таких задач необходимо установить контроль за количеством данного вещества и его концентрацией при каждом отливе, а также при каждом доливе смеси. В результате такого контроля получаем разрешающее уравнение. Рассмотрим конкретные задачи.

Задача. Имеется кусок сплава меди с оловом общей массой 12 кг, содержащий 45% меди. Сколько чистого олова надо добавить к этому куску сплава, чтобы получившийся новый сплав содержал 40% меди?

Решение:

Пусть x кг олова надо добавить к сплаву. Так как процентное содержание меди в сплаве равно 45 %, то масса меди в первоначальном сплаве $m = 0{,}45 \cdot 12 = 5{,}4$ кг (где 0,45 – концентрация меди в сплаве). Тогда $(12 + x)$ кг – масса нового сплава. И так как масса меди в первоначальном сплаве равна 5,4 кг, то $\frac{5{,}4}{12 + x}$ – концентрация меди в новом сплаве.

По условию $\frac{5{,}4}{12 + x} = 0{,}4$, решая уравнение, получаем $x = 1{,}5$ кг.

Итак, нужно добавить 1,5 кг чистого олова.

Ответ: 1,5 кг.

Смотри приложение 3.

Задачи на проценты

Решение задач этого типа тесно связано с тремя алгоритмами: нахождения части от целого, восстановление целого по его известной части, нахождение процентного прироста. Рассмотрим эти алгоритмы.

1. Пусть известна некоторая величина A, надо найти a % этой величины.

$$x = A \cdot \frac{a}{100}.$$

2. Пусть известно, что некоторое число b составляет a % от неизвестной величины A. Требуется найти A.

$$A = b \cdot \frac{100}{a}.$$

3. Пусть некоторая переменная величина A, зависящая от времени t, в начальный момент t_0 имеет значение A_0, а в момент t_1 – значение A_1.

Тогда абсолютный прирост величины A за время $t_1 - t_0$ будет равен $A_1 - A_0$; относительный прирост этой величины вычисляется по формуле $\frac{A_1 - A_0}{A_0}$, а процентный прирост по формуле $\frac{A_1 - A_0}{A_0} \cdot 100\%$.

Задача. Для офиса решили купить 4 телефона и 3 факса на сумму 1470 долларов. Удалось снизить цену на телефон на 20%, и в результате за эту же покупку уплатили 1326 долларов. Найти цену факса.

Решение:

Пусть x – стоимость факса, y – стоимость телефона. По условию $4y + 3x = 1470$.

Так как цену на телефон снизили на 20%, то телефон стал стоить 80% от первоначальной цены, то есть $0,8y$ – стоимость телефона после снижения.
По условию $3x + 4 \cdot 0,8y = 1326$.

Решим полученную систему двух уравнений методом алгебраического сложения.

$$\begin{cases} 4y + 3x = 1470; \\ 3x + 3,2y = 1326. \end{cases}$$

$$0,6x = 150 \Rightarrow x = 250.$$

Итак, факс стоит 250 долларов.

Ответ: факс 250 долларов.

Заключение

Умение решать задачи является одним из основных показателей уровня математического развития школьников, глубины усвоения учебного материала. Поэтому любой экзамен по математике, любая проверка знаний содержит в качестве основной и, пожалуй, наиболее трудной части решение задач.

В этой работе были рассмотрены этапы и методы решения задач, особенности каждого из них в курсе алгебры 9 класса.

Я пыталась произвести анализ некоторой методической и школьной литературы с точки зрения изучения общих методов решения задач в школе на уроках математики. В результате можно заключить, что в школьном курсе не всегда есть четкое разделения методов. Авторы школьных учебников не всегда дают напрямую схему какого либо метода.

Большинство учебников построено, так что при решении определенного рода заданий используется по сути один метод, наиболее удобный. Недостаток такого подхода состоит в том что учащийся столкнувшись с задачей подобного рода, решает её этим методом, а если ответ получить не удается, попадает в своего рода тупик.

Поэтому, решая задачи определённого типа, пусть даже наиболее удобным методом не стоит забывать о других способах её решения. Остается подчеркнуть, что в практике решения задач эти методы часто комбинируются.

Следует также отметить что, решая любую задачу необходимо четко представлять план её решения.

А. Дистервег говорил, что «Не в количестве знаний заключается образование, но в полном понимании и искусном применении всего того, что знаешь».

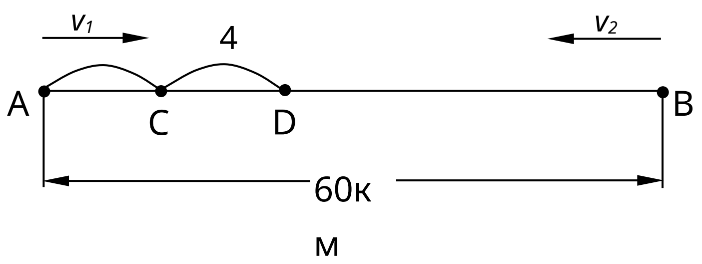
Литература

1. Бровченко О.М. Алгебра. Как решать задачи .– К.: «Логос», 1998. – 160с.
2. Бровченко О.М. Геометрия. Как решать задачи .– К.: «Логос», 2000. – 128с.
3. Гайштут О. Г., Литвиненко Г. М. Решение алгебраических задач. – К.: Рад. шк., 1991.
4. Груднев Я.И. Совершенствование методики работы учителя математики. – М.: Просвещение,1990. – 224с.
5. Далингер В.А. Обучение учащихся решению текстовых задач методом составления уравнений. – Омск, 1991.
6. Кравцев С.В., Макаров М.И., Нараленков М.И., Чигиринский В.Г. Методы решения задач по алгебре от простых до самых сложных. – М.: Экзамен, 2001. – 544с.
7. Кравчук В.Р., Пидручная М.В., Янченко Г.М. Алгебра: Учебник для 9 класса. – Тернополь: Учебники и пособия, 2009. – 256с.
8. Лебедев В.Н. Анализ и решение текстовых задач // Математика в школе. – 2002. - №11. – с.8.
9. Мерзляк А.Г. Алгебра: учебник для 9 класса с углубленным изучением математики/ А.Г. Мерзляк, Д. А. Немировский, В.Б. Полонский, М.С. Якир. – Х.: Гимназия, 2010. – 415с.
10. Чаплыгин В.Ф. Некоторые методические соображения по решению текстовых задач // Математика в школе. – 2000. - №4. – с.29.

Приложение 1

Задача. Расстояние между городами А и В равно 60 км. Два поезда выходят одновременно: один из А в В, другой из В в А. Пройдя 20 км, поезд, идущий из А в В, останавливается на полчаса, затем, пройдя 4 минуты, встречает поезд, идущий из В. Оба поезда прибывают к месту назначения одновременно. Найдите скорости поездов.

Решение:



Отобразим все условия задачи на рисунке.

Заметим, что если время в условии задачи выражено как в часах, так и в минутах, то минуты надо перевести в часы. В нашем случае 4мин $= \frac{4}{60}$ ч = = $\frac{1}{15}$ ч. Так как в задаче надо определить две величины, введем две переменные и составим два уравнения.

Пусть x км/ч – скорость поезда, вышедшего из пункта A; y км/ч – скорость поезда, вышедшего из пункта B.

Так как в задаче известно расстояние, выразим время через скорость и расстояние.

$\frac{20}{x}$ – время, за которое поезд из A прошел 20 км.

$\frac{20}{x}+\frac{1}{2}+\frac{1}{15}=\frac{20}{x}+\frac{17}{30}$ – время, затраченное поездом из A до встречи в пункте D.

$\frac{1}{15}\cdot x$ – расстояние, которое прошел поезд из A за 4 минуты после остановки.

Тогда поезд из A до встречи в пункте D прошел $20+\frac{x}{15}$ км.

$60-\left(20+\frac{x}{15}\right)=40-\frac{x}{15}$ км – расстояние, пройденное поездом из В до встречи. $\frac{40-\frac{x}{15}}{y}$ – время, пройденное поездом из B до встречи в пункте D.

Так как по условию в пункте D поезда встретились, они затратили на путь до встречи одинаковое время, поэтому получаем первое уравнение

$$\frac{20}{x}+\frac{17}{30}=\frac{40-\frac{x}{15}}{y}.$$

С другой стороны, выразим время движения поездов после встречи в пункте D. Так как $AD = 20 + \frac{x}{15}$, то $\frac{20 + \frac{x}{15}}{y}$ – время движения поезда из *B* после встречи. Так как

$DB = 40 - \frac{x}{15}$, то $\frac{40 - \frac{x}{15}}{x}$ – время движения поезда из *A* после встречи.

По условию $\frac{20 + \frac{x}{15}}{y} = \frac{40 - \frac{x}{15}}{x}$.

Таким образом, мы составили систему двух уравнений с двумя переменными.

$$\begin{cases} \frac{20}{x} + \frac{17}{30} = \frac{40 - \frac{x}{15}}{y}; \\ \frac{20 + \frac{x}{15}}{y} = \frac{40 - \frac{x}{15}}{x}. \end{cases}$$

Решим систему, для чего из первого уравнения выразим *y* и подставим это выражение вместо *y* во второе уравнение.

$$y = \frac{40 - \frac{x}{15}}{\frac{20}{x} + \frac{17}{30}};$$

$$\left(20 + \frac{x}{15}\right) : \frac{40 - \frac{x}{15}}{\frac{20}{x} + \frac{17}{30}} = \frac{40 - \frac{x}{15}}{x};$$

$$\left(20 + \frac{x}{15}\right)\left(\frac{20}{x} + \frac{17}{30}\right)x = \left(40 - \frac{x}{15}\right)^2.$$

Решим полученное уравнение

$$\left(20 + \frac{x}{15}\right)\left(20 + \frac{17x}{30}\right) = 1600 - \frac{16}{3}x + \frac{x^2}{225};$$

$$400 + \frac{380x}{30} + \frac{17x^2}{450} = 1600 - \frac{16}{3}x + \frac{x^2}{225};$$

$$x^2 + 540x - 36000 = 0;$$

$$x_1 = 60; \quad x_2 = -600.$$

Так как x – скорость, то x_2 не подходит по смыслу задачи. Подставим полученное значение x в выражение для y

$$y=\frac{40-\frac{60}{15}}{\frac{20}{60}+\frac{17}{30}}=\frac{36}{\frac{54}{60}}=\frac{36\cdot 60}{54}=40.$$

Итак, скорость поезда, вышедшего из пункта *A* 60 км/ч, а скорость поезда, вышедшего из пункта *B* 40 км/ч.

Ответ: 60 км/ч, 40 км

Задачи на совместную работу

Задача. Две бригады рабочих начали работу в 8 часов. Сделав вместе 72 детали, они стали работать раздельно. В 15 часов выяснилось, что за время раздельной работы первая бригада сделала на 8 деталей больше, чем вторая. На другой день первая бригада делала за 1 час на одну деталь больше, а вторая бригада за 1 час на одну деталь меньше. Работу бригады начали вместе в 8 часов и, сделав 72 детали, снова стали работать раздельно. Теперь за время раздельной работы первая бригада сделала на 8 деталей больше, чем вторая, уже к 13 часам. Сколько деталей в час делала каждая бригада?

Решение:

Пусть x деталей в час изготовляет первая бригада (производительность первой бригады), тогда y – производительность второй бригады, а $(x+y)$ – совместная производительность бригад.

Так как вместе они сделали 72 детали, то $\frac{72}{x+y}$ – время совместной работы бригад. Так как бригады работали с 8 до 15 часов, всего 7 часов, то

$(7-\frac{72}{x+y})$– время работы бригад раздельно, тогда $\left(7-\frac{72}{x+y}\right)x$ – число деталей, которое изготовила первая бригада, работая отдельно $\left(7-\frac{72}{x+y}\right)y$ – число деталей, которое изготовила вторая бригада, работая отдельно

По условию $\left(7-\frac{72}{x+y}\right)x-\left(7-\frac{72}{x+y}\right)y=8$ или $\left(7-\frac{72}{x+y}\right)(x-y)=8$

Составим второе уравнение. По условию:

$x+1$ – производительность труда первой бригады на другой день.

$y–1$ – производительность труда второй бригады на другой день.

$x+1+y–1=x+y$ – совместная производительность (такая же, как и в первый день).

Так как бригады работали с 8 до 13 часов – всего 5 часов, то

$\left(5-\frac{72}{x+y}\right)(x+1)$ – число деталей, которые изготовила первая бригада, работая отдельно, во второй день, $\left(5-\frac{72}{x+y}\right)(y-1)$ – число деталей, которые изготовила вторая бригада, работая отдельно, во второй день.

По условию $\left(5-\frac{72}{x+y}\right)(x+1)-\left(5-\frac{72}{x+y}\right)(y-1)=8$

$$\left(5-\frac{72}{x+y}\right)(x-y+2)=8.$$

Таким образом, мы составили систему двух уравнений:

$$\begin{cases}\left(7-\frac{72}{x+y}\right)(x-y)=8;\\ \left(5-\frac{72}{x+y}\right)(x-y+2)=8.\end{cases}$$

Решим эту систему методом замены переменных:

Пусть $\frac{72}{x+y}=u, \quad x-y=v$ (1)

Тогда имеем:

$$\begin{cases}(7-u)v=8;\\ (5-u)(v+2)=8\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}7v-uv=8;\\ 5v-uv-2u+2=0.\end{cases}$$

Выразим из первого уравнения $u=\frac{7v-8}{v}$ и подставим во второе уравнение

$$5v-\frac{7v-8}{v}v-2\cdot\frac{7v-8}{v}+2=0 \Rightarrow v^2+2v-8=0 \Rightarrow v_1=2, \quad v_2=-4.$$

Значение $v_2=-4$ не подходит по смыслу задачи (из условия ясно, что производительность первой бригады выше, чем второй, а значит $x-y=v>0$). Найдем значение u, соответствующее $v_2=2$, подставив значение v_2 в выражение для u:

$$u=\frac{7\cdot2-8}{2}=3.$$

Так как нам нужно найти значения x и y, подставим полученные значения для u и v в (1)

$$\begin{cases}\frac{72}{x+y}=3;\\ x-y=2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\frac{72}{2y+2}=3;\\ x=2+y\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\frac{36}{y+1}=3;\\ x=2+y\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}y=11;\\ x=2+y\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}y=11;\\ x=13.\end{cases}$$

Итак, 13 деталей в час изготавливала первая бригада; 11 деталей в час изготавливала вторая бригада.

Ответ: 13 деталей, 11 деталей.

Приложение 3

Задачи на смеси и сплавы

Задача. Имеются два раствора кислоты разной концентрации. Объем одного раствора 4 л, другого – 6 л. Если их слить вместе, то получится 35 % раствор кислоты. Если же слить равные объемы этих растворов, то получится 36 % раствор кислоты. Сколько литров кислоты содержится в каждом из первоначальных растворов?

Решение:

Пусть x л кислоты содержится в первом растворе, y л кислоты содержится во втором растворе. Тогда $\frac{x}{4}$ – концентрация кислоты в первом растворе, $\frac{y}{6}$ – концентрации кислоты во втором растворе.

Если слить два раствора, то получим раствор массой $4л+6л=10л$, причем масса кислоты в нем будет $(x+y)$, тогда $\frac{x+y}{10}$ – концентрация кислоты, после сливания обоих растворов. Так как по условию в полученном таким образом растворе содержится 35% кислоты, то ее концентрация там равна 0,35.

Таким образом, получаем: $\frac{x+y}{10}=0{,}35$ или $x+y=3{,}5$.

Если будем сливать равные объемы растворов по m литров, то $\frac{x}{4}m+\frac{x}{6}m$ – масса кислоты в полученном растворе, $2m$ – масса полученного раствора, тогда $\frac{\frac{x}{4}m+\frac{y}{6}m}{2m}$ – концентрация кислоты в полученном растворе.

По условию $\frac{\frac{x}{4}m+\frac{y}{6}m}{2m}=0{,}36$ или $\frac{x}{8}+\frac{y}{12}=0{,}36$.

Таким образом, получили систему двух уравнений

$$\begin{cases} x+y=3{,}5; \\ \frac{x}{8}+\frac{y}{12}=0{,}36 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=3{,}5; \\ 6x+4y=17{,}28 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=3{,}5-y; \\ 6(3{,}5-y)+4y=17{,}28 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=3{,}5-y; \\ y=1{,}86 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1{,}64; \\ y=1{,}86. \end{cases}$$

Итак, в первом растворе содержится 1,64 л кислоты, во втором – 1,86 л.

Ответ: 1,64 л; 1,86 л