Дифференциальные уравнения ФПМИ.

TeX:Астафуров Евгений

10 июня 2020 г.

Содержание

1 Методы решения простейших уравнений первого порядка

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0. \tag{1}$$

Определение 1 (*Интегрируемость в квадратурах*)**.** Говорят, что уравнение (1) разрешимо или интегрируемо в квадратурах, если все его решения выражаются явным или неявным образом через элементарные функции с помощью конечного числа арифметических операций, суперпозиций и операций нахождения первообразных.

P.S.

В прежние века первообразную $\int f(x)\,\mathrm{dx}$ называли квадратурой $f(x)$. Отсюда и происходит название «решение в квадратурах».

1.1 Однородные уравнения первого порядка

Уравнение (1) будем называть *однородным уравнением первого порядка*, если при $x \neq 0$ его можно записать в виде:

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right).$$

Заменой $y = xu$, где $u = u(x)$ — новая неизвестная функция, сводится к эквивалентному уравнению

$$xu' + u = f(u)$$

Возможны следующие случаи:

1. Если $f(u) \neq u$, то эквивалентно $\frac{du}{f(u)-u} = \frac{dx}{x}$;
2. Если $f(u) \equiv u$, то эквивалентно $xu' = 0$;

2 Методы понижение порядка дифференциальных уравнений второго порядка

Общий вид дифференциального уравнения второго порядка:

$$F(x, y, y', y'') = 0, \tag{2}$$

где $F(x, y, y', y'')$ — заданная непрерывная функция в некоторой непустой области G евклидова пространства R^4 с декартовыми координатами x, y, y_1, y_2.

Перейдем к рассмотрению основных типов уравнений (2), допускаю щих понижение порядка уравнения. После понижения порядка уравнения (2) получается уравнение первого порядка.

1. (*Не содержит y*)

   Пусть уравнение (2) не содержит y, то есть имеет вид

   $$F(x, y', y'') = 0.$$

   Тогда замена $\boxed{y' = z(x)}$ дает уравнение первого порядкка относительно новой неизвестной функции $z(x)$: $F(x, z, z') = 0$, и если функция $z = \varphi(x, C_1)$, где C_1 — параметр, задает его решения, то функция

   $$\boxed{y = C_2 + \int \varphi(x, C_1)\,\mathrm{dx}},$$

   где C_2 — произвольная постоянная, задает решения исходного уравнения.

2. (*Не содержит x*)

   Пусть уравнение (2) не содержит x, то есть имеет вид

   $$F(y, y', y'') = 0.$$

   Будем считать, что $y = \text{const}$ не является его решением. В таком случае примем y за новый аргумент и введем новую неизвестную функцию $z(y)$ по формуле $y' = z(y)$. Тогда $y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dy'}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot z(y) = z \cdot z'$. В случае получаем уравнение первого порядка

   $$\boxed{F(y, z, zz') = 0},$$

   так как $z \neq 0$. Если же $y = \text{const}$, то нельзя брать y в качестве нового аргумента. Поэтому принимая y за новый аргумент, всегда следует проверять, не теряем ли мы при этом решений вида $y = \text{const}$.

3. (*Случай однородной функции*)

   Функция $F(x, y, y_1, y_2)$ называется однородной функцией степени m относительно переменных y, y_1, y_2, если для любой точки (x, y, y_1, y_2) и любого значения параметра t, выполнено условие $F(x, ty, ty_1, ty_2) = t^m F(x, y, y_1, y_2)$.

   Уравнение (2) называется однородным уравнением переменных y, y', y'', если $F(x, y, y_1, y_2)$ — однородная функция степени m относительно переменных y, y_1, y_2.

   Если уравнение (2) является однородным относительно y, y', y'', то его порядок понижается с помощью замены $y' = y \cdot z$, где $z = z(x)$ — новая неизвестная функция. В этом случае $y'' = y(z' + z^2)$, следовательно

   $$F(x, y, y', y'') = F(x, y, yz, y(z' + z^2)) = y^m F(x, 1, z, z' + z^2) = 0.$$

   Здесь мы воспользовались однородностью функции F. Если $m > 0$, то получаем решение $\boxed{y = 0}$. Если $y \neq 0$, то имеем для функции z уравнение первого порядка

   $$\boxed{F(x, 1, z, z' + z^2) = 0}.$$

   Если множеством его решений является функция $z = \varphi(x, C_1)$, то $y = C_2 e^{\int \varphi(x, C_1)\,\mathrm{dx}}$.

4. (*Уравнение в точных производных. Интегрирующий множитель*)

   Если для некоторой $\Phi(x, y, y')$ при всех x, y, y', y'' спараведливо тождество $F(x, y, y', y'') = \frac{d}{dx}\Phi(x, y, y')$, то уравнение (2) называется *уравнением в точных производных*. В таком случае, очевидно, уравнение (2) эквивалентно уравнению первого порядка

   $$\boxed{\Phi(x, y, y') = C}.$$

   Иногда уравнение (2) становится таковым лишь после его умножения на некоторую функцию $\mu(x, y, y')$ — интегрирующий множитель.

5. *(Случай обобщенно-однородной функции)*

   Функция F называется обобщенно-однородной степени m, если существует такое k, что для любого t выполнено условие
   $$F(tx, t^k y, t^{k-1} y_1, t^{k-2} y_2) = t^m (x, y, y_1, y_2).$$

   Если уравнение (2) является обобщенно-однородным и $x > 0$, то его порядок понижается на единицу с помощью замены $\begin{cases} x = e^u, \\ y = ve^{ku} \end{cases}$ где u — новый аргумент, $v = v(u)$ — новая искомая функция. Если же $x < 0$, то полагаем $x = -e^u$. Опуская поиск выражений для y' и y'' через новые переменные, имеем:

   $$\boxed{F(x, y, y', y'') = F(1, v, v' + kv, v'' + (2k-1)v' + k(k-1)v) = 0}.$$

3 Уравнения, не разрешенные относительно производной. Особые решения

Уравнениями первого порядка, неразрешенными относительно производной, называются уравнения вида

$$F(x, y, y') = 0 \tag{3}$$

Если данное уравнение возможно разрешить относительно y', то получим одно или несколько уравнений вида $y' = f(x, y)$, каждое из которых надо решить.

Если же уравнение (3) возможно разрешить относительно x или y, то нужно воспользоваться методом введения параметра.

3.1 Уравнения, разрешимые относительно искомой функции y

Предположим, что уравнение (3) можно записать в виде $y = f(x, y')$, тогда вводя параметр $p = \frac{dx}{dy} = y'$, получаем функцию $y = f(x, p)$, от обеих частей которой нужно взять полный дифференциал:

$$dy = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial p}dp.$$

Далее, избавляясь заменяя dy на pdx имеем два случая:

1. Если возможно найти $p = p(x, C)$, то подставляя его в (3), получаем $y = f(x, p(x, C))$ — общее решение (3).

2. Если возможно найти $x = \varphi(p, C)$, то исключая параметр p из системы $\begin{cases} x = \varphi(p, C) \\ y = f(\varphi(p, C), p) \end{cases}$ получаем общее решение (3).

3.2 Уравнения, разрешимые относительно аргумента x

Если уравнение (3) можно записать в виде $x = f(y, y')$, то действуя аналогично предыдущему пункту получаем общее решение (3) как $x = f(y, C)$.

Заметим, что бывает удобно вводить параметр p как $p = \frac{1}{y'}$.

3.3 Особые решения

Особым решением (3) на некотором множестве I называется его решение $y_0 = g(x)$, если $\forall x_0 \in I$ через точку графика особого решения $(x_0, g(x_0))$ проходит другое решение, отличное от особого в сколь угодно малой окрестности этой точки, и имеющее ту же касательную.

То есть, если $y = y(x, C)$ — семейство решений (3) , не совпадающих с особым решением $y_0(x)$, то $\forall x_0 \in I$ выполнено *условие касания*: $\begin{cases} y_0(x_0) = y(x_0, C) \\ y_0'(x_0) = y'(x_0, C). \end{cases}$

Алгоритм нахождения особых решений

1. Найти решения (3).

2. Найти p-дискриминантное множество, исключив параметр p из системы $\begin{cases} F(x, y, p) = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial p} = 0. \end{cases}$

3. Отобрать те из решений уравнения (3), которые пересекаются с p-дискриминантным множеством.

4. Для отобранных на предыдущем шаге проверить достаточное условие особого решения, то есть проверить выполнения при любом $x_0 \in I$ условий касания $\begin{cases} y_0(x_0) = y(x_0, C) \\ y_0'(x_0) = y'(x_0, C), \end{cases}$ где $y(x, C)$ — семейство решений (3).

4 Линейные уравнения с переменными коэффициентами.

4.1 Вронскиан W и его свойства.

Вронскиан или **определитель Вронского** — функция $W(f_1, ..., f_n)(x)$, определенная для системы функций $f_1(x), ..., f_n(x)$ на промежутке I:

$$W(f_1, ..., f_k)(x) = det \begin{pmatrix} f_1(x) & f_1(x) & ... & f_n(x) \\ f_1'(x) & f_1'(x) & ... & f_n'(x) \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ f_1^{(n-1)}(x) & f_1^{(n-1)}(x) & ... & f_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix} \tag{4}$$

Свойства:

1. Если функции $f_1, ..., f_n$ — линейно зависимы на I, то $\forall x \in I\ W(x) = 0$.
2. Если $\exists x_0 \in I : W(x_0) \neq 0$, то $f_1, ..., f_n$ — линейно независимы на I.
3. Если $f_1, ..., f_n$ — решения однородного дифференциального уравнения n-ого порядка, то возможны только два варианта:
   (a) $\forall x \in I\ W(x) = 0$, это значит, что $f_1, ..., f_n$ — линейно зависимы на I.
   (b) $\nexists x_0 \in I$ т.ч. $W(x_0) = 0$, это, в свою очередь, значит, что $f_1, ..., f_n$ — линейно независимы.

4.2 Пример исследования функций на линейную зависимость (Задача Ф648)

Исследовать на линейную зависимость: e^x, e^{2x}, e^{3x}.

Решение:

$$W(e^x, e^{2x}, e^{3x}) = det \begin{pmatrix} e^x & e^{2x} & e^{3x} \\ e^x & 2e^{2x} & 3e^{3x} \\ e^x & 4e^{2x} & 9e^{3x} \end{pmatrix} = ... = 6e^{6x},$$

следовательно функции линейно независимы.

4.3 Пример построения системы уравнений, имея частные решения (Задача Ф.22.59)

Известны три частных решения неоднородного уравнения второго порядка: $\begin{cases} y_1 = x^2, \\ y_2 = 1 - x, \\ y_3 = 1 - 3x \end{cases}$ найти решение уравнения с начальными условиями: $\begin{cases} y(0) = 2, \\ y'(0) = 0 \end{cases}$.

Решение:

Известно, что разность двух частных решений есть базисное решение однородного уравнения:

$$\begin{cases} y_{10} = y_3 - y_2 = -2x, \\ y_{20} = y_1 - y_2 = x^2 + x - 1 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} y_{10} = -x, \\ y_{20} = x^2 - 1 \end{cases}$$

Так как y_{10} и y_{20} — решения однородного дифференциального уравнения, то их вронскиан (4) должен равняться нулю. Найдем однородное уравнение из этого условия:

$$det \begin{pmatrix} y & x^2 - 1 & -x \\ y' & 2x & -1 \\ y'' & 2 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$2y + (1 - x^2)y'' - x(2y' - 2xy'') = 0$$

$$y''(x^2 - 1) - 2xy' + 2y = 0 \text{ — } \textbf{Однородное.}$$

Теперь получим неоднородное уравнение, подставив в однородное частное решение $y_2 = 1-x$: $0\cdot(x^2-1) - 2x(-1) + 2(1-x) = 2$, откуда неоднородное уравнение:

$$y''(x^2-1) - 2xy' + 2y = 2.$$

Общее решение уравнени имеет вид: $y = (x^2-1)\cdot C_1 + C_2\cdot x + (1-x)$.

4.4 Формула Луивилля-Остроградского

Пусть дано однородное уравнение второго порядка:

$$a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = 0.$$

Тогда справедлива формула *Луивилля-Остроградского*:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{y}{y_{1o}}\right) = C_0\cdot\frac{1}{y_{1o}^2}\cdot exp\left(-\int\frac{b(x)}{a(x)}dx\right), \tag{5}$$

где y — решение однородного уравнения, y_{1o} — одно из частных решений однородного уравнения, C_0 — некоторая константа. Под интегралом в практическом смысое понимается первообразная, так как вылезшая константа будет поглощена C_0.

4.5 Алгоритм решения линейных уравнений $n = 2$ с переменными коэффициентами

Общая идея состоит в том, чтобы подобрать одно частное решение однородного, а затем, с помощью формулы Луивиля-Остроградского (5) найти второе частное решение однородного уравнения.

Пусть есть уравнение:

$$a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = f(x).$$

1. Найти одно частное решение однородного уравнения, пробуя подстановки (в указанном порядке):
   (a) $y_{1o} = e^{ax}$,
   (b) $y_{1o} = x^k$,
   (c) $y_{1o} = P(x)$, $deg(P) = k$ — в виде многочлена.
2. Применить формулу Луивилля-Остроградского (5) и получить решение однородного уравнения: $y_o = y_{1o}D + y_{2o}C$, где D, C — константы.
3. Воспользовоться методом вариации постоянной:

$$\begin{cases} D'(x)y_{1o} + C'(x)y_{2o} = 0, \\ D'(x)y'_{1o} + C'(x)y'_{2o} = \frac{f(x)}{a(x)}. \end{cases} \tag{6}$$

4. Подставить найденные $C(x)$ и $D(x)$ в решение однородного уравнения, тем самым получить решение неоднородного уравнения.

4.6 Пример — Задача С.9.53

Решить: $x(x+1)y'' + (4x+2)y' + 2y = 6(x+1)$.

Решение:

Отыщем для начала частное решение однородного уравнения. Для этого попробуем замену $y = e^{ax}$:

$$a^2(x^2+x) + a(4x+2) + 2 = 0,$$
$$z^2x^2 + a^2x + 4ax + 2a + 2 = 0,$$
$$x^2a^2 + x(a^2+4a) + (2a+2) = 0,$$
$$\begin{cases} a = -1, \\ a^2 + 4a = 0, \\ a^2 = 0 \text{ — \textbf{не подходит.}} \end{cases}$$

Попробуем замену $y = x^k$:

$$(x^2+x)(k^2-k)x^{k-2} + k(4x+2)x^{k-1} + 2x^k = 0,$$
$$xk^2 - kx + k^2 - k + 4kx + 2k + 2x = 0,$$
$$x(k^2 - k + 4k + 2) + (k^2 + k) = 0,$$
$$\begin{cases} k^2 + 3k + 2 = 0, \\ k + 1 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \boxed{k = -1}.$$

Таким образом, частное решение: $y_{o1} = \frac{1}{x}$.

Найдем второе частное решение с помощью формулы Луивилля-Остроградского (5):

$$\frac{d}{dx}(yx) = Cx^2 exp\left(-\int \frac{4x+2}{x^2+x}dx\right),$$
$$\int \frac{4x+2}{x^2+x}dx = \int \frac{2}{x}dx + \int \frac{2}{x+1}dx = 2\ln x + 2\ln x + 1,$$
$$exp(-\ln x^2 - \ln{(x+1)^2}) = \frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{(x+1)^2},$$
$$\frac{d}{dx}(yx) = \frac{c}{(x+1)^2}, \text{ откуда}$$
$$yx = -\frac{C}{x+1} + D = \frac{C}{x+1} + D,$$
$$\boxed{y = \frac{D}{x} + \frac{C}{x(x+1)}} \text{ — } \textbf{однородное.}$$

Далее воспользуемся методом вариации постоянной (6):

$$\begin{cases} D'\frac{1}{x} + C'\frac{1}{x(x+1)} = 0, \quad D' = -\frac{C'}{x+1} \\ -D'\frac{1}{x^2} - C'\frac{2x+1}{x^2(x+1)^2} = \frac{6}{x} \end{cases},$$
$$C' = -6(x+1)^2 \ \Rightarrow\ C = -2(x+1)^3 + C_1,$$
$$D' = 6(x+1) \ \Rightarrow\ D = 3(x+1)^2 + D_1,$$

следовательно, получаем решение:

$$y = \frac{(x+1)^2}{x} + \frac{C_1}{x(x+1)} + \frac{D_1}{x}.$$

4.7 Задача С.9.68(а)

Составить и решить линейное дифференциальное уравнение второго порядка, если известна его правая часть $f(x)$ и ФСР $y_1(x)$ и $y_2(x)$ соответствующего однородного уравнения:

$$\begin{cases} f(x) = 1 - x^2, \\ y_1 = x, \\ y_2 = x^2 + 1. \end{cases}$$

Решение:

Пусть y_o — решение однородного уравнения, тогда, так как y_o, y_1, y_2 — линейно зависимы, то их вронскиан равен нулю:

$$det\begin{pmatrix} x & x^2+1 & y_o \\ 1 & 2x & y_o' \\ 0 & 2 & y_o'' \end{pmatrix} = y_o''(x^2-1) - 2xy_o' + 2y_o = 0 \text{ — однородое уравнение,}$$
$$\boxed{y''(x+2-1) - 2xy' + 2y = 1 - x^2} \text{ — исходное уравнение.}$$

Далее пользуясь методом варианции постоянной (6), получаем решение данного уравнения.

4.8 Задача про уравнение Бесселя (Т3-2020).

Доказать, что уравнение бесселя не может иметь двух линейно независимых решений, ограниченных в окрестности нуля вместе со своими производными.

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0,\ \nu = const,\ x > 0.$$

Решение:
Предположим обратное, то есть что нашлись такие y_1, y_2 ЛНЗ решения (4), тогда:

$$W(y_1, y_2)(x) = det \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix} = C \cdot exp\left(-\int \frac{x}{x^2}\right) = C \cdot exp\left(-\ln x + D\right) = \frac{C}{x} + D$$

Но при $x \longrightarrow 0$, $\frac{C}{x} \longrightarrow \infty \Rightarrow (y_1y_2' - y_2y_1') \longrightarrow \infty \Rightarrow$ противоречие с условием.

5 Теорема Штурма

5.1 Формулировка теоремы

Теорема: Пусть для любого $x \in I$ выполнено $\mathbf{q(x)} \le \mathbf{Q(x)}$, и $\begin{cases} y(x) \text{ — решение } y'' + q(x)y = 0, \\ z(x) \text{ — решение } z'' + Q(x)z = 0. \end{cases}$. Пусть $x_1 < x_2$ — последовательные нули $y(x)$, тогда либо $z(x_1) = z(x_2) = 0$, либо $\exists x_0 \in (x_1, x_2)$, что $z(x_0) = 0$.

5.2 Неформальная трактовка теоремы

Нули функции $y(x)$ идут не чаще нулей $z(x)$.

5.3 Задача С.10.3 + уравнение Эйлера

Показать, что каждое решение уравнения $y'' + \frac{1}{1+x^2}y = 0$ имеет на промежутке $[0; +\infty)$ бесконечно много нулей.

Решение:

Достаточно показать, что бесконечно много нулей на интегрвале $x \in (1, +\infty)$ Пусть $Q(x) = \frac{1}{1+x^2}$ и $q(x) = \frac{1}{2x^2}$, очевидно, что $q(x) \le Q(x)$. Задача свелась к тому, чтобы показать, что любое решение уравнения $z'' + q(x)z = 0$ имеет ∞ много нулей.

Решим уравнение $z'' + \frac{1}{2x^2}z = 0$ как уравнение **Эйлера**: $z(x) = ax^b$, $z'(x) = abx^{b-1}$, $z'' = ab(b-1)x^{b-2}$:

$$
\begin{gathered}
ab(b-1)x^{b-2} + \frac{ax^b}{2x^2} = 0, \\
ab(b-1)x^{b-2} + \frac{a}{2}x^{b-2} = 0, \\
ab^2 - ab + \frac{a}{2} = 0, \\
a(b^2 - b + \frac{1}{2}) = 0,
\end{gathered}
$$

, откуда $a = 1$, $b = \frac{1 \pm i}{2} = \alpha$. Получаем решение:

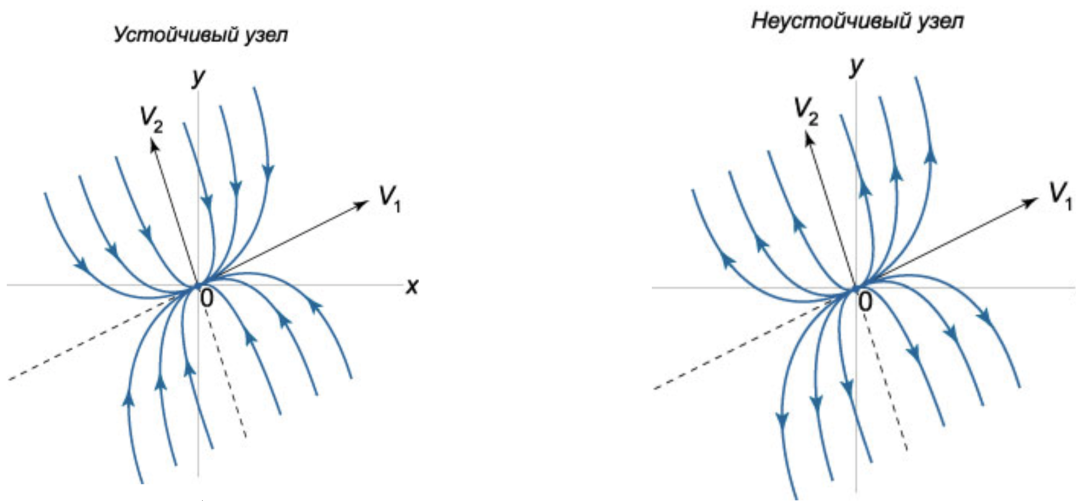
$$
z(x) = x^\alpha = e^{\alpha ln(x)} = e^{\frac{1\pm i}{2} ln(x)} = \sqrt{x}(\cos\frac{1}{2}\ln x \pm i \sin\frac{1}{2}\ln x)
$$

— ∞ раз обращается в 0.

6 Положения равновесия.

Источник.

6.1 Узел — $\lambda_1 \neq \lambda_2 \in \mathbb{R}$ одного знака.



а) б)

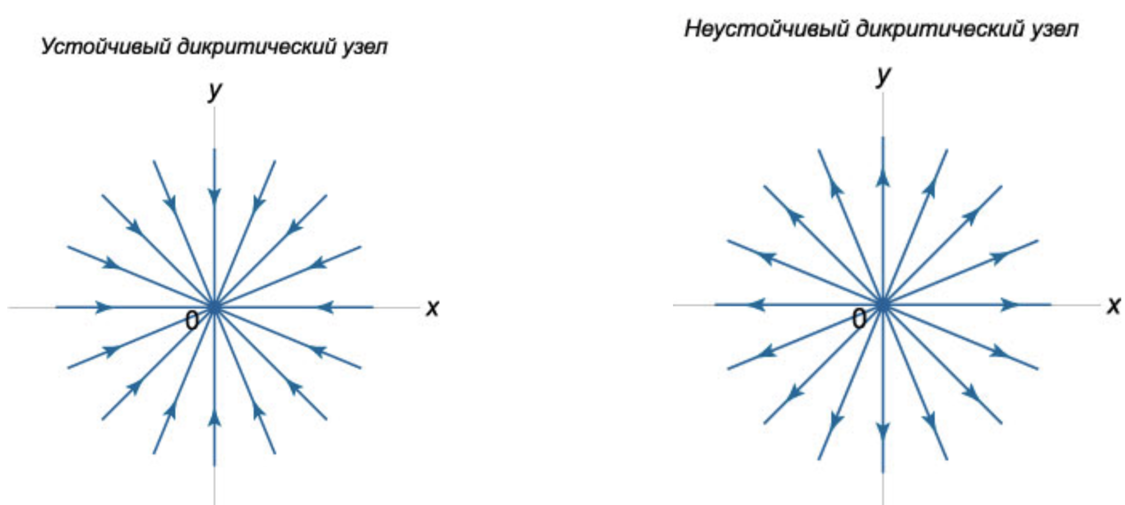
Рис. 1:

V_1 и V_2 — собственные векторы, коответствующие собственным значениям $|\lambda_1| < |\lambda_2| \in \mathbb{R}$

Узел является ассимптотически устойчивым, если $\lambda_1 < 0$ и $\lambda_2 < 0$.

Заметим, что в случае как устойчивого, так и неустойчивого узла фазовые траектории касаются прямой, которая направлена вдоль собственного вектора, соответствующего меньшему по абсолютной величине собственному значению λ.

6.2 Дикритический узел — $\lambda_1 = \lambda_2 \neq 0 \in \mathbb{R}$, λ кратности 2.

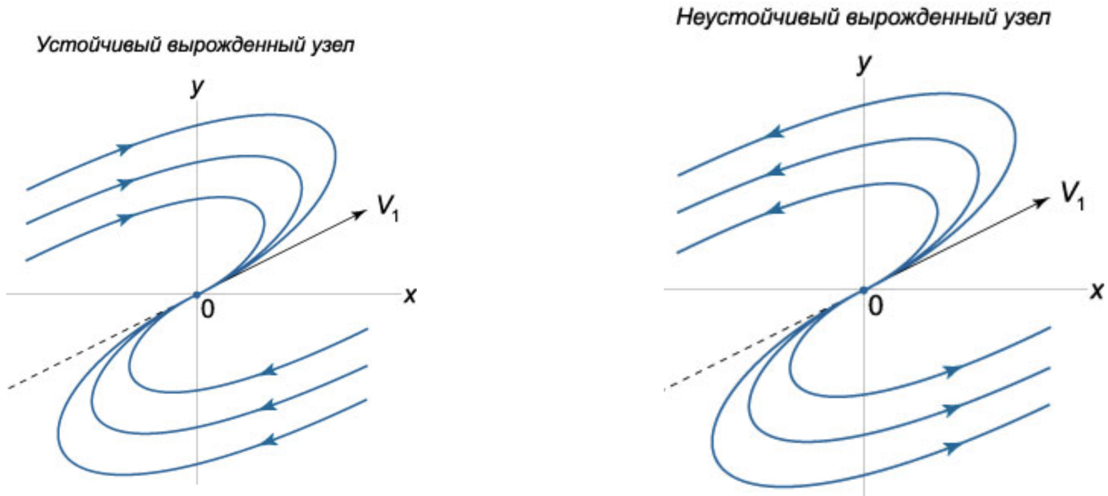


а) б)

Рис. 2:

При $\lambda < 0$ — устойчивый.

6.3 Вырожденный узел — $\lambda_1 = \lambda_2 \neq 0 \in \mathbb{R}$, λ кратности 1



а)

б)

Рис. 3:

Матрица A имеет лишь один собственный вектор V_1, второй собственный вектор ищется как присоединенный к V_1.

При $\lambda < 0$ — устойчивый.

6.4 Седло — $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ разных знаков, не равны 0.

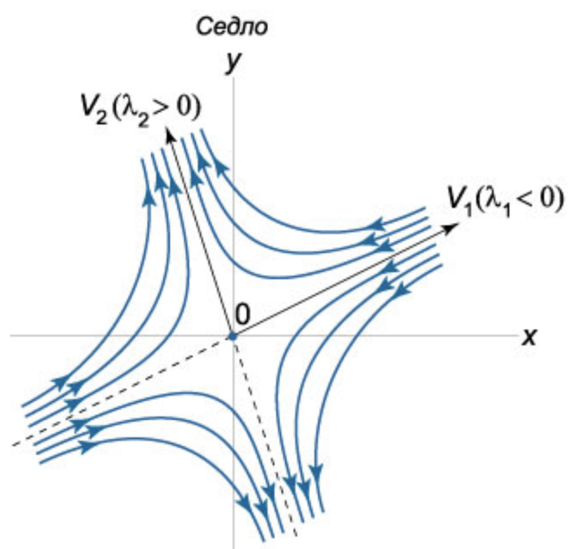


Рис. 4:

Прямые, направленные вдоль векторов V_1, V_2 называются сепаратиссами, и являются ассимптотами для остальных фазовых траекторий, имеющих форму *гипербол*.

Определение направления:

- Если прямая связана с $\lambda < 0$, то движение вдоль нее направлено **к положению равновесия**.
- Если прямая связана с $\lambda > 0$, то направление **от положения равновесия**.

6.5 Фокус — $\lambda_{1,2} \in \mathbb{C}$; $Re\lambda_1 = Re\lambda_2 \neq 0$.

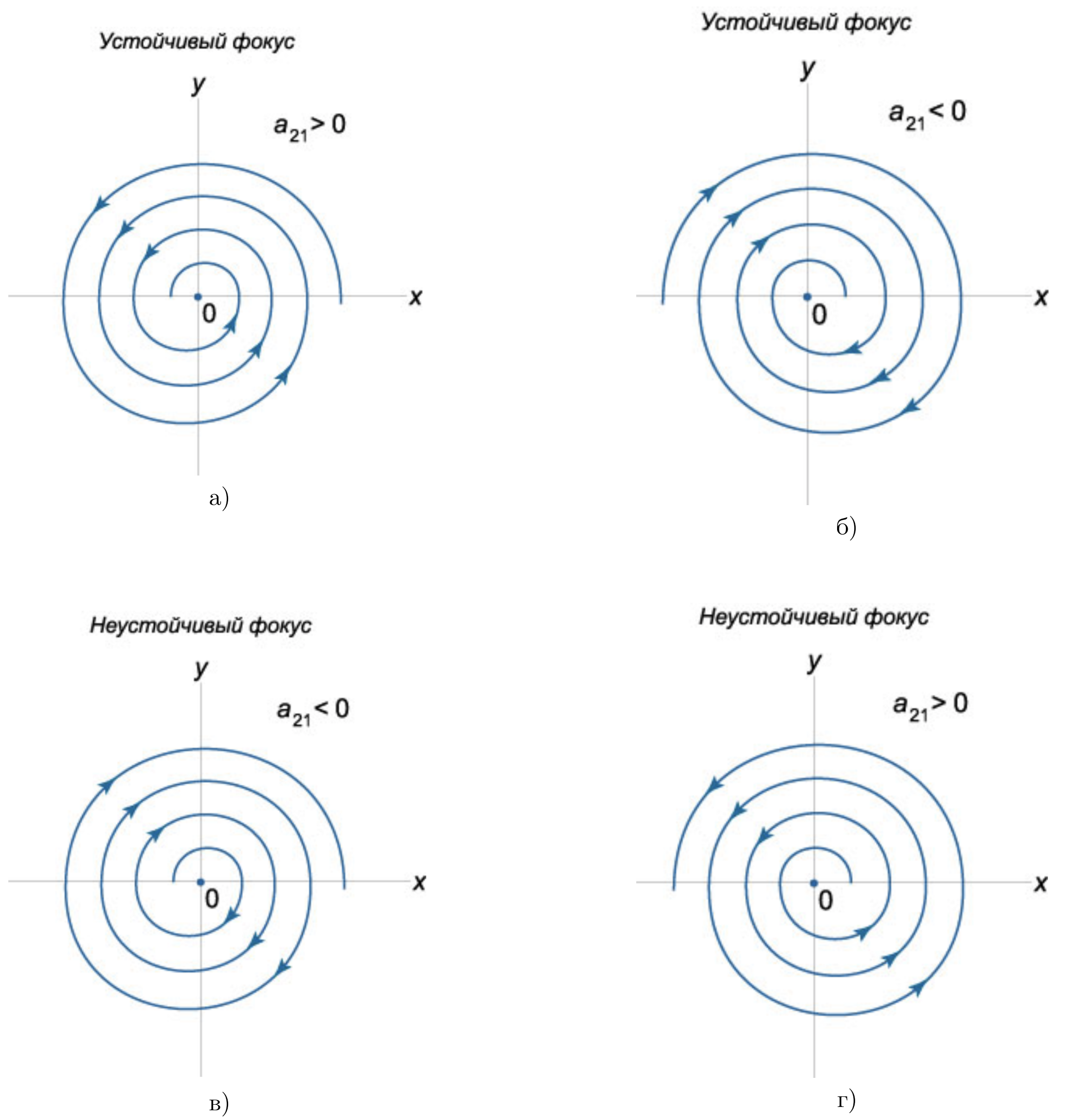
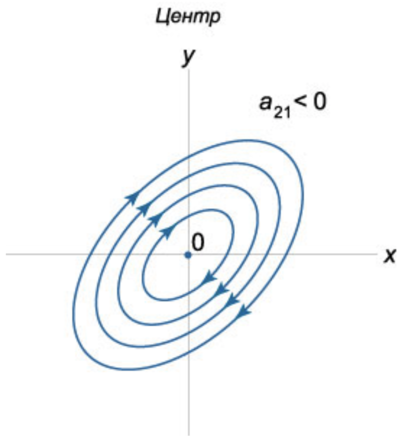


Рис. 5:

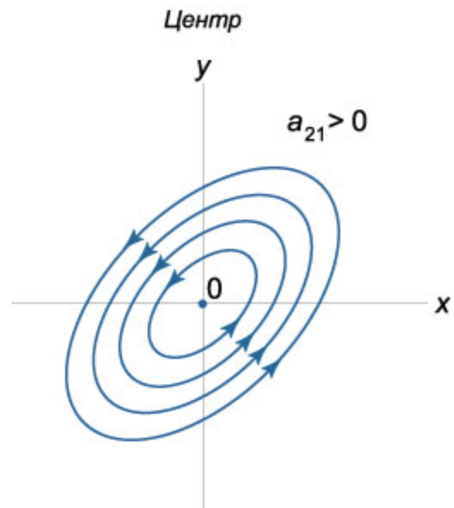
- При $Re\lambda < 0$, спирали будут закручиваться, приближаясь к началу координат. Такое положение равновесия называется **устойчивым фокусом**.
- При $Re\lambda > 0$ — **неустойчивый фокус**.

Где $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ — матрица системы.

6.6 Центр — $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$; $Re\lambda_1 = Re\lambda_2 = 0$ — Устойчивое по Ляпунову.



а)



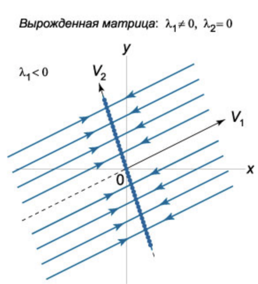
б)

В случае центра фазовые траектории представляют собой формально спирали при $Re\lambda = 0$, то есть эллипсы.

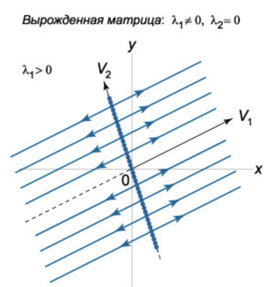
Направление вращения определяется знаком $a_2 1$.

6.7 Вырожденная матрица — $det(A) = 0$.

Если матрица является вырожденной, то у нее одно или оба собственных значения равны нулю. При этом возможны следующие частные случаи:



а)



б)

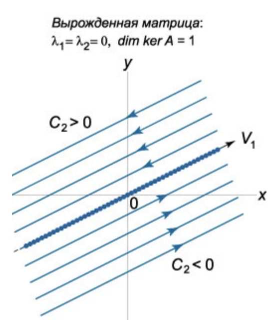


Рис. 6:

7 Линеаризация систем

7.1 Алгоритм линеаризации

Пусть есть система:

$$\begin{cases} \dot{x} = f_1(x, y), \\ \dot{y} = f_2(x, y). \end{cases}$$

1. Найти положения равновесия, то есть разрешить систему $\begin{cases} f_1(x, y) = 0, \\ f_2(x, y) = 0. \end{cases}$.
2. Пусть набор $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, ...$ — набор положений равновесия.
3. Для каждого положения равновесия:
   (a) Сделать замену: $\begin{cases} U = x - x_i, \\ V = y - y_i \end{cases}$ и подставить в исходную систему, получив $\begin{cases} \dot{U} = f_{1_i}(U, V), \\ \dot{V} = f_{2_i}(U, V). \end{cases}$
   (b) Разложить функции $f_{1_i}(U, V)$ и $f_{2_i}(U, V)$ в точке $(0, 0)$, избавляясь в процессе разложения от степеней выше 1, то есть $U^2 + U + 3V \longrightarrow U + 3V$.
   (c) В результате предыдущего шага получим систему $\begin{cases} \dot{U} = a_{11}U + a_{12}V, \\ \dot{V} = a_{21}U + a_{22}V. \end{cases}$, матрица данной системы: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$.
   (d) Найти собственные значения λ_1, λ_2 матрицы A. И, если необходимо, найти собственные векторы:
      i. Для каждого собственного значения λ_i разрешить систему: $\begin{pmatrix} a_{11} - \lambda_i & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} - \lambda_i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 0$.
      ii. (Для тех, кто разучился к ГОС-у перемножать матрицы): $\begin{cases} v_1(a_{11} - \lambda_i) + v_2 a_1 2 = 0, \\ v_1 a_{12} + v_2(a_{22} - \lambda_i) = 0. \end{cases}$
   (e) Построить фазовую траекторию, с положением равновесия $U = V = 0$.
   (f) Построить фазовую траекторию в изначальных координатах (x, y), то есть сдвинуть то, что получилось на предыдущем шаге на x_i единиц вправо и y_i единиц вверх.

7.2 Разложение по Маклорену

1. $\mathbf{ln(1+x)} \longrightarrow x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - ....$
2. $\mathbf{arcsin(x)} \longrightarrow x + \frac{x^3}{6} + 3\frac{x^5}{40} + ...$
3. $\mathbf{e^x} \longrightarrow 1 + x + \frac{x^2}{2} + ...$
4. $\mathbf{(1+x)}^\alpha \longrightarrow 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + ...$
5. $\mathbf{sin(x)} \longrightarrow x - \frac{x^3}{6} + ...$
6. $\mathbf{tg(x)} \longrightarrow x + \frac{x^3}{3} + ...$
7. $\mathbf{arccos(x)} \longrightarrow \frac{\pi}{2} - arcsin(x)$
8. $\mathbf{arctg(x)} \longrightarrow x - \frac{x^3}{3} + ...$
9. $\mathbf{sh(x)} \longrightarrow x + \frac{x^3}{6} + ...$
10. $\mathbf{th(x)} \longrightarrow x - \frac{x^3}{3} + ...$
11. $\mathbf{arcsh(x)} \longrightarrow x - \frac{x^3}{6} + ...$
12. $\mathbf{arcth(x)} \longrightarrow x + \frac{x^3}{3} + ...$

8 Некоторые типы дифференциальных уравнений.

8.1 Уравнение Бернулли (I порядок).

$$y' + a(x)y = b(x)y^m, \tag{7}$$

где $a(x)$ и $b(x)$ — непрерывные функции. Если $m = 0$, то имеем дело с линейным дифференциальным уравнением, если $m = 1$, то преобразуется в уравнение с разделяющимися переменными.

В общем случае, когда $m \neq 0$, уравнение Бернулли сводится к линейному дифференциальному уравнению с помощью подстановки:

$$z = y^{1-m}.$$

8.2 Уравнение Риккати (I порядок).

$$y' + b(x)y + d(x)y^2 = f(x), \tag{8}$$

где $b(x), d(x), f(x)$ — непрерывные функции.

Алгоритм решения уравнений Риккати:

1. Найти некоторое частное решение уравнения y_1.
2. Тогда искомым решением будет $y = y_1 + U$, следовательно, задача свелась к поиску U.
3. Подставляем в исходное выражение вместо y и y' выражения $(y_1 + U)$ и $(y_1 + U)'$, и получаем уравнение Бернулли (7).
4. Находим из него U и подставляем в выражение для общего решения.

8.3 Уравнение Эйлера (II порядок).

$$x^2y'' + Axy' + By = 0, \; x > 0, \tag{9}$$

Данное уравнение можно свести к линейному дифференциальному уравнению с постоянными коэффициентами с помощью замены $x = e^t$, в этом случае:

$$y'_x = e^{-t}y'_t,$$
$$y''_{xx} = e^{-2t}(y''_{tt} - y'_t).$$

Подставляя в исходное уравнение, имеем:

$$y''_{tt} + (A-1)y'_t + By = 0.$$

9 Первые интегралы

9.1 Поиск первых интегралов.

Пусть в области $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ задана автономная система дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x} = f_1(x, y, z), \\ \dot{y} = f_2(x, y, z), \\ \dot{z} = f_3(x, y, z). \end{cases} \tag{10}$$

Решения системы 10 можно найти с помощью *первых интегралов*:

Определение (ПИ)

Непрерывно дифференцируемая в области Ω функция $U(x, y, z)$ называется *первым интегралом* системы (10), если $U(\overrightarrow{\varphi}(t)) \equiv Const$ (то есть первый интеграл постоянен вдоль каждой фазовой траектории).

Критерий ПИ

Непрерывно дифференцируемая функция $U(x, y, z)$ является первым интегралом системы (10) $\iff \forall (x, y, z) \in \Omega$ выполнено

$$\frac{\partial U}{\partial x} f_1 + \frac{\partial U}{\partial y} f_2 + \frac{\partial U}{\partial z} f_3 = 0. \tag{11}$$

Количество независимых *ПИ* системы

Если точка $a \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$ не является положением равновесия автономной системы, то в ее окрестности существует $\mathbf{n-1}$ независимых первых интегралов.

Поиск *ПИ*

При поиске ПИ применяется так называемый метод интегрирующих комбинаций, который заключается в том, что мы, "глядя"на функции, стоящие в правых частях уравнений, пытаемся подобрать такую комбинацию этих уравнений, которая позволяла бы выделить функции, являющиеся производными от более сложных функций.

Перечислим некоторые способы такого поиска:

1. Запись системы (10) в *симметричном виде*:

$$dt = \frac{dx}{f_1} = \frac{dy}{f_2} = \frac{dz}{f_3}. \tag{12}$$

2. *Свойство равных дробей.* Так как $dx = f_1 dt$, а $dy = f_2 dz$, то $dx + dy = (f_1 + f_2)dt$, из этого принципа вытекает:

$$dt = \frac{d(x+y)}{(f_1+f_2)} = \frac{d(x-y)}{(f_1-f_2)} = \frac{d(x+y+z)}{(f_1+f_2+f_3)} = \dots \tag{13}$$

3. Пусть найден U_1 для системы (12). Тогда при поиске U_2, можно использовать выражение, полученное для U_1, считая его константой, а затем, подставить выражение для U_1 в полученное выражение для U_2.

Пример 1

$$\begin{cases} \dot{x} = z - x + 3y, \\ \dot{y} = z + x - 3y, \\ \dot{z} = -2z. \end{cases}$$

1. Сложим три уравнения: $\dot{x} + \dot{y} + \dot{z} = 0$, следовательно $\boxed{x + y + z = Const = U_1}$.

2. Заметим, что $dt = \frac{d(x-3y+z)}{-4(x-3y+z)} = \frac{dz}{-2z}$, проинтегрировав, получим: $2\ln z = \ln(x - 3y + z) + Const$, значит $\boxed{U_2 = \dfrac{z^2}{x-3y+z}}$.

Пример 2

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x^2z^2 + x, \\ \dot{y} = -4xyz^2 + y, \\ \dot{z} = -4xz^3 + z. \end{cases}$$

1. Выпишем первое и третье уравнения и перемножим их "крест накрест":

$$\frac{dx}{2x^2z^2 + x} = \frac{dz}{z - 4xz^3} \quad \Longrightarrow \quad zdx - 4xz^3dx - 2x^2z^2dz - xdz = 0 \Big| : z^2$$

$$\frac{dx}{dz} - \frac{x}{z^2} - 2(2xzdx + x^2dz) = 0 \quad \Longrightarrow \quad d\left(\frac{x}{z}\right) + d(-2x^2z) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\frac{x}{z} - 2x^2z = Const = U_1}.$$

2. Выпишем второе и третье уравнения и сократим общую часть в знаменателе:

$$\frac{dy}{y(-4xz^2+1)} = \frac{dz}{z(-4xz^2+1)} \quad \Longrightarrow \quad \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z} \quad \Longrightarrow \quad y = z \cdot Const \quad \Longrightarrow \quad \boxed{U_2 = \frac{z}{y}}.$$

Пример 3

$$\begin{cases} \dot{x} = 2xy, \\ \dot{y} = 1 - y^2 - 2xz, \\ \dot{z} = -\frac{y}{x}. \end{cases}$$

1. Выпишем 1 и 3 уравнения, сократим общую часть в знаменателе:

$$\frac{dx}{2xy} = \frac{xdy}{-y} \quad \Longrightarrow \quad \frac{dx}{x^2} = -2dz \quad \Longrightarrow \quad -\frac{1}{x} = -2z + Const \quad \Longrightarrow \quad \boxed{2z - \frac{1}{x} = U_1}.$$

2. Преобразуем второе уравнение, учитывая, что $2xz = U_1x + 1$:

$$\frac{dy}{1 - y^2 - (U_1x + 1)} \quad \Longrightarrow \quad -y^2dx - U_1xdx = 2xydy \quad \Longrightarrow \quad d(y^2x) + d\left(\frac{U_1x^2}{2}\right) = 0$$

$$U_2 = y^2x + U_1\frac{x^2}{2} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{U_2 = y^2x + zx^2 - \frac{x}{2}}.$$

9.2 Линейные однородные уравнения в частных производных первого порядка.

Пусть задана система

$$\begin{cases} f_1\frac{\partial U}{\partial x} + f_2\frac{\partial U}{\partial y} + f_3\frac{\partial U}{\partial z} = 0, \\ U = F_1, \quad \text{при } F_2 = 0. \end{cases} \tag{14}$$

Алгоритм решения

1. Выписать характеристическую систему

$$\begin{cases} \dot{x} = f_1, \\ \dot{y} = f_2, \\ \dot{z} = f_3. \end{cases}$$

2. Найти два первых интеграла U_1 и U_2 для этой системы (поиск ПИ: 9.1).

3. Общим решением (14) будет:

$$U = F(U_1, U_2), \text{ где } F \text{ — произвольная непрерывно дифференцируемая функция.}$$

4. Затем, из системы ниже нужно выразить x, y и z через U_1 и U_2 и подставить в выражение $U = F_1$ (второе уравнение системы 14). После того, как мы получим выражение U через U_1 и U_2 (избавившись от x, y и z), нужно подставить выражения для $U_1(x, y, z)$ и $U_2(x, y, z)$ в $U(U_1, U_2)$.

$$\begin{cases} \ldots = U_1, \\ \ldots = U_2, \\ F_2 = 0. \end{cases}$$

Получившееся выражение $U(x, y, z)$ и будет являтся решением задачи Коши (14).

Пример 1

$$\begin{cases} (z - x + 3y)\frac{\partial U}{\partial x} + (z + x - 3y)\frac{\partial U}{\partial y} - 2z\frac{\partial U}{\partial z} = 0, \\ U = \frac{4y}{z}, \text{ при } x - 3y = 0. \end{cases}$$

1. Выпишем характеристическую систему и найдем первые интегралы (поиск первых интегралов данной системы тут: 9.1).
2. Общим решением будет
$$U = F(U_1, U_2) = F\left(x + y + z, \frac{z^2}{x - 3y + z}\right).$$
3. Решим задачу Коши:
   (a) Выразим x, y, z через U_1 и U_2 из системы:
   $$\begin{cases} x + y + z = U_1, \\ \frac{z^2}{x-3y+z} = U_2, \\ x - 3y = 0. \end{cases}$$
   (b) Получим: $y = \frac{1}{4}(U_1 - U_2)$ и $z = U_2$. Подставим найденные выражения в $U(x, y, z) = \frac{4y}{z}$ и получим $U(U_1, U_2)$:
   $$U = \frac{4y}{z} = \frac{U_1 - U_2}{U_2}.$$
   (c) Подставим в полученное выражение $U_1(x, y, z)$ и $U_2(x, y, z)$ (рнайденные на шаге 1) и получим ответ.

10 Вариационное исчисление

10.1 Алгоритм решения варианционной задачи

Рассмотрим функционал

$$J(y) = \int\limits_a^b F(x, y, y')dx, \tag{15}$$

где $a < b \in \mathbb{R}$ — заданные числа, а $F(x, y, y')$ — заданная вещественнозначная непрерывно дифференцируемая функция $\forall x \in [a, b]$ $\forall y \in (-\infty, +\infty)$ $\forall y' \in (-\infty, +\infty)$.

Решим простейшую вариационную задачу:

$$\begin{cases} J(y) = \int\limits_a^b F(x, y, y')dx, \\ y(a) = c_1, \\ y(b) = c_2. \end{cases} \tag{16}$$

1. Сначала нужно найти $y(x)$ (то есть найти экстремаль $y(x)$) из уравнения

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} = 0, \tag{17}$$

причем $\frac{\partial F}{\partial y'}$ ищется при условии того, что y' свободная переменная (то же самое и с y). При нахождении $\frac{d}{dx}$ считаем, что $y' = y'(x)$, $y = y(x)$.

Чаще всего при решении возникает либо линейное уравнение с постоянными (переменными) коэффициентами, либо уравнение Эйлера (решение уравнения Эйлера тут: 8.3).

2. После того, как выражена экстремаль $y(x)$, нужно найти допустимую экстремаль. Для этого нужно найти константы C_1 и C_2 (которые будут сидеть в выражении для $y(x)$) из граничных условий: $\begin{cases} y(a) = c_1, \\ y(b) = c_2 \end{cases}$ (c_1 и c_2 — заданные в условии числа). Допустимую экстремаль принято обозначать $\hat{y}$.

3. Далее нужно выяснить, дает ли экстремаль $\hat{y}$ минимум, максимум или не является экстремумом вовсе. Для этого нужно определить знак выражения $\Delta J = J(\hat{y} + h) - J(\hat{y})$, где h — произвольная непрерывно дифференцируемая функция на отрезке $[a, b]$, такая, что $h(a) = h(b) = 0$.

Бывает удобно записать ΔJ в виде:

$$\Delta J = \underbrace{\delta J(\hat{y}, h)}_{=0} + \int\limits_a^b F(x, h, h')dx.$$

Так же удобно пользоваться результатом следующего интегрирования по частям:

$$\int\limits_a^b f(x)hh'dx = \underbrace{f(x)\frac{h^2}{2}\Bigg|_a^b}_{=0} - \int\limits_a^b \frac{h^2}{2}f'(x)dx.$$

Иногда полезен следующий результат:

$$\int\limits_a^b h^2(x)dx \leqslant \frac{(b-a)^2}{4}\int\limits_a^b (h')^2dx.$$

4. В случае, если требуется показать, что ΔJ дает разные знаки для разных допустимых h, бывает полезен прием представления h в виде тригонометрической функции, такой, что $h(a) = h(b) = 0$ (пример будет разобран ниже).

5. (**Задача со свободным концом**) В случае, если нужно решить задачу со свободным концом (то есть отсутствием одного граничного условия), то недостающим "граничным"условием, для нахождения констант C_1 и C_2 будет выступать условие:

$$\left.\frac{\partial F}{\partial y'}\right|_{x=b} = 0, \text{ если отсутствует граничное условие на y(b),}$$

$$\left.\frac{\partial F}{\partial y'}\right|_{x=a} = 0, \text{ если отсутствует граничное условие на y(a),}$$

Либо, если граничные условия отсутствуют вообще (задача со свободными концами), то константы находятся из условия

$$\left.\frac{\partial F}{\partial y'}\right|_{x=a} = \left.\frac{\partial F}{\partial y'}\right|_{x=b} = 0.$$

Пример

Показать, что допустимая экстремаль не дает экстремума функционала

$$\begin{cases} J(y) = \int\limits_0^\pi \left[(y')^2 - \frac{9}{4}y^2 + 18y\right] dx, \\ y(0) = 4, \\ y(\pi) = 0. \end{cases}$$

1. Найдем экстремаль:
   - $\frac{\partial F}{\partial y} = -\frac{9}{2}y + 18,$
   - $\frac{\partial F}{\partial y'} = 2y',$
   - $\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} = 2y''$

   $$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 4y'' + 9y = 36$$

   Решением однородного будет $y = C_1 \sin\frac{3}{2}x + C_2\cos\frac{3}{2}x$. Частным решением, очевидно, будет являтся $y_{ч.} = 4$. Следовательно:

   $$y = C_1 \sin\frac{3}{2}x + C_2\cos\frac{3}{2}x + 4.$$

2. Найдем допустимую экстремаль:

   $$\begin{cases} y(0) = 4, \\ y(\pi) = 0. \end{cases} \quad \Longrightarrow \begin{cases} C_2 + 4 = 0, \\ -C_1 + 4 = 0. \end{cases} \quad \Longrightarrow \begin{cases} C_1 = 4, \\ C_2 = -4. \end{cases}$$

   Следовательно:

   $$\boxed{\hat{y} = 4\sin\frac{3}{2}x - 4\cos\frac{3}{2}x + 4} \text{ — допустимая экстремаль.}$$

3. Исследуем функционал на экстремум:

   $$\Delta J = \underbrace{\delta J(\hat{y}, h)}_{=0} + \int\limits_0^\pi \left[(h')^2 - \frac{9}{4}h^2\right] dx.$$

   Покажем, что ΔJ меняет свой знак в зависимости от h. Для отрезка $[0, \pi]$ удобнее всего взять тригонометрическую функцию, образующую ноль но концах отрезка. Такой функцией будет $h = \sin kx$, $k \in \mathbb{N}$.

Тогда

$$\Delta J = \int\limits_0^\pi \left[k^2\cos^2 kx - \frac{9}{4}\sin^2 kx\right]dx = \int\limits_0^\pi \left[k^2\left(\frac{1+\cos 2kx}{2}\right) - \frac{9}{4}\left(\frac{1-\cos 2kx}{2}\right)\right]dx$$

$$\Delta J = \int\limits_0^\pi \frac{1}{2}(k^2 - \frac{9}{4})dx = \frac{\pi}{2}(k^2 - \frac{9}{4}).$$

Таким образом, если $k^2 > \frac{9}{4}$, то $\Delta J > 0$, а если $k^2 < \frac{9}{4}$, то $\Delta J < 0$. Следовательно экстремума нет.

10.2 Функционалы, зависящие от двух функций.

Рассматривается задача нахождения слвбого экстремума

$$J(y_1, y_2) = \int\limits_a^b F[x, y_1(x), y_2(x), y_1'(x), y_2'(x)]dx, \tag{18}$$

, где F — заданная непрерывно дифференцируемая функция своих аргументов, в классе непрерывно дифференцируемых пар функций $y_1(x)$, $y_2(x)$ на отрезке $[a, b]$. Причем функции удовлетворяют граничным условиям:

$$\begin{cases} y_1(a) = A_1, \\ y_2(a) = A_2, \\ y_1(b) = B_1, \\ y_2(b) = B_2, \end{cases} \tag{19}$$

, где A_1, A_2, B_1, B_2 — заданные в условии числа.

В этом случае экстремали $y_1(x)$ и $y_2(x)$ находятся из системы

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial y_1} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y_1'} = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial y_2} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y_2'} = 0. \end{cases}$$

Допустимые экстремали $\hat{y_1}$ и $\hat{y_2}$ находятся из граничных условий (19).

10.3 Функционалы, содержащие производные второго порядка.

Рассматривается задача нахождения слабого экстремума

$$J(y) = \int\limits_a^b F[x, y(x), y'(x), y''(x)]dx, \tag{20}$$

, где F — заданная трижды дифференцируемая функция своих аргументов, в классе дважды непрерывно дифференцируемых функций $y(x)$ на отрезке $[a, b]$, удовлетворяющих граничным условиям:

$$\begin{cases} y(a) = A_1, \\ y'(a) = A_2, \\ y(b) = B_1, \\ y'(b) = B_2, \end{cases} \tag{21}$$

, где A_1, A_2, B_1, B_2 — заданные в условии числа.

В каком виде искать частное решение линейного неоднородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами $y''+py'+qy=f(x)$?

После долгих раздумий я принял решение создать отдельную справочную таблицу для подбора частного решения неоднородного ДУ. В методический материал сведены практически все типовые ситуации, которые могут встретиться на практике, кроме того, приведены случаи подбора частного решения для уравнений повышенной сложности.

Как всегда объяснения ведутся на конкретных примерах с минимумом формул и параметров. **Обязательно прочитайте выводы на последней странице!!!**

I. Характеристическое уравнение имеет два различных действительных корня, отличных от нуля.

Пример: Рассмотрим неоднородное уравнение $y''+y'-2y=f(x)$
Для соответствующего однородного уравнения $y''+y'-2y=0$ составим характеристическое уравнение $\lambda^2+\lambda-2=0$ и найдём его корни: $\lambda_1=-2,\ \lambda_2=1$

Итак, получены различные действительные корни, среди которых нет нуля.

Правая часть $f(x)$	**В каком виде нужно искать частное решение** $\tilde{y}$ **неоднородного уравнения?**
1. $f(x)=4$ (или другая ненулевая константа)	$\tilde{y}=A$
2. $f(x)=3x-1$	$\tilde{y}=Ax+B$
3. $f(x)=x^2-x$	$\tilde{y}=Ax^2+Bx+C$
4. $f(x)=4x^3+3x^2+1$	$\tilde{y}=Ax^3+Bx^2+Cx+D$

Примечание: обратите внимание, что когда в правой части $f(x)$ находится неполный многочлен, то частное решение подбирается без пропусков степеней, пример: $f(x)=-5x$
Это многочлен первой степени, и в нём отсутствует константа. Однако при подборе частного решения константу пропускать нельзя, то есть частное решение необходимо искать в виде $\tilde{y}=Ax+B$

5. $f(x)=2e^{3x}$	Коэффициент в показателе экспоненты: $e^{\boxed{3}x}$ не совпадает с корнем характеристического уравнения $\lambda_1=-2$ или $\lambda_2=1$ Подбор выполняем очевидным образом: $\tilde{y}=Ae^{3x}$
6. $f(x)=(2x-3)e^{-x}$	Коэффициент в показателе экспоненты: $e^{\boxed{-1}\cdot x}$ не совпадает с корнем характеристического уравнения $\lambda_1=-2$ или $\lambda_2=1$ Подбор выполняем очевидным образом: $\tilde{y}=(Ax+B)e^{-x}$
7. $f(x)=\frac{x}{2}e^{-2x}$	Коэффициент в показателе экспоненты: $e^{\boxed{-2}x}$ **совпал** с корнем характеристического уравнения $\lambda_1=-2$. В подобной ситуации «штатный» подбор $\tilde{y}=(Ax+B)e^{-2x}$ нужно домножить на «икс»: $\tilde{y}=x(Ax+B)e^{-2x}$, то есть, искать частное решение в виде: $\tilde{y}=(Ax^2+Bx)e^{-2x}$

<table>
<tr><td>8. $f(x)=e^{x}$</td><td>Коэффициент в показателе экспоненты: $e^{\boxed{1}\cdot x}$ совпал с корнем характеристического уравнения $\lambda_2=1$. Аналогично: «штатный» подбор $\tilde{y}=Ae^{x}$ домножаем на «икс»: $\tilde{y}=x\cdot Ae^{x}$, то есть ищем частное решение в виде:
$\tilde{y}=Axe^{x}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Примечание: обратите внимание, что опять же в случае неполных многочленов <u>степени не теряются</u>, например, если $f(x)=7x^2e^{5x}$ (в многочлене отсутствует «икс» в первой степени и константа), то частное решение следует искать в виде $\tilde{y}=(Ax^2+Bx+C)e^{5x}$.
Если $f(x)=(1-x^2)e^{-2x}$ (в многочлене отсутствует «икс» в первой степени), то частное решение ищем в виде $\tilde{y}=x(Ax^2+Bx+C)e^{-2x}=(Ax^3+Bx^2+Cx)e^{-2x}$</td></tr>
<tr><td>9. $f(x)=\sin x$</td><td>$\tilde{y}=A\cos x+B\sin x$</td></tr>
<tr><td>10. $f(x)=-3\cos 2x$</td><td>$\tilde{y}=A\cos 2x+B\sin 2x$</td></tr>
<tr><td>11. $f(x)=2\cos 3x-4\sin 3x$</td><td>$\tilde{y}=A\cos 3x+B\sin 3x$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Примечание: в подборе частного решения всегда должен присутствовать <u>и синус и косинус</u> (даже если в правую часть $f(x)$ входит только синус или только косинус).
Редко, но встречаются следующие похожие случаи:</td></tr>
<tr><td>12. $f(x)=-x\sin 5x$</td><td>$\tilde{y}=(Ax+B)\cos 5x+(Cx+D)\sin 5x$</td></tr>
<tr><td>13. $f(x)=(x-1)\cos\dfrac{x}{2}$</td><td>$\tilde{y}=(Ax+B)\cos\dfrac{x}{2}+(Cx+D)\sin\dfrac{x}{2}$</td></tr>
<tr><td>14. $f(x)=x\cos x+2\sin x$</td><td>$\tilde{y}=(Ax+B)\cos x+(Cx+D)\sin x$</td></tr>
<tr><td colspan="2">И заключительные примеры, здесь тоже всё прозрачно:</td></tr>
<tr><td>15. $f(x)=2e^{x}\sin 2x$</td><td>$\tilde{y}=e^{x}(A\cos 2x+B\sin 2x)$</td></tr>
<tr><td>16. $f(x)=\dfrac{1}{3}e^{-3x}\sin x$</td><td>$\tilde{y}=e^{-3x}(A\cos x+B\sin x)$</td></tr>
<tr><td>17. $f(x)=e^{-2x}(5\sin 3x-\cos 3x)$</td><td>$\tilde{y}=e^{-2x}(A\cos 3x+B\sin 3x)$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Примечание: в примерах 15-17 хоть и есть экспонента, но корни характеристического уравнения $\lambda_1=-2,\ \lambda_2=1$ нас уже совершенно не волнуют – подбор частного решения идёт штатным образом без всяких домножений на «икс».</td></tr>
</table>

II. Характеристическое уравнение имеет два различных действительных корня, один из которых равен нулю.

Такой диффур имеет вид $y'' + py' = f(x)$.
Пример: Рассмотрим подопытное неоднородное уравнение $y'' + 3y' = f(x)$.
Для соответствующего однородного уравнения $y'' + 3y' = 0$ составим характеристическое уравнение $\lambda^2 + 3\lambda = 0$ и найдем его корни: $\lambda_1 = -3, \lambda_2 = 0$

Получены различные действительные корни, один из которых равен нулю.

Правая часть $f(x)$	**В каком виде нужно искать частное решение** $\tilde{y}$ **неоднородного уравнения?**
Правило: Если в правой части $f(x)$ находится ненулевая константа или многочлен, и один из корней характеристического уравнения равен нулю, то «очевидный» подбор частного решения необходимо домножить на «икс»:	
18. $f(x) = -10$	$\tilde{y} = x \cdot A$, то есть частное решение ищем в виде $\tilde{y} = Ax$
19. $f(x) = -2x$	$\tilde{y} = x \cdot (Ax + B)$, т.е. частное решение ищем в виде $\tilde{y} = Ax^2 + Bx$
20. $f(x) = x^2 + 3$	$\tilde{y} = x \cdot (Ax^2 + Bx + C)$ или $\tilde{y} = (Ax^3 + Bx^2 + Cx)$
21. $f(x) = x^3$	$\tilde{y} = x \cdot (Ax^3 + Bx^2 + Cx + D)$ или $\tilde{y} = (Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx)$
Если **в правую часть входит экспонента или экспонента, умноженная на многочлен**, то подбор частного решения следует проводить по тем же принципам, по которым он проведён в примерах № 5-8. На всякий случай еще пара примеров:	
22. $f(x) = (x^2 + 2x)e^{3x}$	Коэффициент в показателе экспоненты: $e^{\boxed{3}x}$ не совпадает с корнем характеристического уравнения $\lambda_1 = -3$ $\tilde{y} = (Ax^2 + Bx + C)e^{3x}$
23. $f(x) = (1 - x)e^{-3x}$	Коэффициент в показателе экспоненты: $e^{\boxed{-3}x}$ **совпал** с корнем характеристического уравнения $\lambda_1 = -3$. Поэтому «обычный» подбор $\tilde{y} = (Ax + B)e^{-3x}$ нужно домножить на «икс»: $\tilde{y} = x(Ax + B)e^{-3x}$, то есть, искать частное решение в виде: $\tilde{y} = (Ax^2 + Bx)e^{-3x}$
Если правая часть $f(x)$ имеет вид из примеров № 9-17, то подбор осуществляется точно так же, как уже разобрано – в штатном режиме см. Раздел I.	

Дополнительный пример:

Рассмотрим дифференциальное уравнение третьего порядка: $y''' - y'' = f(x)$. Для соответствующего однородного уравнения $y''' - y'' = 0$ составим характеристическое уравнение $\lambda^3 - \lambda^2 = 0$ и найдем его корни: $\lambda_{1,2} = 0, \lambda_3 = 1$.
Если получено **два кратных нулевых корня и в правой части** $f(x)$ **находится многочлен** (аналогично примерам № 18-21), то «штатный» подбор нужно домножать уже на x^2.
Например, если $f(x) = 3x$, то частное решение следует искать в виде:
$\tilde{y} = x^2 \cdot (Ax + B) = (Ax^3 + Bx^2)$

III. Характеристическое уравнение имеет два кратных действительных корня

Если эти корни равны нулю $\lambda_{1,2} = 0$, то речь идёт об уравнении $y'' = f(x)$, которое проще решить двукратным интегрированием правой части:
http://mathprofi.ru/differencialnye_uravnenija_dopuskajushie_ponizhenie_poryadka.html

Если же корни ненулевые, то выполняем подбор.

Пример: Рассмотрим неоднородное уравнение $y'' - 4y' + 4y = f(x)$.
Для соответствующего однородного уравнения $y'' - 4y' + 4y = 0$ составим характеристическое уравнение $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$ и найдем его корни: $\lambda_{1,2} = 2$

Получены кратные (совпавшие) действительные корни

Правая часть $f(x)$	**В каком виде нужно искать частное решение** $\tilde{y}$ **неоднородного уравнения?**
$f(x)$ – ненулевая константа или многочлен	Если $\lambda_{1,2} \neq 0$, то подбор частного решения следует осуществлять «штатным» способом точно так же, как в примерах № 1-4; если $\lambda_{1,2} = 0$, то «очевидный» подбор следует домножить на x^2 либо дважды проинтегрировать правую часть.
24. $f(x) = 5e^x$	Коэффициент в показателе экспоненты: $e^{\boxed{1}\cdot x}$ <u>не совпадает</u> с кратным корнем характеристического уравнения $\lambda_{1,2} = 2$ $\tilde{y} = Ae^x$
25. $f(x) = -2e^{2x}$	Коэффициент в показателе экспоненты: $e^{\boxed{2}x}$ **совпал** с кратным корнем характеристического уравнения $\lambda_{1,2} = 2$. Поэтому очевидный подбор $\tilde{y} = Ae^{2x}$ следует домножить на x^2: $\tilde{y} = x^2 \cdot Ae^{2x}$ и искать частное решение в виде: $\tilde{y} = Ax^2e^{2x}$
26. $f(x) = (5x-1)e^{2x}$	Коэффициент в показателе экспоненты: $e^{\boxed{2}x}$ **совпал** с кратным корнем характеристического уравнения $\lambda_{1,2} = 2$. Поэтому «штатный» подбор $\tilde{y} = (Ax+B)e^{2x}$ следует домножить на x^2: $\tilde{y} = x^2 \cdot (Ax+B)e^{2x}$, то есть искать частное решение в виде: $\tilde{y} = (Ax^3 + Bx^2)e^{2x}$

Если правая часть $f(x)$ имеет вид из примеров № 9-17, то подбор осуществляется обычным образом – см. Раздел I.

IV. Характеристическое уравнение имеет сопряженные комплексные корни: $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i$, причём $\alpha \neq 0,\ \beta \neq 0$

Пример: Рассмотрим неоднородное уравнение $y'' + 6y' + 10y = f(x)$.
Для соответствующего однородного уравнения $y'' + 6y' + 10y = 0$ составим характеристическое уравнение $\lambda^2 + 6\lambda + 10 = 0$ и найдем его корни: $\lambda_{1,2} = -3 \pm i$
Получены сопряженные комплексные корни с ненулевой действительной частью α.

Правая часть $f(x)$	**В каком виде нужно искать частное решение $\tilde{y}$ неоднородного уравнения?**
Подбор частного решения осуществляется очевидным образом (см. примеры № 1-6, 9-14) за исключением следующих видов правой части:	
27. $f(x) = 2e^{-3x}\sin 2x$	Проще всего объяснить так, берём правую часть и составляем сопряженные комплексные числа: $2e^{-3x}\sin 2x$ $-3 \pm 2i$ Полученные сопряженные комплексные числа $-3 \pm 2i$ <u>не совпадают</u> с корнями характеристического уравнения $\lambda_{1,2} = -3 \pm i$, поэтому частное решение следует искать в обычном виде: $\tilde{y} = e^{-3x}(A\cos 2x + B\sin 2x)$
28. $f(x) = 2e^{-3x}\cos x$	Составляем сопряженные комплексные числа: $2e^{-3x}\cos(1 \cdot x)$ $-3 \pm 1 \cdot i$ Составленные сопряженные комплексные числа $-3 \pm i$ **совпали** с корнями характеристического уравнения $\lambda_{1,2} = -3 \pm i$, поэтому «обычный» подбор частного решения следует домножить на «икс»: $\tilde{y} = x \cdot e^{-3x}(A\cos x + B\sin x)$ или: $\tilde{y} = e^{-3x}(Ax\cos x + Bx\sin x)$
29. $f(x) = e^{x}(5\cos x - 3\sin x)$	$e^{1x}(5\cos(1 \cdot x) - 3\sin(1 \cdot x))$ $1 \pm 1 \cdot i$ Составленные сопряженные комплексные числа $1 \pm i$ <u>не совпадают</u> с корнями характеристического уравнения $\lambda_{1,2} = -3 \pm i$, поэтому частное решение ищем в виде: $\tilde{y} = e^{x}(A\cos x + B\sin x)$

30. $f(x)=e^{-3x}(-\cos x+2\sin x)$	$e^{-3x}(-\cos(1\cdot x)+2\sin(1\cdot x))$ $-3\pm 1\cdot i$ Составленные сопряженные комплексные числа $-3\pm i$ **совпали** с корнями $\lambda_{1,2}=-3\pm i$, поэтому: $\tilde{y}=x\cdot e^{-3x}(A\cos x+B\sin x)=e^{-3x}(Ax\cos x+Bx\sin x)$

V. Характеристическое уравнение имеет сопряженные, чисто мнимые комплексные корни: $\lambda_{1,2}=\pm\beta i$

В таком диффуре отсутствует первая производная: $y''+qy=f(x)$

Пример: Рассмотрим неоднородное уравнение $y''+4y=f(x)$.
Для соответствующего однородного уравнения $y''+4y=0$ составим характеристическое уравнение $\lambda^2+4=0$ и найдем его корни: $\lambda_{1,2}=\pm 2i$

Получены чисто мнимые сопряженные комплексные корни:

Правая часть $f(x)$	**В каком виде нужно искать частное решение $\tilde{y}$ неоднородного уравнения?**
Подбор частного решения осуществляется очевидным «штатным» образом, за исключением следующих видов правой части:	
31. $f(x)=\sin x$	Коэффициент $\sin(\boxed{1}\cdot x)$ не совпадает с коэффициентом при характеристических сопряженных комплексных корнях $\pm\boxed{2}i$, поэтому частное решение ищем в обычном виде: $\tilde{y}=A\cos x+B\sin x$
32. $f(x)=-3\sin 2x$	Коэффициент $-3\sin\boxed{2}x$ **совпал** с коэффициентом при характеристических сопряженных комплексных корнях $\pm\boxed{2}i$, поэтому при подборе «штатное» частное решение необходимо домножить на «икс»: $\tilde{y}=x\cdot(A\cos 2x+B\sin 2x)$, то есть искать частное решение в виде: $\tilde{y}=Ax\cos 2x+Bx\sin 2x$
33. $f(x)=2\cos 3x-2\sin 3x$	Коэффициенты $2\cos\boxed{3}x-2\sin\boxed{3}x$ не совпадают с коэффициентом при характеристических сопряженных комплексных корнях $\pm\boxed{2}i$, поэтому частное решение ищем в обычном виде: $\tilde{y}=A\cos 3x+B\sin 3x$
34. $f(x)=2x\cos 2x-\sin 2x$	Коэффициенты $2x\cos\boxed{2}x-\sin\boxed{2}x$ **совпали** с коэффициентом при характеристических сопряженных комплексных корнях $\pm\boxed{2}i$, поэтому при подборе очевидное частное решение опять же домножаем на «икс»: $\tilde{y}=x\cdot((Ax+B)\cos 2x+(Cx+D)\sin 2x)$, или: $\tilde{y}=(Ax^2+Bx)\cos 2x+(Cx^2+Dx)\sin 2x$

35. $f(x) = -3x\cos 4x$	Коэффициент $-3x\cos \boxed{4}x$ не совпадает с коэффициентом при характеристических сопряженных комплексных корнях $\pm\boxed{2}i$, поэтому частное решение ищем в «штатном» виде: $\tilde{y} = (Ax+B)\cos 4x + (Cx+D)\sin 4x$

Краткие итоги по пяти разделам:

Тип корней характеристического уравнения	**Когда следует проявить ПОВЫШЕННОЕ ВНИМАНИЕ при подборе частного решения**
I. Характеристическое уравнение имеет два различных действительных корня, отличных от нуля	Если в правой части $f(x)$ находится экспонента или экспонента, умноженная на многочлен (примеры 5-8)
II. Характеристическое уравнение имеет два различных действительных корня, один из которых равен нулю	Если в правой части $f(x)$ находится константа, многочлен, экспонента или экспонента, умноженная на многочлен (примеры 18-23)
III. Характеристическое уравнение имеет два кратных действительных корня	Если в правой части $f(x)$ находится экспонента или экспонента, умноженная на многочлен (примеры 24-26)
IV. Характеристическое уравнение имеет сопряженные комплексные корни: $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i$, причём $\alpha \neq 0, \beta \neq 0$	Если в уравнении есть правые части, разобранные в примерах 27-30: $f(x) = 2e^{-3x}\sin 2x$, $f(x) = 2e^{-3x}\cos x$, $f(x) = e^{x}(5\cos x - 3\sin x)$ и т.п.
V. Характеристическое уравнение имеет сопряженные, чисто мнимые комплексные корни: $\lambda_{1,2} = \pm \beta i$	Когда в правой части находится синус, косинус или синус и косинус одновременно; либо данные функции, умноженные на многочлены (многочлен) (примеры 31-35)