Вопросы

1. Задача, приводящая к понятию дифференциального уравнения.
2. Основные понятия о дифференциальных уравнениях
3. Геометрическое истолкование задачи отыскания решения обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка, разрешенного относительно производной. Поле направлений. Интегральные кривые.
4. Постановка задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения.
5. Дифференциальные уравнения первого порядка с разделенными переменными.
6. Дифференциальные уравнения первого порядка с разделяющимися переменными.
7. Однородные дифференциальные уравнения первого порядка.
8. Уравнения, приводящиеся к однородным.
9. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка.
10. Уравнения Бернулли.
11. Дифференциальные уравнения в полных дифференциалах.
12. Интегрирующий множитель.
13. Дифференциальные уравнения высших порядков, допускающие понижение порядка.
14. Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.
15. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.
16. Задачи Коши и краевая задача для дифференциального уравнения n-го порядка.

Билет 1. Задача, приводящая к диф.уравнениям

Многие задачи естествознания приводят к нахождению неизвестных функций, описывающих рассматриваемые явления или процессы, когда известны соотношения, связывающие между собой эти функции и их производные. Такие соотношения называются *дифференциальными уравнениями.* В качестве иллюстрации рассмотрим следующие примеры.

Допустим, что в каждый момент времени t известна скорость точки, движущейся по оси Ox , где $f(t)$ – функция, непрерывная на

Кроме того, будем считать, что известна абсцисса $x0$ этой точки в некоторый определённый момент времени $t = t0$. Требуется найти закон
движения точки, то есть зависимость абсциссы движущейся точки от времени.

Решение. Положение точки определяется одной координатой x и задача состоит в том, чтобы выразить x как функцию от t . Принимая во внимание механический смысл первой производной, мы получим равенство

$$\frac{dx}{dt} = f(t) . \qquad (1.1)$$

Как известно из интегрального исчисления

$$x(t) = \int_{t_0}^{t} f(t)dt + C \; (a < t < b), \qquad (1.2)$$

где верхний предел интеграла – переменный, нижний $t0$ есть некоторое фиксированное число из (a,b) , C – произвольная постоянная. Так как в
формулу (1.2) входит произвольная постоянная, то мы ещё не получили определённого закона движения точки.

Выделим из множества движений (1.2) то движение, при котором движущаяся точка занимает заданное положение $x0$ в заданный момент
времени $t0$:

$$x0 = \int_{t0}^{t0} f(t)dt + C \quad C = x0 ,$$

что вместе с (1.2) даёт искомый закон движения точки:

$$x(t) = \int_{t0}^{t} f(t)dt + x0 \; (a < t < b) .$$

Билет 2. Основные понятия о диф. Уравнениях

Обыкновенным дифференциальным уравнением (ДУ) называется уравнение, связывающее независимую переменную x, искомую функцию $y = f(x)$ и ее производные различных порядков $y'; y''; y''';\ldots; y^{(n)}$:

$$\boxed{F(x; y; y'; y''; y''';\ldots; y^{(n)}) = 0.} \tag{10.1}$$

Порядком дифференциального уравнения называется порядок старшей производной, входящей в уравнение.

Например, $y' - 3xy^2 + 4 = 0$ и $x^2 \dfrac{dy}{dx} = 2xy + 3 -$ дифференциальные уравнения первого порядка; $y'' + y - y = \sin x -$ дифференциальное уравнение второго порядка; $(y''')^4 = y' \sin x -$ дифференциальное уравнение третьего порядка.

Решением дифференциального уравнения (10.1) называется такая функция $y = \varphi(x)$, которая при подстановке в это уравнение обращает его в тождество. График функции $\varphi(x)$ называется **интегральной кривой**.

Решить дифференциальное уравнение, значит, найти функцию $y = \varphi(x)$, являющуюся решением. Процесс нахождения решения дифференциального уравнения называется **интегрированием** этого уравнения.

Билет 3. Геометрическое истолкование задачи отыскания решения обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка, разрешенного относительно производной. Поле направлений. Интегральные кривые.

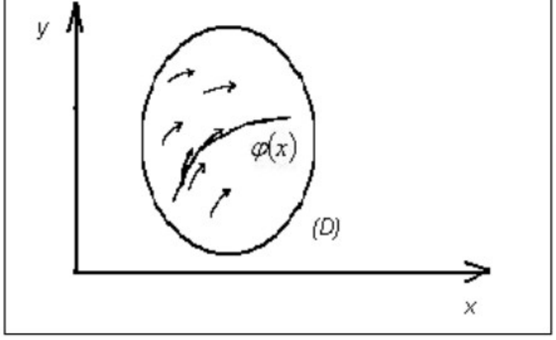
Рассмотрим ДУ

$$\frac{dx}{dt} = f(x,y)\,, \tag{1}$$

в котором функция $f(x)$ - определена в некоторой области (D) плоскости xy. Пусть функция $y = \varphi(x)$ является решением ДУ (1). Тогда она обращает уравнение (1) в тождество:

$$\varphi'(x) = f(x,\varphi(x)). \tag{2}$$

Из геометрического смысла производной следует, что $\varphi'(x)$ - это угловой коэффициент касательной K к графику функции $y = \varphi(x)$ в точке $(x,\varphi(x))$. Построим в каждой точке (x,y) из области определения (D) единственный вектор с коэффициентом K. В результате мы получим векторное поле ДУ (1). Построим в области определения (D) график функции $y = \varphi(x)$. Очевидно, что в каждой точке этой кривой направление касательной совпадает с направлением векторного поля, поэтому геометрически задача об отыскании решения ДУ (1) может быть истолкована так:



найти в области (D) *кривые, в каждой точке которых направление касательной совпадает с направлением векторного поля ДУ.* Такие кривые называются *интегральными кривыми.*

По́ле направле́ний — геометрическая интерпретация множества линейных элементов, соответствующих системе обыкновенных **дифференциальных уравнений.** Любая интегральная кривая системы обыкновенных **дифференциальных уравнений** в каждой своей точке касается отвечающего **этой** точке **направления поля**, и любая кривая, обладающая **этим** свойством, является интегральной кривой системы.

Интегральная кривая - это график решения **дифференциального уравнения**. **Кривой** данный график называется, так как он изображает функцию от скалярной переменной.

Билет 4. Постановка задачи коши для обыкновенного дифференциального уравнения

Чтобы найти конкретное частное решение ДУ задают начальные условия. Для ОДУ:

$$F\left(x, y, y', \ldots, y^{(n)}\right) = 0, \tag{1}$$

эти начальные условия имеют вид:

$$x = x_0, y = y_0, y' = y'_0, \ldots, y^{(n-1)} = y_0^{(n-1)}, \tag{2}$$

где $x_0, y_0, y'_0, \ldots, y_0^{(n-1)}$ - это фиксированные числа.

Постановка Коши: найти решение ДУ (1), удовлетворяющее начальным условиям (2), т.е. найти решение ДУ $y = \varphi(x)$, такое, что $\varphi(x_0) = y_0, \varphi'(x_0) = y'_0, \ldots, \varphi^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$.

Замечание: как правило по начальным условиям (2) решение уравнения (1) определяется единственным образом.

Билет 5. Диф. Уравнения первого порядка с разделенными переменными

Определение: дифференциальное уравнение вида:

$$P(x)dx + Q(y)dy = 0 \tag{1}$$

называют *дифференциальным уравнением с разделенными переменными.*

Пусть функции $P(x)$ и $Q(y)$ определены и непрерывны в интервалах (a, b) и (c, d). Видим, что $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = 0$. Значит уравнение (1) является уравнением в полных дифференциалах. Видим, что для функции $F(x, y) = \int P(x)dx + \int Q(y)dy$ ее полный дифференциал $dF(x, y) = P(x)dx + Q(y)dy$, поэтому уравнение $F(x, y) = \int P(x)dx + \int Q(y)dy = c$ является общим интегралом ДУ (1).

Билет 6. Диф. Уравнения первого порядка с разделяющимися переменными

Определение: дифференциальное уравнение вида:

$$P(x)dx\cdot Q(y)dy+P_1(x)dx\cdot Q_1(y)dy=0 \qquad (1)$$

называется *дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными.*

Предположим, что функции $P(x)$ и $P_1(x)$ непрерывны в интервале (a,b), а функции $Q(y)$ и $Q_1(y)$ - в интервале (c,d). Уравнение с разделяющимися переменными приводится к уравнению с разделенными переменными путем почленного деления $Q(y)\cdot P_1(x)$, если оно $\neq 0$ в области $(D)=(a,b)\times(c,d)$. Произведя это деление, получим:

$$\frac{P(x)}{P_1(x)}dx+\frac{Q(x)}{Q(y)}dy=0 \qquad (2)$$

Его обобщенным интегралом будет:

$$\int\frac{P(x)}{P_1(x)}dx+\int\frac{Q(x)}{Q(y)}dy=c. \qquad (3)$$

Если же функции $P(x)$ и $Q(y)$ обращаются в ноль в точках:

$$\begin{cases} x=x_1,\dots,x=x_n \\ y=y_1,\dots,y=y_n \end{cases}, \qquad (4)$$

то прямые, заданные уравнением (4) также являются решением уравнения (1). Эти решения не содержатся в общем интеграле (3), поэтому их к нему присоединяют.

Теорема: (о существовании и единственности решения ДУ с разделяющимися переменными)

Пусть в дифференциальном уравнении:

$$\frac{dy}{dx}=f_1(x)\cdot f_2(y), \qquad (5)$$

функции $f_1(x)$ и $f_2(y)$ определены и непрерывны соответственно в интервалах (a,b) и (c,d), причем $f_2(y)\neq 0$ при любых $y\in(c,d)$. Тогда, через любую точку $(x_0,y_0)\in(a,b)\times(c,d)$ проходит единственное решение ДУ (5).

Билет 7. Однородные дифференциальные уравнения первого порядка.

Определение: дифференциальное уравнение вида: $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$

$$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0, \qquad (1)$$

в котором $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ являются однородными функциями одной и той же степени $n\in R$, называется *однородным ДУ.*

Пусть уравнение (1) является однородным. Тогда $\frac{dx}{dy}=-\frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$. Так как функция $f(x)=-\frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$ однородная в степени 0, то она является функцией отношения аргумента $f(x,y)=\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$. Значит уравнение (1) приводится к дифференциальному уравнению вида:

$$\frac{dy}{dx}=\varphi\left(\frac{y}{x}\right). \qquad (2)$$

Дифференциальное уравнение вида (2) называют *однородным ДУ.*

Билет 8. Уравнения, приводящиеся к однородным

Определение: дифференциальное уравнение вида:

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}\right), \qquad (1)$$

в котором $c, c_1 - const$ одновременно не обращаются в ноль, называется *уравнением, приводящимся к однородному.*

В случае, когда $c = c_1 = 0$, мы получаем

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{ax+by}{a_1x+b_1y}\right) = f\left(\frac{a+b\dfrac{y}{x}}{a_1+b_1\dfrac{y}{x}}\right) = \varphi\left(\frac{y}{x}\right), \qquad (1)$$

Будем считать, что хотя бы одна из этих $const \neq 0$. Приведем это уравнение к однородному при помощи подстановок $x = U + h$, $y = V + k$, где U - новая независимая переменная, V - функция этой переменной U. Так как $dx = dU$, $dy = dV$, то подставляя найденные выражения в уравнение (1) получим, что

$$\frac{dV}{dU} = f\left(\frac{aU+bV+ah+bk+c}{a_1U+b_1V+a_1h+b_1k+c_1}\right).$$

Подберем константы h и k так, чтобы

$$\begin{cases} ah+bk+c=0 \\ a_1h+b_1k+c_1 \end{cases}. \qquad (2)$$

Если это возможно, то уравнение (1) приводится к однородному:

$$\frac{dV}{dU} = f\left(\frac{aU+bV}{a_1U+b_1V}\right). \qquad (3)$$

Найдя общий интеграл этого уравнения $\Phi(U,V,c)=0$ и возвратившись в нем от переменных U и V к переменным x и y по формулам $x = U + h$, $y = V + k$, мы найдем общий интеграл $\Phi(x-h, y-k, c)=0$ дифференциального уравнения (1).

Очевидно, что система линейных уравнений (2) имеет единственное решение если определитель $\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \neq 0$. В этом случае уравнение (1) будет приводится к однородному. Рассмотрим случай, когда $\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = 0$. В этом случае строки определителя пропорциональны. Пусть $a_1 = \lambda a$, $b_1 = \lambda b$. Тогда уравнение (1) имеет вид:

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{ax+by+c}{\lambda(ax+by)+c_1}\right). \quad (4)$$

Если хотя бы один из коэффициентов a или b обращается в ноль, то правая часть уравнения (4) зависит от одной переменной и мы получаем уравнение с разделяющимися переменными. Предположим, что $a, b = 0$. Покажем, что в этом случае уравнение (4) так же приводится к уравнению с разделяющимися переменными. Будем использовать подстановку $Z = ax + by$, где Z - искомая функция от x. Очевидно, что $\frac{dZ}{dx} = a + b\frac{dy}{dx}$. Подставляя найденной выражение в уравнение (4) получим:

$$\frac{1}{b}\left(\frac{dZ}{dx} - a\right) = f\left(\frac{Z+c}{\lambda Z + c_1}\right). \quad (5)$$

Уравнение (5) приводится к уравнению с разделяющимися переменными. Найдя его общий интеграл $\Phi(x, Z, c) = 0$ и возвратившись в нем от переменной Z к переменным x и y по формуле $Z = ax + by$ найдем общий интеграл $\Phi(x, ax+by, c) = 0$.

Билет 9. Линейные ДУ первого порядка

Определение: дифференциальное уравнение вида:

$$\frac{\partial y}{\partial x} + P(x)\cdot y = Q(x) \quad (1)$$

называют *линейным дифференциальным уравнением (ЛДУ)* первого порядка.

Оно является линейным относительно искомой функции y и ее производной. Если $Q(x) \equiv 0$, то уравнение

$$\frac{\partial y}{\partial x} + P(x)\cdot y = 0 \quad (2)$$

Если же $Q(x) \not\equiv 0$, то уравнение (1) называют *неоднородным*. Уравнение (2) называют *однородным уравнением*, соответствующим неоднородному уравнению (1).

Пусть функции $P(x)$ и $Q(x)$ определены и непрерывны в интервале (a, b), где $a < b$. Будем искать решения уравнения (1) в виде:

$$y = U \cdot V,$$

где $U = U(x)$ и $V = V(x)$ - некоторые неизвестные функции. Видим, что $y' = U' \cdot V + U \cdot V'$. Подставим полученное выражения для y и y' в уравнение (1). Получим:

$$U \cdot V' + (U' + P(x)\cdot U)\cdot V = Q(x). \quad (3)$$

Подберем функцию $U = U(x)$ так, чтобы $U' + P(x)\cdot U = 0$. Следовательно:

$$\frac{dU}{U} = -P(x)dx.$$

Проинтегрируем это выражение:

$$\ln U = -\int P(x)dx,$$

$$U = e^{-\int P(x)dx}.$$

Подставим эту функцию в уравнение (3):

$$e^{-\int P(x)dx}\cdot V' = Q(x),$$

$$V' = e^{-\int P(x)dx}\cdot Q(x) = f(x).$$

$$V = \int f(x)dx + c = \int e^{-\int P(x)dx}\cdot Q(x)dx + c.$$

Следовательно, функция $y = U\cdot V = e^{-\int P(x)dx}\cdot\left(e^{-\int P(x)dx}\cdot Q(x)dx + c\right)$ является общим решением ДУ (1).

Билет 10. Уравнение Бернулли.

Определение: дифференциальное уравнение вида:

$$\frac{\partial y}{\partial x} + P(x)\cdot y = Q(x)\cdot y^n \ , \qquad (1)$$

где $(n \in K)$, в котором $n \neq 0$, $n \neq 1$, называют *уравнением Бернулли.*

При $n = 0$ оно обращается в линейное уравнение. При $n = 1$ оно обращается в линейное однородное уравнение $\frac{dy}{dx} + (P(x) - Q(x))\cdot y = 0$

Уравнения Бернулли решаются тем же приемом, что и линейные уравнения. Пусть $y = U \cdot V$ - решение уравнения, где $U = U(x)$ и $V = V(x)$ - некоторые неизвестные функции. Очевидно, что $y' = U' \cdot V + U \cdot V'$. Подставляя найденные выражения для y и y' в уравнение (1), получим:

$$UV' + (U' \cdot U \cdot P(x))\cdot V = Q(x)\cdot U^n \cdot V^n \ , \qquad (2)$$

Подберем функцию U такой, чтобы $U' + P(x)\cdot U = 0$*. В этом случае уравнение примет вид: $U \cdot V' = Q(x)\cdot U^n \cdot V^n$.

$$V' = Q(x)\cdot U^{n-1} \cdot V^n \ , \qquad (3)$$

Из (*) видим, что $\frac{dU}{U} = -P(x)dx$. Значит $\ln U = -\int P(x)dx$. Следовательно, $U = e^{-\int P(x)dx}$. Найдем функцию V пользуясь уравнением (3), в которое подставлена найденная функция U:

$$\frac{dV}{V} = Q(x)\cdot U^{n-1} dx \ .$$

$$\frac{V^{n-1}}{1-n} = \int Q(x)\cdot U^{n-1} dx + c \ ,$$

откуда V находится очевидным образом. Подставляя U и V в равенство $y = U \cdot V$ найдем общее решение уравнения Бернулли. Отметим, что мы предполагаем, что в уравнении (1), функции $P(x)$ и $Q(x)$ определены и непрерывны в некотором интервале (a,b).

Билет 11. ДУ в полных дифференциалах.

- **Определение.** Если левая часть уравнения

$$P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0$$

является полным дифференциалом некоторой функции $u(x,y)$, то это уравнение называется дифференциальным уравнением в полных дифференциалах.

- Это выполняется, если $P(x,y)$, $Q(x,y)$ и их частные производные непрерывны в односвязной области и
- $$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Примеры. 1)

- $\frac{\partial P}{\partial y} = 1 + \cos y, \ \frac{\partial Q}{\partial x} = 1 + \cos y. \qquad \frac{\partial u}{\partial x} = P(x,y),$

- $$u = \int\left(e^x + y + \sin y\right)dx + C(y) = e^x + xy + x\sin y + C(y).$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x + x\cos y + C'(y) = Q(x,y) = x + x\cos y + e^y,$$

$$C'(y) = e^y, \ C(y) = e^y, \qquad e^x + xy + x\sin y + e^y = C_1.$$

Билет 12. Интегрирующий множитель

- Если $\dfrac{\partial P}{\partial y} \neq \dfrac{\partial Q}{\partial x}$, то вводят интегрирующий множитель такой $\mu = \mu(x, y)$, что $\dfrac{\partial \mu P}{\partial y} = \dfrac{\partial \mu Q}{\partial x}$.
- 1) Если $\mu = \mu(x)$, то $$\mu = e^{\int \frac{(\partial P/\partial y - \partial Q/\partial x)}{Q} dx}.$$
- 2) Если $\mu = \mu(y)$, то $$\mu = e^{-\int \frac{(\partial P/\partial y - \partial Q/\partial x)}{P} dy}.$$

Пример. $(x\cos y - y\sin y)\,dy + (x\sin y + y\cos y)\,dx = 0.$

- $$\frac{\partial P}{\partial y} = x\cos y + \cos y - y\sin y,\ \frac{\partial Q}{\partial x} = \cos y.$$

$$\frac{\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right)}{Q} = \frac{x\cos y - y\sin y}{x\cos y - y\sin y} = 1,$$

$$\mu = e^{\int \frac{(\partial P/\partial y - \partial Q/\partial x)}{Q} dx} = e^{\int dx} = e^x.$$

$$e^x(x\cos y - y\sin y)\,dy + e^x(x\sin y + y\cos y)\,dx = 0.$$

$$\frac{\partial P_1}{\partial y} = e^x(x\cos y + \cos y - y\sin y),\ \frac{\partial Q_1}{\partial x} = e^x(x\cos y - y\sin y) + e^x\cos y,$$

$$\frac{\partial P_1}{\partial y} = \frac{\partial Q_1}{\partial x}.$$

$$e^x(x\cos y - y\sin y)\,dy + e^x(x\sin y + y\cos y)\,dx = 0.$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = e^x(x\cos y - y\sin y),$$

$$u = \int e^x(x\cos y - y\sin y)\,dy + C(x) = xe^x\sin y + ye^x\cos y - e^x\sin y + C(x).$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x\sin y + xe^x\sin y + e^x y\cos y - e^x\sin y + C'(x) = e^x(x\sin y + y\cos y),$$

$$C'(x) = 0,\ C = const.$$

$$u = xe^x\sin y + ye^x\cos y - e^x\sin y = C.$$

Билет 13. ДУ высших порядков, допускающие понижение порядка.

1-й тип. Уравнение вида $\boxed{y'' = f(x)}$. (10.14)

Решается последовательным двукратным интегрированием правой части:

$$y' = \int f(x)dx + C_1 \quad \Rightarrow \quad y = \int\left(\int f(x)dx + C_1\right)dx \quad \Rightarrow \quad y = \iint f(x)dxdx + C_1x + C_2.$$

Замечание. Уравнение $y^{(n)} = f(x)$ решается *n*-кратным интегрированием.

Пример 10.8. Решить уравнение $y'' = \cos 3x$.

Решение. Интегрируя последовательно два раза уравнение, получим

$$y' = \int \cos 3x dx = \frac{1}{3}\sin 3x + C_1,$$

$$y = \int\left(\frac{1}{3}\sin 3x + C_1\right)dx = -\frac{1}{9}\cos 3x + C_1x + C_2.$$

2-й тип. Уравнение вида $\boxed{y'' = f(x, y'),}$ (10.15)

не содержащее явно искомой функции y.

Решается подстановкой $y' = p$, где $p = p(x)$ – новая неизвестная функция и приводится к уравнению первого порядка: $p' = f(x; p)$, где $y'' = p'$. Решая это уравнение, получаем общее решение в виде $p = \varphi(x; C_1)$ или $y' = \varphi(x; C_1)$. Общее решение исходного уравнения будет иметь вид $y = \int \varphi(x; C_1)dx + C_2$.

Пример 10.9. Решить уравнение $y'' + \dfrac{y'}{x} = 0$.

Решение. Это уравнение не содержит явно функции y. Положим $y' = p$, тогда $y'' = p'$. Уравнение перепишется:

$$p' + \frac{p}{x} = 0 \quad \Rightarrow \frac{dp}{dx} = -\frac{p}{x} \quad \Rightarrow \frac{dp}{p} = -\frac{dx}{x}.$$

Решим ДУсРП путем интегрирования обеих частей, получим:

$$\ln|p| = -\ln|x| + \ln|C_1| \quad \Rightarrow p = \frac{C_1}{x},$$ где C_1 – постоянная $(C_1 \neq 0)$.

Так как $p = y' = \dfrac{dy}{dx}$, получим:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{C_1}{x} \quad \Rightarrow dy = \frac{C_1}{x}dx \quad \Rightarrow \int dy = \int \frac{C_1}{x}dx \quad \Rightarrow \quad y = C_1 \ln|x| + C_2 \quad (C_2 \neq 0).$$

3-й тип. Уравнение вида $\boxed{y'' = f(y, y'),}$ (10.16)

не содержащее явно независимую переменную x.

Решается подстановкой $y' = p$, где $p = p(y)$ – новая неизвестная функция и приводится к уравнению $p'p = f(y, p)$, где $y'' = p'p$. Решая это уравнение, получим общее решение $p = \varphi(y; C_1)$ или $y' = \varphi(y; C_1)$. Общее решение исходного уравнения будет иметь вид $\displaystyle\int \frac{dy}{\varphi(y; C_1)} = x + C_2$.

Пример 10.10. Решить уравнение $yy'' - (y')^2 = 0$.

Решение. Это уравнение не содержит явно функции x. Положим $y' = p$, тогда $y'' = p'p$. Уравнение перепишется:

$$yp'p - p^2 = 0 \quad \Rightarrow y\frac{dp}{dy}p - p^2 = 0 \quad \Rightarrow ypdp - p^2dy = 0.$$

Решим ДУсРП, разделив обе части уравнения на $yp^2 \neq 0$:

$$\frac{dp}{p} = \frac{dy}{y}.$$

Интегрируя, получим $\ln|p| = \ln|y| + \ln|C_1| \quad \Rightarrow \quad p = C_1 y$, где C_1 – постоянная $(C_1 \neq 0)$. Так как $p = y' = \dfrac{dy}{dx}$, получим: $\dfrac{dy}{dx} = C_1 y \quad \Rightarrow$

$\frac{dy}{y} = C_1 dx \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dy}{y} = \int C_1 dx \quad \Rightarrow \quad \ln|y| = C_1 x + C_2 \quad (C_2 \neq 0).$ Положим $C_2 = \ln|C_2|$, имеем $\ln|y| = C_1 x + \ln|C_2| \quad \Rightarrow \ln\left|\frac{y}{C_2}\right| = C_1 x \quad \Rightarrow \frac{y}{C_2} = e^{C_1 x}$, отсюда

$y = C_2 e^{C_1 x}$ – общее решение уравнения.

Билет 14. Линейные однородные ДУ второго порядка с постоянными коэффициентами

Линейным однородным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами (ЛОДУ) называется уравнение вида

$$\boxed{y'' + py' + qy = 0.} \qquad (10.17)$$

Общее решение ЛОДУ находится достаточно просто, если известны так называемые линейно независимые частные решения этого уравнения.

Функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ называются **линейно независимыми** на множестве D, если их отношение не является постоянной величиной, то есть $\frac{y_1(x)}{y_2(x)} \neq const$.

В противном случае функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ называются **линейно зависимыми.** Например, функции $y_1(x) = x$ и $y_2(x) = x^5$ – линейно независимые, а функции $y_1(x) = e^{2x}$ и $y_2(x) = 5e^{2x}$ – линейно зависимые.

Если функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ дифференцируемы, то функциональный определитель вида

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}$$

называется **определителем Вронского,** или **вронскианом** этих функций.

Пример 10.12. Найти частное решение уравнения, удовлетворяющее заданному начальному условию $y'' + 9y' = 0 \qquad y(0) = 1; \ y'(0) = 9.$

Решение. Составим характеристическое уравнение: $k^2 + 9k = 0$ или $k(k+9) = 0$, или $k_1 = 0, k_2 = -9$. Следовательно, общее решение ЛОДУ имеет вид: $y_{оро} = C_1 e^{0x} + C_2 e^{-9x} = C_1 + C_2 e^{-9x}$.

Найдем частное решение путем вычисления C_1 и C_2 из системы

$$\begin{cases} y(0) = 1, \\ y'(0) = 9. \end{cases}$$

Найдем $y' = \left(C_1 + C_2 e^{-9x}\right)' = -9C_2 e^{-9x}$. Подставим в $y_{оро}$ и $y'_{оро}$ у получим:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 1, \\ -9C_2 = 9, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 2, \\ C_2 = -1. \end{cases}$$

Частное решение ЛОДУ имеет вид: $y_{чр} = 2 - e^{-9x}$.

Билет 15. . Линейные неоднородные ДУ второго порядка с постоянными коэффициентами

Линейным неоднородным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами (ЛНДУ) называется уравнение вида

$$\boxed{y'' + py' + qy = f(x),} \qquad (10.22)$$

где p и q – действительные числа; $f(x)$ – правая часть уравнения.

Уравнение $y'' + py' + qy = 0$, левая часть которого совпадает с левой частью уравнения (10.22), называется **соответствующим однородным уравнением**.

Пример 10.14. Найти общее решение уравнения $y'' + y' - 2y = xe^x$.

Решение. По теореме (10.4) $y_{орн} = y_{оро} + y_{чрн}$. Значит, решение задачи состоит из двух этапов – поиска $y_{оро}$ и $y_{чрн}$.

Найдем $y_{оро}$: характеристическое уравнение $k^2 + k - 2 = 0$. Найдем корни квадратного уравнения $k_1 = -2$; $k_2 = 1$. Следовательно, общее решение однородного уравнения есть функция $y_{оро} = C_1e^{-2x} + C_2e^x$.

Найдем $y_{чрн}$:правая часть $f(x) = xe^x$.

Следовательно, $\alpha = 1$, $r = 1$, $n = 1$.

Отсюда, ожидаемая форма частного решения ЛНДУ имеет вид:

$y_{чрн} = xe^x(Ax + B) = e^x(Ax^2 + Bx)$,

где A, B – неопределенные коэффициенты.

Найдем производные:

$y'_{чрн} = e^x(Ax^2 + Bx) + e^x(2Ax + B) = e^x(Ax^2 + (B + 2A)x + B)$,

$y''_{чрн} = e^x(Ax^2 + (B + 4A)x + B + 2A)$

и подставим в ЛНДУ:

$e^x(Ax^2 + (B + 4A)x + B + 2A) + e^x(Ax^2 + (B + 2A)x + B) - 2e^x(Ax^2 + Bx) = xe^x$.

Разделив обе части уравнения на $e^x \neq 0$, раскрыв скобки и приведя подобные, получим $6Ax + 2(A + B) = x$.

Приравняв коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой частях последнего равенства, получим систему уравнений:

$$\begin{matrix} x^1: \\ x^0: \end{matrix} \quad \begin{cases} 6A = 1, \\ 2(A + B) = 0, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} A = \dfrac{1}{6}, \\ B = -\dfrac{1}{6}. \end{cases}$$

Подставим найденные значения в формулу $y_{чрн} = xe^x\left(\frac{1}{6}x - \frac{1}{6}\right)$. Тогда общее решение ЛНДУ равно $y_{орн} = C_1e^{-2x} + C_2e^x + \frac{1}{6}xe^x(x - 1)$.

2) Пусть правая часть ЛНДУ представляет собой

$f(x) = a\cos\beta x + b\sin\beta x$,

где a, b, β – числа $(\beta \neq 0)$.

Тогда частное решение этого уравнения имеет вид:

$y_{чрн} = x^r(A\cos\beta x + B\sin\beta x)$,

где r – кратность, с которой чисто мнимое комплексное число βi входит в число корней характеристического уравнения.

Билет 16. Задача Коши и краевая задача для ДУ n-го порядка.

Задача Коши:

Условия

$$x = x_0, \quad y = y_0, \quad y' = y'_0, \quad \ldots \quad y^{(n-1)} = y_0^{(n-1)}$$

выделяют частное решение уравнения

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$$

Т.е. по заданным значениям искомой функции y_0 и ее производным $y'_0, ..., y_0^{(n-1)}$ в точке x_0 из множества интегральных кривых, проходящих через эту точку, выделяется только одна кривая.

Т.об, по заданным условиям находятся значения постоянных в равенстве

$$y = \varphi(x, C_1, C_2, ..., C_n)$$

которые и определяют вид частного решения уравнения n-го порядка:

$$y = \varphi(x, C_1^0, C_2^0, ..., C_n^0)$$

Краевая задача:

Задача интегрирования дифференциального уравнения n-го порядка **называется краевой (или граничной)** задачей , если значения искомой функции (а возможно ее производных) задаются не в одной, а в двух точках, а именно на концах фиксированного интервала изменения независимой переменной x.

Например, для уравнения второго порядка $y'' = f(x, y, y')$ при $0 \le x \le L$ граничные условия могут иметь вид: $y(0) = y(L) = 0$ или $y(0) = y_0$, $y'(L) = 0$.

В отличие от задачи Коши, решение которой существует и единственно (при некоторых весьма общих условиях, налагаемых на правую часть уравнения (2.1)), краевая задача может не иметь решения или решение может быть неединственным.