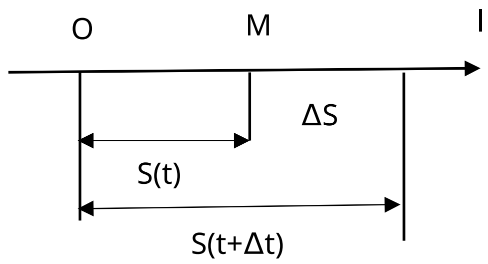
1. Производная функции. Задачи, приводящие к понятию производной.

<u>Задача 1. Скорость прямолинейного движения</u>



ΔS=S(t+Δt)-S(t)

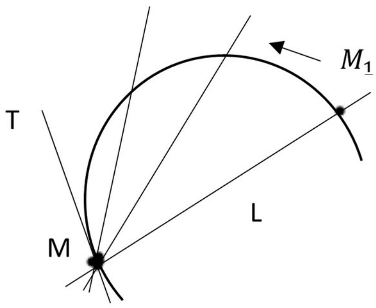
$V_{cp}=\frac{\Delta S}{\Delta t}$

S=S(t) – закон движения точки

Предел средней скорости движения при стремлении к 0 промежутка времени Δt, называется **скорость движения точки в данной момент времени или мгновенной скоростью**.

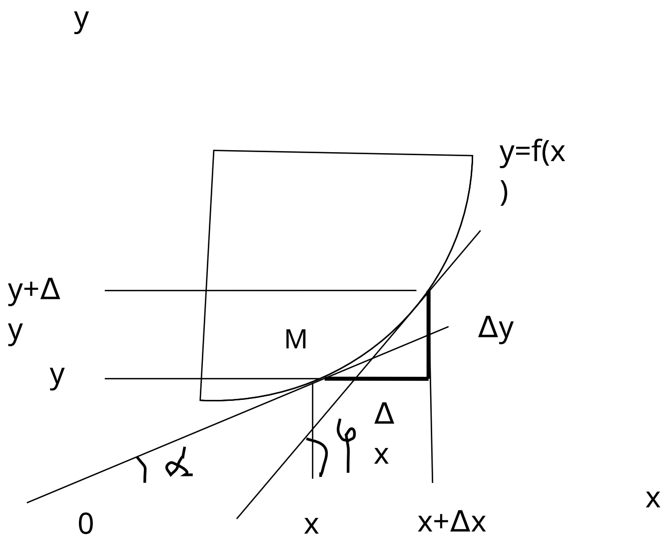
$$V=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta S}{\Delta t} \text{ или } V=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{S(t+\Delta t)-S(t)}{\Delta t}$$

<u>Задача 2. Касательная к кривой</u>



M_1

(M;   ) -секущая



$$k_{сек}=\tan\varphi=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

$\varphi\to\alpha$

$\lim_{\Delta x\to 0}\varphi=\alpha$

$\lim_{\Delta x\to 0}\tan\varphi=\tan\alpha$

$k=\tan\alpha=\lim_{\Delta x\to 0}\tan\varphi=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=¿\lim_{\Delta x\to}$

– угловой коэффициент касательной

Пример:

$$Q = Q(t) I = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{Q(t+\Delta t) - Q(t)}{\Delta t}$$

V=S\`$_t$; $\tan\alpha = y\ x$; I=Q\`$_t$

2. Определение производной, ее механический и геометрический смысл.

Пусть функция y=f(x) определена на некотором интервале (a;b)

1) x є (a;b); x+Δxє(a;b)
2) Δy = f(x+Δx) – f(x)
3) $\frac{\Delta y}{\Delta x}$
4) $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ – этот предел (если он существует) называют производной функцией f(x)

Обозначение производной: $f'_x;\ f'(x);\ y';\ \frac{dy}{dx};\ y'_x$

Производной функцией y=f(x) в точке x_0 называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю. $f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

Функция y=f(x), имеющая производную в каждой точке интервала (a;b), называется дифференцируемой в этом интервале. Операция нахождения производной функции называется дифференцированием.

<u>*Механический смысл производной:*</u> скорость прямолинейного движения материальной точки в момент времени t есть производная от пути S по времени t (v=S\`t) .

<u>*Физический смысл производной*</u>: если функция y=f(x) описывает какой-либо физический процесс, то производная y\` есть скорость протекания этого процесса.

<u>*Геометрический смысл производной*:</u> производная f'_x в точке x равна угловому коэффициенту касательной графику функции y=f(x) в точке, абсцисса которой равна x.

3. Уравнение касательной и нормали к кривой.

$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$ – <u>уравнение касательной</u>

Прямая, перпендикулярная касательной в точке касания, называется нормалью кривой.

$$k_{норм} = \frac{-1}{k_{кас}} = \frac{-1}{f'(x_0)}$$

$y - y_0 = \frac{-1}{f'(x_0)}(x - x_0),\ если\ f'(x_0) \neq 0$ -<u>уравнение нормали</u>

4. Связь между непрерывностью и дифференцируемостью функции.

<u>Теорема:</u> если функция дифференцируема в некоторой точке, то она непрерывна в ней, но обратная теорема не верна; непрерывная функция может не иметь производной.

<u>Замечание:</u>

1) Существуют односторонние пределы функции y=|x| в точке x=0:

$\lim_{\Delta x \to 0-0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -1;\ \lim_{\Delta x \to 0+0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 1$ – функция имеет односторонние производные

$f'_{-}(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0-0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ – левая производная функция f в т. x_0

$f'_{+}(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0+0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ – правая производная функция f в т. x_0

Если $f'_{-}(x_0)\neq f'_{+}(x_0)$, то производная в точке не существует

Производной не существует в точке разрыва.

2) Производная y'=f'(x) непрерывной функции y=f'(x) сама необязательно является непрерывной.

Если функция y=f(x) имеет непрерывную производную y'=f'(x) в некотором интервале (a;b), то функция называется гладкой

5. Производная суммы, разности, произведения и частного функций. Производная сложной и обратной функции.

I. *Производная суммы, разности, произведения и частного функций*

Пусть функции u=u(x) и v=v(x) – две дифференцируемые функции в интервале (a;b).

Теорема: производная суммы (разности) двух функций равна сумме (разности) производных этих функций $(u\pm v)'=u'\pm v'$

Теорема о производной: производная произведения двух функций равна произведению производной первого сомножителя на второй + произведение первого сомножителя на производную второго. $(u*v)'=u'v+uv'$

Следствие 1: (C*u)' = C*u', C=const

Следствие 2: (u*v*w)'=u'vw+uv'w+uvw'

Теорема: производная частного двух функций $\frac{u(x)}{v(x)}$, если v(x)≠0 равна дроби, числитель которой есть разность произведений знаменателя дроби v на производную числителя и числителя дроби u на производную знаменателя, а знаменатель есть квадрат прежнего знаменателя. $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$, v≠0

Следствие 1: $\left(\frac{u}{C}\right)'=\frac{1}{C}*u'$, C=const

Следствие 2: $\left(\frac{C}{v}\right)'=\frac{-C*v'}{v^2}$, C=const

II. Производная сложной и обратной функции.

Пусть y=f(u) и u=$\varphi(x)$, тогда $y=f(\varphi(x))$ – сложная функция с промежуточным аргументом и независимым аргументом x.

Теорема: если функция $y=\varphi(x)$ имеет производную u`(x) в точке x, а функция y=f(u) имеет производную y`(u) в соответствующей точке $y=\varphi(x)$, то сложная функция $y=f(\varphi(x))$ имеет производную y`(x) в точке x, которая находится по формуле: y`(x)=y`(u)*u`(x)

Если промежуточных аргументов несколько: *y=f(u), u=* $\varphi(v)$*, v=g(x), то y`(x)=y`(u)*u`(v)*v`(x)*

y=f(u(φ(v(x))))

Производная обратной функции

Пусть y=f(x) и x=$\varphi(y)$ – взаимно обратные функции

Теорема: если функция y=f(x) строго монотонна на интервале (a;b) и имеет не равную 0 производную f `(x) в произвольной точке этого интервала, то обратная ей функция x=$\varphi(y)$ также имеет производную $\varphi'(y)$ в соответствующей точке, определенную равенством: $\varphi'(y)=\frac{1}{f'(x)}$ или $x'(y)=\frac{1}{y'(x)}$

Производная обратной функции равна обратной величине производной данной функции.

Правило дифференцирования обратной функции: $y\ (x)=\frac{1}{x\ (y)}$ *или* $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}$

6. Производные основных элементарных функций. Гиперболические функции и их производные.

I. Производные основных элементарных функций

1) Степенная функция: $y=x^n,\ n\in N$

$(x¿¿n)=n*x^{n-1}¿$

2) Показательная функция: $y=a^x,\ a>0,\ a\neq 1$

$(a^x)=a^x*\ln a$

3) Логарифмическая функция: $y=\log_a x,\ a>0,\ a\neq 1$

$(\log_a x)=\frac{1}{x*\ln a}$

4) Тригонометрические функции: $y=\sin x,\ y=\cos x,\ y=\tan x,\ y=\cot x$

$(\sin x)=\cos x(\tan x)=\frac{1}{\cos x^2}$

$(\cos x)=-\sin x(\cot x)=\frac{-1}{\sin x^2}$

5) Обратные тригонометрические функции

$(arcsinx)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$(arccosx)=\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

$(arctgx)=\frac{1}{1+x^2}$

$(arcctgx)=\frac{-1}{1+x^2}$

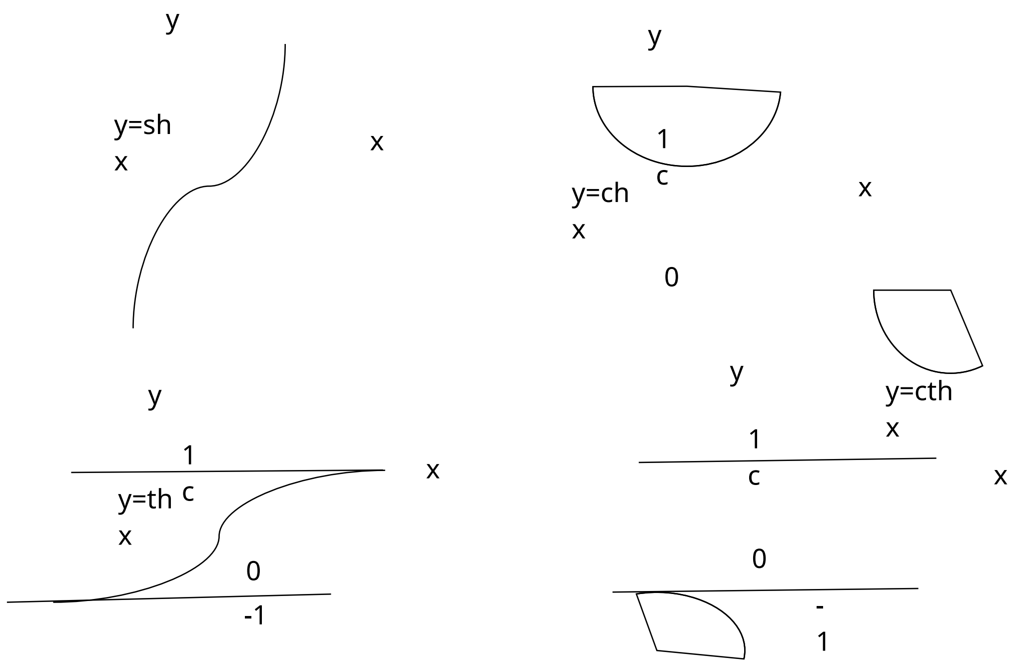
II. Гиперболические функции и их производные

$sh(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$ – гиперболический синус

$ch(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$ -гиперболический косинус

$th(x)=\frac{shx}{chx}=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$ – гиперболический тангенс

$cth(x)=\frac{c\,h\,x}{s\,h\,x}=\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$ – гиперболический котангенс



7. Правила дифференцирования и основные формулы дифференцирования. Таблица производных.

1. $c' = 0,\ c = \text{const}$
2. $\left(x^n\right)' = nx^{n-1}$
3. $\left(a^x\right)' = a^x \cdot \ln a$
4. $\left(e^x\right)' = e^x$
5. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$
6. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$
7. $(\sin x)' = \cos x$
8. $(\cos x)' = -\sin x$
9. $\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
10. $(\text{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
11. $(\text{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
12. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
13. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
14. $(\text{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$
15. $(\text{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$
16. $(\text{sh}\, x)' = \text{ch}\, x$
17. $(\text{ch}\, x)' = \text{sh}\, x$
18. $(\text{th}\, x)' = \frac{1}{\text{ch}^2 x}$
19. $(\text{th}\, x)' = -\frac{1}{\text{sh}^2 x}$

См. вопрос 5

8. Логарифмическое дифференцирование.

В ряде случаев для нахождения производной целесообразно функцию сначала прологарифмировать, а затем результат продифференцировать. Данную операцию называют логарифмическим дифференцированием.

$y = u^v$-степенно-показательная функция

$\left(u^v\right) = u^v * \ln u * v + v * u^{v-1} * u$

9. Неявно заданная функция. Функция, заданная параметрически.

I. Неявно заданная функция.

Если функция задана уравнением y=f(x), разрешенным относительно y, то функция задана в явном виде.

Под неявным заданием функции понимают задание функции в виде уравнения F(x;y)=0, неразрешенного относительно y.

Явная функция переходит в неявную. Неявная функция не переходит в явную

Пример неявной функции: y+2x+cosy-1=0; 2^y-x+y=0

Если неявная функция задана уравнением F(x;y)=0, достаточно продифференцировать уравнение по x, рассматривая при этом y как функцию x.

II. Функция, заданная параметрически.

Пусть зависимость между аргументом x и функцией y задана параметрически в виде уравнений $\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \end{cases}$, где t – вспомогательная переменная, называемая параметром.

$$\boxed{y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}}$$

10. Производные высших порядков явно заданной функции. Механический смысл производной второго порядка.

I. Производные высших порядков явно заданной функции.

- Производная y`=f `(x) функции y=f (x) называется производная 1-ого порядка
- Если функция f `(x) дифференцируема, то ее производная называется производной 2-ого

порядка. y``; f ``(x); $\frac{dy^2}{dx^2}$; $\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$; $\frac{dy}{dx}$; $y = (y)$

- Производной n-ого порядка называется производная от производной (n-1)-ого порядка $y^n=\left(y^{(n-1)}\right)$
- Производные порядка выше первого называются производными высших порядков.

Обозначаются: y^v $y^{(5)}$

II. Механический смысл производной второго порядка.

Вторая производная от пути времени, есть величина ускорения прямолинейного движения точки S``(t)=a

11. Производные высших порядков неявно заданной функции.

Продифференцировав по x первую производную, получим вторую производную от неявной функции. В не войдут x, y и y`. Подставляя найденное значение y` в выражение второй производной, выразим y`` через x и y.

Аналогично поступаем для нахождения производной n-ого порядка.

12. Производные высших порядков от функций, заданных параметрически.

$$y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}$$

$$y_{xx}=\frac{(y'_x)_t}{x'_t};\ y_{xxx}=\frac{(y''_x)_t}{x'_t};\ y_{xxxx}=\frac{(y'''_x)_t}{x'_t}$$

13. Понятие и геометрический смысл дифференциала функции. Основные теоремы о дифференциалах.

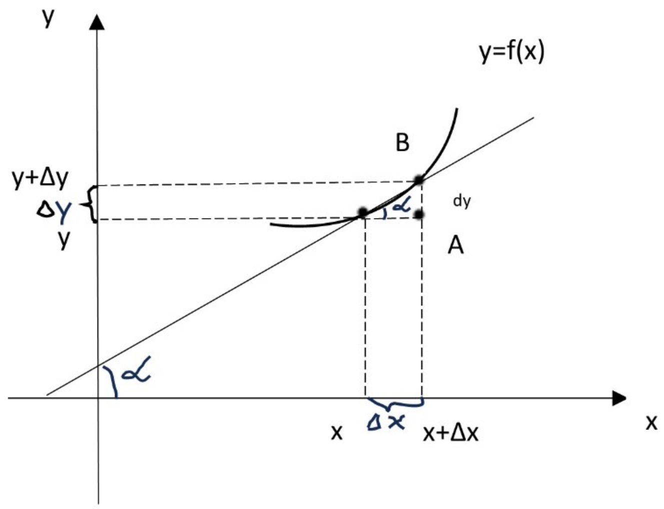
$f(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x)*\Delta x}{\Delta x}$ - главная часть приращения функции Δy(числитель предела)

Дифференциалом функции y=f (x) в точке x называется главная часть ее приращения, равная произведению производной функции на приращение аргумента и обозначается dy (или df(x)); dy=f `(x)*Δx.

Дифференциал dy называют также дифференциалом 1-ого порядка dy=f `(x)dx.

Дифференциал функции равен произведению производной этой функции на дифференциал независимой переменной.

Геометрический смысл дифференциала функции.



$$\tan\alpha = ¿\, AB \vee \frac{¿}{\Delta x}\, ¿$$

$$|AB| = \tan\alpha * \Delta x$$

$$\tan\alpha = f\ (x)$$

AB=f \`(x)*Δx

dy=AB – длина

Дифференциал функции y=f (x) в точке x равен приращению ординаты касательной к графику функции в этой точке, когда x получит приращение Δx.

Основные теоремы о дифференциалах:

dy(const)=0   dy=0*dx

- Дифференциал суммы, произведения и частого двух дифференциальных функций определяется следующими формулами:

d*(u+v) = du + dv

d(u*v) = v*du+u*du

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v * du - u * dv}{v^2},\ v \neq 0$$

- Дифференциал сложной функции равен произведению производной этой функции по промежуточному аргументу на дифференциал этого промежуточного аргумента dy=y\`(u)*du.
- Инвариантность (неизменность) формулы первого дифференциала заключается в том, что независимо, является ли ее аргумент независимой переменной или является функцией другого аргумента.

14. Применение дифференциала к приближенным вычислениям. Дифференциалы высших порядков.

I. Применение дифференциала к приближенным вычислениям.

$\Delta\, y = f\ (x) * \Delta\, x + \alpha * \Delta\, x$, $где\ \alpha \to 0\ при\ \Delta\, x \to 0$

Или $\Delta\, y = dy + \alpha * \Delta\, x$

$\Delta\, y \approx dy$– это равенство позволяет с большой точностью вычислить приближенно приращение любой дифференцируемой функции.

$$\boxed{f\,(x + \Delta\, x) \approx f\,(x) + f\ (x) * \Delta\, x}$$

II. Дифференциалы высших порядков.

Дифференциал от дифференциала функции y=f (x) называется ее вторым дифференциалом $d^2\, y\, или\, d^2\, f(x)$.

$$d^2\, y = d\,(dy) = d\,(f\ (x)\, dx) = (f\ (x)\, dx)\ dx = f\ \ (x)\, dx * dx = f\ \ (x)(dx)^2$$

Дифференциал n-ого порядка есть дифференциал от дифференциала (n-1)-ого порядка:

$$d^n\, y = d\,(d^{n-1}\, y) = f^{(n)}(x)(dx)^{(n)}$$

Рассматриваемые выше формулы справедливы, если x – независимая переменная.

15. Формула Тейлора для многочлена. Формула Тейлора для произвольной функции

I. Формула Тейлора для многочлена

Пусть функция f(x) есть многочлен $P_n(x)$ в степени n.

$$f\,(x) = P_n\,(x) = a_0 + a_1\, x + a_2\, x^2 + \ldots + a_n\, x^n$$

$$P_n(x)=P_n(x_0)+\frac{P_n(x_0)}{1!}*(x-x_0)+\frac{P_n(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{P_n^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

II. <u>Формула Тейлора для произвольной функции</u>

Теорема: если функция *f (x)* определена в некоторой окрестности точки x_0 и имеет в ней производные до (n+1)-ого порядка (включительно), то для любого x из этой окрестности найдется точка *C*, принадлежащая интервалу $C\epsilon(x_0;x)$ такая, что справедлива формула:

$$f(x)=\underbrace{f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n}_{P_n(x)}+\underbrace{\frac{f^{(n+1)}(C)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}}_{Rn(x)}$$

$(C=x_0+\Theta(x-x_0)),\ 0<\Theta<1$

Сокращенная формула: $f(x)=P_n(x)+R_n(x)$

- $P_n(x)$ – многочлен Тейлора ;
- $R_n(x)$ – остаточный член формулы Тейлора, записанный в форме Лагранджа.

При $x_0=0$ получаем частный случай формулы Тейлора – формулу Макларена:

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}*x+\frac{f''(0)}{2!}*x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}*x^n+\frac{f^{(n+1)}(C)}{(n+1)!}*x^{n+1}\ (C=\Theta x,\ 0<\Theta<1)$$

16. Основные теоремы о дифференцируемых функциях. Правило Лопиталя.

<u>Теорема 1 (Ролль):</u> Если функция f(x) непрерывна на отрезке [a;b], дифференцируема на интервале (a;b) и на концах отрезка принимает одинаковые значения f(a)=f(b), то найдётся хотя бы одна точка Cϵ(a; b), в которой производная $f'(x)$ обращается в 0, т.е. $f'(c)=0$

<u>Теорема 2 (Коши):</u> Если ф-и f(x) и φ (x) непрерывны на отрезке [a;b], дифференцируемы на интервале (a;b) причём $\varphi'(x)\neq 0$ для Xϵ(a; b), то найдётся хотя бы одна точка Cϵ(a; b) такая, что выполняется равенство $\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}=\frac{f'(c)}{\varphi'(c)}$

<u>Теорема 3 (Лагранж):</u> Если функция f(x) непрерывна на отрезке [a;b], дифференцируема на интервале (a;b), то найдётся хотя бы одна точка Cϵ(a; b) такая, что выполняется равенство $f(b)-f(a)=f'(c)*(b-a)$ - формула Лагранжа (формула о конечном приращении).

<u>Следствие 1:</u> Если производная функции равна 0 на некотором промежутке, то функция постоянна на этом промежутке.

<u>Следствие 2:</u> Если две функции имеют равные производные на некотором промежутке, то они отличаются друг от друга на постоянное слагаемое.

<u>Правило Лопиталя:</u>

<u>Теорема 1 (Правило Лопиталя, раскрытие неопределённости вида $[\frac{0}{0}]$).</u>

Пусть ф-и f(x) и φ (x) непрерывны на отрезке [a;b], дифференцируемы в окрестности точки x_0 и обращаются в 0 в этой точке ($f(x_0)=\varphi(x_0)=0$). Пусть $\varphi'(x)\neq 0$ в окрестности т. x_0. Если существует предел $\lim_{x\to x0}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}=l$, то

$$\lim_{x\to x0}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x\to x0}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}=l\cdot$$

Теорема 2 (Правило Лопиталя, раскрытие неопределённости вида $[\frac{\infty}{\infty}¿$

Пусть ф-и f(x) и φ (x) непрерывны на отрезке [a;b], дифференцируемы в окрестностях точки x_0 (кроме может быть т. x_0), в этой окрестности $\lim_{x\to x0} f(x)¿\lim_{x\to x0}\varphi(x)=\infty$, $\varphi'(x)\neq 0$.

Если существует $\lim_{x\to x0}\frac{f(x)}{\varphi(x)}$, то $\lim_{x\to x0}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x\to x0}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$

17. Раскрытие неопределённости различных видов (0*∞, $\infty-\infty$, 1^∞, ∞^0, $0^0¿$

1. Пусть $f(x)\to 0\,и\,\varphi(x)\to\infty\,при\,x\to x0$, то

$$\lim_{x\to x0}\left(f'(x)*\varphi'(x)\right)=[0*\infty]=\lim_{x\to x0}\frac{f(x)}{\frac{1}{\varphi(x)}}=\left[\frac{0}{0}\right]или\lim_{x\to x0}\frac{\varphi(x)}{\frac{1}{f(x)}}=[\frac{\infty}{\infty}],$$

2. Пусть $f(x)\to\infty\,и\,\varphi(x)\to\infty\,при\,x\to x0$, тогда

$$\lim_{x\to x0}\left(f(x)-\varphi(x)\right)=[\infty-\infty]=\lim_{x\to x0}\left(\frac{1}{\frac{1}{f(x)}}-\frac{1}{\frac{1}{\varphi(x)}}\right)=\lim_{x\to x0}\frac{\frac{1}{\varphi(x)}-\frac{1}{f(x)}}{\frac{\frac{1}{f(x)}*1}{\varphi(x)}}=¿¿\left[\frac{0}{0}\right]$$

3. Пусть или $f(x)\to 1\,и\,\varphi(x)\to\infty$, *или* $f(x)\to\infty\,и\,\varphi(x)\to 0$, *или* $f(x)\to 0\,и\,\varphi(x)\to 0\,при\,x\to x0$, тогда $\lim_{x\to x0} f(x)^{\varphi(x)}$ (сначала удобно логарифмировать)

18. Возрастание и убывание функции. Экстремум ф-и. Наибольшее и наименьшее значение ф-и на отрезке.

Теорема 1 (необходимое условие).

Если дифференцируемая на интервале (a;b) ф-я $f(x)$ возрастает, то $f'(x)\geq 0$, а если убывает, то $f'(x)\leq 0$ (для любых Х принадлежащих (a;b)).

Теорема 2 (достаточное условие)

Если ф-я f(x) дифференцируема на интервале (a;b) и $f'(x)>0\left(f'(x)<0\right)$ для любого xЄ(a; b), то эти ф-я возрастает (убывает) на интервале (a;b).

Экстремум функции

Значения функции в точке max (min) называются максимум (минимум) функции. Это и есть экстремумы функции.

Теорема 3 (необходимое условие экстремума)

Если дифференцируемая ф-я y= f(x) имеет экстремум в т. x_0, то её производная равна в этой точке 0.

Непрерывная функция может иметь экстремум лишь в точках, где производная ф-и равна 0 или не существует. Такие точки называются критическими.

Теорема 4 (достаточное условие экстремума)

Если непрерывная ф-я y= f(x) дифференцируема в некоторой δ-окрестности критической т. x_0 и при переходе через неё (слева направо) производная $f'(x)$ меняет знак с + на –, то x_0 есть точка max, а если с – на +, то точка min.

Правила исследования ф-и на экстремумы.

1) Найти критические точки ф-и y= f(x)
2) Выбрать те, которые являются внутренними точками области определения ф-ии
3) Исследовать знак производной слева и справа от каждой из них
4) Выписать точки экстремума (если есть) и вычислить значения ф-и в них

Теорема: Если в т. x_0 первая производная ф-и f(x) равна 0 ($f'(x0)=0$¿, а вторая существует и отлична от 0 ($f''(x0)\neq 0$¿, то при $f''(x0)<0$ в т. x_0 имеет максимум, а при $f''(x0)>0$ - минимум.

Наибольшее и наименьшее значение ф-и на отрезке

Пусть ф-я y= f(x) непрерывна на отрезке [a;b].

1) Найти критические точки на интервале (a;b)
2) Вычислить значения ф-и в них
3) Вычислить значения ф-и на концах отрезка
4) Среди вычисленных значений выбрать наибольшее и наименьшее.

19. Выпуклость графика ф-и. Точки перегиба.

Выпуклость графика в т. Перегиба

- График дифференцируемой ф-и y=f(x) наз-ся выпуклым вниз на (a;b) если он расположен выше любой её касательной на этом интервале.
- График дифференцируемой ф-и y=f(x) наз-ся выпуклым вверх на (a;b) если он расположен ниже любой её касательной на этом
- Точка графика непрерывной ф-и y=f(x), отделяющая его части разной выпуклости наз-ся точкой перегиба.

Теорема: Если ф-я y=f(x) во всех точках (a;b) имеет отрицательную вторую производную, то график в этом интервале выпуклый вверх, если положительную – то график выпуклый вниз.

Теорема (достаточное условие сущ-я точек перегиба): Если $f''(x)$ при переходе через т. $x_{0,}$ в которой она равна 0 или не существует, меняет знак, то точка графика с абсциссой x_0 – точка перегиба.

20. Асимптоты графика ф-и. Общая схема исследования ф-и и построения её графика.

Асимптотой кривой называется прямая, расстояние до которой от точки, лежащей на кривой, стремится к 0 при неограниченном удалении от начала координат этой точки по кривой.

Прямая x=a является вертикальной асимптотой графика ф-и y=f(x), если $\lim_{x\to a} f(x)=\infty, \text{или} \lim_{x\to a-0} f(x)=\infty, \text{или} \lim_{x\to a+0} f(x)=\infty$

Уравнение наклонной асимптоты будем искать в виде y=kx+b, где $k=\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}$, $b=\lim_{x\to\infty}(y-kx)$, следовательно если k=0, то $b=\lim_{x\to\infty} f(x)$, поэтому y=b – ур-е горизонтальной асимтоты.

<u>Схема исследования ф-и</u>

1) Найти обл опред ф-ии
2) Найти (если возможно) точки пересечения графика с осями координат
3) Найти интервалы знакопостоянства функции (промежутки, на к-х f(x)>0 или f(x)<0)
4) Выяснить, является ли ф-я чётной (f(-x)=f(x)), нечётной (f(-x)=-f(x)) или общего вида
5) Найти асимптоты графика ф-и
6) Найти интервалы монотонности ф-и
7) Найти экстремумы ф-и
8) Найти интервалы выпуклости и точки перегиба графика ф-и

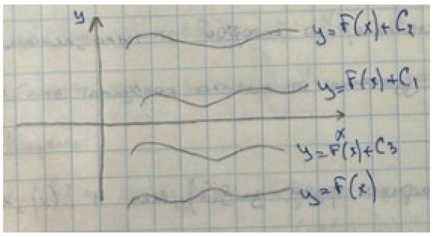
21. Понятие неопределенного интеграла. Его свойства.

Функция F(x) называется первообразной ф-и f(x) на (a;b), если при любом xЄ(a;b) выполняется равенство $F'(x)=¿$ f(x) (или d F(x)= f(x)dx).

Теорема: Если F(x) является первообразной ф-и f(x) на (a;b), то множество всех первообразных для f(x) задаётся функцией F(x)+C.

Множество всех первообразных ф-й F(x)+C для f(x) наз-ся неопределённым интегралом от ф-и F(x) и обозначается: $\int f(x)\,dx=¿F(x)+C¿$, где f(x) – подынтегральная функция, $f(x)\,dx$ – подынтегральное выражение, x – переменная интегрирования.

Геометрически неопр. интеграл представляет собой семейство «параллельных» кривых y=F(x)+C. График каждой первообразной наз-ся интегральной кривой.



<u>Свойства:</u>

1. <u>d(</u>$\int f(x)\,dx¿=¿$ f(x)dx, ¿¿
2. $\int dF(x)=F(x)+C$
3. $\int af(x)\,dx=¿¿$a$\int f(x)\,dx$, a≠0
4. $\int (f(x)\pm g(x))\,dx=\int f(x)\,dx\pm\int g(x)\,dx$
5. Инвариантность формулы интегрирования: если $\int f(x)=F(x)+C$, то $\int f(u)=F(u)+C$, где u=$\varphi(x)$

22. Метод непосредственного интегрирования

Это метод, при котором данный интеграл путём тождественных преобразований и применения свойств неопределённого интеграла приводится к одному или нескольким табличным интегралам.

Операция «Подведение под знак дифференциала»: $\int f'(u)\,du = d(f(u))$

$xdx = \frac{1}{2} d(x^2)$;	$x^2 dx = \frac{1}{3} d(x^3)$;	$\frac{dx}{\sqrt{x}} = 2d(\sqrt{x})$;	$\frac{dx}{x} = d(\ln x)$;
$e^x dx = d(e^x)$	$a^x dx = \frac{1}{\ln a} d(a^x)$;	$\cos x dx = d(\sin x)$;	$\sin x dx = -d(\cos x)$;
$\frac{dx}{\cos^2 x} = d(\operatorname{tg} x)$;	$\frac{dx}{\sin^2 x} = -d(\operatorname{ctg} x)$;	$\frac{dx}{x^2+1} = d(\operatorname{arctg} x)$;	$\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = d(\arcsin x)$.

23. Метод интегрирования подстановкой (замены переменной)

Формула**:** $\int f(x)\,dx = ¿ \int f(\varphi(t) * \varphi'(t))\,dt ¿$. После решения необходимо вернуться к начальной переменной.

24. Метод интегрирования по частям

Пусть u=u(x) и v=v(x), тогда d(u*v)=u*dv+v*du

$\int d(u*v) = \int u*dv + \int v*du$ $\boxed{\text{или}}$ $\int u*dv = u*v - \int v*du$

25. Понятие рациональной функции. Многочлен. Дробно-рациональная функция.

Функция вида $P_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^2+\ldots+a_{n-1}x+a_n$, где n€N, a_i(i=0,1,…,n) – постоянные коэффициенты, называется многочленом или целой рациональной ф-ей, n – степень многочлена.

Теорема 1: Если x_1 есть корень многочлена $P_n(x)$, то многочлен делится без остатка на $(x-x_1)$: $Pn(x)=(x-x_1)*P_{n-1}(x)$

Теорема 2 (основная теорема алгебры): Всякий многочлен n-ой степени (n>0) имеет по крайней мере хотя бы один корень действительный или комплексный.

Теорема 3: Всякий многочлен $P_n(x)$ можно представить в виде $P_n(x)=a_0(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)$

Теорема 4: Если многочлен $P_n(x)$ тождественно равен 0, то все его коэффициенты равны 0.

Теорема 5: Если два многочлена тождественно равны друг другу, то коэффициенты одного многочлена равны соответствующим коэф. другого.

Дробно-рациональная функция

Это функция, равная отношению двух многочленов $f(x)=\frac{Pm(x)}{Qn(x)}$

Рациональная дробь называется правильной, если m<n, если m≥n – неправильной. Всякую неправильную рациональную дробь $\frac{P(x)}{Q(x)}$ можно представить в виде суммы многочлена $L(x)+\frac{R(x)}{Q(x)}$, где $\frac{R(x)}{Q(x)}$- правильная рац. дробь ($\frac{P(x)}{Q(x)} = ¿$ $L(x)+\frac{R(x)}{Q(x)} ¿$.

Правильные рациональные дроби вида:

I. $\frac{A}{x-a}$

II. $\frac{A}{¿¿}$ (k≥2, k єN)

III. $\frac{Mx+N}{x^2+px+q}$

IV. $\frac{AMx+N}{¿¿}$ (k≥2)

(где A, a, M, N, p, q - действительные числа) - которые называются рациональными дробями I, II, III и IV типов

Т. Всякую правильную дробь $\frac{P(x)}{Q(x)}$, знаменатель которой разложен на множители Q(x)= $(x-x_1)^{k1}(x-x_2)^{k2}\ldots(x^2+p_1x+q_1)^{S1}\ldots(x^2+p_mx+q_m)^{Sm}$ можно представить и при том единственным образом в виде следующей суммы простейших дробей

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A1}{x-x1}+\frac{A2}{(x-x1)^2}+\ldots+\frac{Ak1}{(x-x1)^{k1}}+\frac{B1}{x-x2}+\frac{B2}{(x-x2)^2}+\ldots+\frac{Bk2}{(x-x1)^{k2}}+\ldots+\frac{C1x+D1}{x^2+p1x+q1}+\frac{C2x+D2}{(x^2+p1x+q$$

26. Интегрирование простейших рациональных дробей. Интегрирование рациональных дробей.

Простейших дробей:

1. $$\int\frac{A}{x-a}dx=A\int\frac{d(x-a)}{x-a}=A\ln|x-a|+C$$

2. $$\int\frac{A}{(x-a)^k}dx=A\int(x-a)^{-k}d(x-a)=A\frac{(x-a)^{-k+1}}{-k+1}+C$$

3. $$\int\frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx=\frac{M}{2}*\ln(x^2+px+q)+\frac{N-\frac{Mp}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}*arctg\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}+C$$

<u>Интегрирование рациональных дробей:</u>

1. Если дробь неправильная, то представить её в виде суммы многочлена и правильной дроби.
2. Разложить знаменатель правильной дроби на множители и представить её в виде суммы простейших рациональных дробей.
3. Проинтегрировать многочлен и полученную сумму простейших дробей.

27. Интегрирование тригонометрических ф-й. Интегрирование иррациональных ф-й.

<u>Универсальная тригонометрическая подстановка</u>

R – знак рациональной функции.

Вычисление неопределённых интегралов типа $\int R(sinx;cosx)$dx сводится к вычислению интегралов от рациональной функции подстановкой $tg\frac{x}{2}=t$, которая называется универсальной.

<u>Другие подстановки:</u>

1) Если R(sinx;cosx) нечётная относительно sinx т.е. (R(-sinx;cosx)= -R(sinx;cosx)), **то cosx=t**

2) Если R(sinx;cosx) нечётная относительно cosx, (R(sinx;-cosx)= -R(sinx;cosx)), **то sinx=t**

3) Если R(sinx;cosx) чётная относительно sinx и cosx, (R(-sinx;-cosx)= R(sinx;cosx)), **то tgx=t.**

Интегралы типа $\int \sin^m x * \cos^n xdx$

1) sinx=t, если n-целое положительное нечётное число

2) cosx=t, если m- целое положительное нечётное число

3) $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x)$, $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$, $sinx*cosx = \frac{1}{2}\sin 2x$, если m и n – целые неотрицательные чётные числа

4) $tg\frac{x}{2}=t$, если m+n есть чётное целое отрицательное число

Использование тригонометрических преобразований

Интегралы типа $\int \sin ax * \cos bxdx$, $\int \cos ax * \cos bxdx$, $\int \sin ax * \sin bxdx$

с помощью:

- $\sin\alpha * \cos\beta = \frac{1}{2}¿$
- $\cos\alpha * \cos\beta = \frac{1}{2}¿$
- $\sin\alpha * \sin\beta = \frac{1}{2}¿$

Интегрирование иррациональных функций

Интегралы типа $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$; $\int \sqrt{ax^2+bx+c}\,dx$; $\int \frac{mx+n}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$;- неопределённые интегралы от иррациональных ф-й

- $ax^2+bx+c = a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right) = a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}\right) = a¿$, $x+\frac{b}{2a}=t$ (выделяем полный квадрат, делаем замену)
- $\int \frac{Pn(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$; где $P_n(x)$ – многочлен степени n
- $\int \frac{Pn(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx = ¿¿ Q_{n-1}(x) * \sqrt{ax^2+bx+c} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$;
- $\frac{Pn(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}} ¿ (Qn-1(x) * \sqrt{ax^2+bx+c})' + \frac{\lambda}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$

Тригонометрическая подстановка:

$\int R¿¿$,

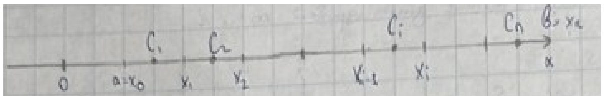
x=asint – для интегралов 1 типа, x=atgt – 2 типа, x=$\frac{a}{sint}$ - 3 типа

$\int R$¿¿. Интегралы указанного вида приводятся к интегралам, которые можно вычислить с помощью соответствующих подстановок.

28. Определённый интеграл как предел интегральной суммы. Геометрический и физический смысл определённого интеграла.

Пусть ф-я y=f(x) определена на отрезке [a;b], a<b

1) С помощью точек x_0=a, x_1, x_2,…, xn=b (x_0<x<…< x_n)



2) В каждом частичном отрезке $[x_{i-1};x_i]$, i=1,2,..,n выб. произвольная точка C_iє$[x_{i-1};x_i]$, вычислим f(C_i)

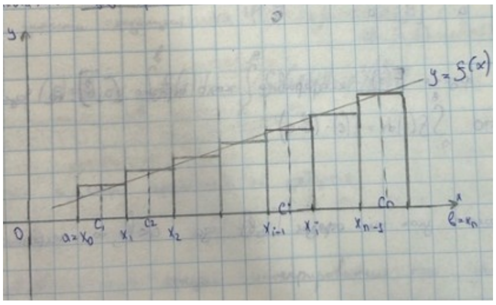
3) Умножим найденное значение на длину отрезка: f(C_i)*Δx= f(C_i)*(x_i -x_{i-1})

4) S_n= f(C_1)*Δx_1+ f(C_2)*Δx_2+…+ f(C_n)*Δx=$\sum_{i=1}^{n} f(Ci)*\Delta xi$ – интегральная сумма; λ=maxΔx_i – длина наибольшего частичного отрезка

5) Найдём предел интегральной суммы, когда n⟶∞ так, что λ⟶0. Если при этом интегральная сумма S_n имеет предел, который не зависит ни от способа разбиения отрезка на частичные отрезки, ни от выбора точек в них, то число называется определённым интегралом от функции y=f(x) на отрезке [a;b] и обозначается $\int_a^b f(x)dx$. Таким образом, $\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty(\lambda\to 0)} \sum_{i=1}^{n} f(Ci)*\Delta xi$, a – верхний предел интегрирования, b – нижний, [a;b] – область интегрирования.

Теорема Коши (существования опр. Интеграла): если ф-я y=f(x) непрерывна на отрезке [a;b], то определённый интеграл существует. (достаточное условие)

<u>Геометрический смысл определённого интеграла:</u> определённый интеграл от неотрицательной ф-и равен площади криволинейной трапеции.



Площадь криволинейной трапеции. Пусть на отрезке [a;b] непрерывная функция y=f(x)≥0. Фигура, ограниченная сверху графиком функции, снизу – осью Ox, сбоку – прямыми x=a и x=b, называется криволинейной трапецией.

<u>Физический смысл определённого интеграла:</u> работа переменной силы, величина которой есть непрерывная ф-я F=F(x), действующей на [a;b], равна определённому интегралу от величины F(x) силы, взятому по отрезку [a;b]. A=$\int_a^b f(x)dx$.

29. Формула Ньютона-Лейбница. Основные св-а определённого интеграла.

Пусть функция y=f(x) определена на отрезке [a;b].

Теорема: если ф-я y=f(x) непрерывна на отрезке [a;b] и F(x) – какая-либо её первообразная на [a;b], то имеет место формула: $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

Основные св-а определённого интеграла

1. $\int_a^b c*f(x)dx = c\int_a^b f(x)dx$
2. $\int_a^b (f1(x) \pm f2(x))dx = \int_a^b f1(x)dx \pm \int_a^b f2(x)dx$
3. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$
4. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ – св-о аддитивности
5. Если ф-я F(x) непрерывна на [a;b], то существует т. Cϵ[a;b] такая, что $\int_a^b f(x)dx = f(c)*(b-a)$ – теорема о среднем
6. Если ф-я F(x) сохраняет знак на [a;b], где a<b, то интеграл имеет тот же знак, что и функция
7. Неравенство между непрерывными ф-ми на [a;b] (a<b) можно интегрировать: $f_1(x) \leq f_2(x)$ при xϵ[a;b], то $\int_a^b f1(x)dx \leq \int_a^b f2(x)dx$
8. Оценка интеграла. Если m и M соответствуют наименьшее и наибольшее значение ф-и y=f(x) на отрезке [a;b], то m*(b-a)≤$\int_a^b f(x)dx$≤M*(b-a)
9. Модуль определённого интеграла не превосходит интеграла от модуля подынтегральной ф-и $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$, a<b
10. Производная определённого интеграла по переменному верхнему пределу равна подынтегральной ф-и, в которой переменная интегрирования заменена этим пределом. $\left(\int_a^x f(t)dt\right)'_x = f(x)$

30. Методы вычисления определенного интеграла. Непосредственное вычисление. Интегрирование подстановкой.

I. Методы вычисления определенного интеграла:

1. Формулы Ньютона-Лейбница.

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a)$$

2. Интегрирование подстановкой

$\int_a^b f(x)\,dx\; x=\varphi(t)$ *см далее*

3. Интегрирование по частям.

Теорема. Если функция $u=u(x)\, u\, V=V(x)$ имеет непрерывные производные на отрезке [a; b], то имеет место формула $\int_a^b u\,dv = u\cdot v ¿_a^b - \int_a^b v\,du$

4. Интегрирования четных и нечетных функций в симметричных пределах Теорема

Пусть функция $y=f(x)$ непрерывна на отрезке [-a;a] симметричном относительно точке X=0

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \begin{cases} 2\cdot\int_0^a f(x)\,dx\,, \text{если } f(x) - \text{четная функция} \\ 0\,, \text{если } f(x) - \text{нечетная функция} \end{cases}$$

II. Непосредственное вычисление

III. Интегрирование подстановкой.

$\int_a^b f(x)\,dx\; x=\varphi(t)$

Теорема: если:

1) Функция $x=\varphi(t)$ и $x'=\varphi'(t)$ непрерывны при tє[α;β]
2) Множеством значений функции $x=\varphi(t)$ при tє[α;β] является [a;b]
3) $\varphi(\alpha)=a\, u\, \varphi(\beta)=b$, то $\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t)) * \varphi'(t)\,dt$

Замечание:

1) Возвращаться к старой переменной не требуется
2) Вместо подстановки $x=\varphi(t)$ t=g(x)
3) Нельзя забывать менять пределы интегрирования при замене переменных

31. Интегрирование по частям. Интегрирование четных и нечетных функций в симметричных пределах.

I. Интегрирование по частям.

Теорема. Если функция $u=u(x)\, u\, V=V(x)$ имеет непрерывные производные на отрезке [a; b], то имеет место формула $\int_a^b u\,dv = u\cdot v ¿_a^b - \int_a^b v\,du$

II. Интегрирования четных и нечетных функций в симметричных пределах Теорема

Пусть функция $y=f(x)$ непрерывна на отрезке [-a;a] симметричном относительно точке X=0

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \begin{cases} 2\cdot\int_0^a f(x)\,dx\,, \text{если } f(x) - \text{четная функция} \\ 0\,, \text{если } f(x) - \text{нечетная функция} \end{cases}$$

32. Интеграл с бесконечным промежутком интегрирования.

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке от [a; +∞). Если существует конечный предел $\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\,dx$, то его называют несобственным интегралом 1 рода и обозначают $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$

1. Если предел существует, то интеграл сходится
2. Если предел не существует или бесконечен, то интеграл расходится

Теорема 1 Признак сравнения

Если на промежутке от [a; +∞) непрерывной функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ удовлетворяет условиям $0 \le f(x) \le \varphi(x)$, то из сходимости $\int_a^{+\infty} \varphi(x)\,dx$ следует сходимость $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$, а из расходимости $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ следует расходимость $\int_a^{+\infty} \varphi(x)\,dx$

Теорема 2 Если существует предел при $x \to \infty$

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = k$, $0 < k < \infty (f(x) > 0 \, u \, \varphi(x) > 0)$, то $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ и $\int_a^{\infty} \varphi(x)\,dx$ оба сходятся или оба расходятся

33. Интеграл от разрывной функции.

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на промежутке [a; b) и имеет бесконечный разрыв при x=b. Если существует конечный предел $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx$, то его называют несобственным интегралом 2 рода;

$\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx = \int_a^{b} f(x)\,dx$

Если предел в правой части существует, то несобственный интеграл сходится, если не существует или равен бесконечности, то расходится.

Теорема 1

Пусть на промежутке [a, b) функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны, при x=b терпят бесконечный разрыв и удовлетворяют условию $0 \le f(x) \le \varphi(x)$. Из сходимости интеграла $\int_a^{b} \varphi(x)\,dx$ вытекает сходимость интеграла $\int_a^{b} f(x)\,dx$, а из расходимости $\int_a^{b} f(x)\,dx$ следует расходимость $\int_a^{b} \varphi(x)\,dx$

Теорема 2

Пусть функция $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны на промежутке [a, b) и в точке x=b терпят разрыв. Если существует предел $\lim\limits_{x\to b} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = k$, 0<k<∞, то $\int_a^{b} f(x)\,dx$ и $\int_a^{b} \varphi(x)\,dx$ одновременно сходятся или расходятся.

34. Схемы применения определенного интеграла. Вычисление площадей плоских фигур.

I. Схемы применения определенного интеграла:

1. Схема (метод интегральных сумм) Базируется на определении определенного интеграла

$A = \lim\limits_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(Ci)\Delta\, Xi = \int_a^{b} f(x)\,dx$

Метод сумм основан на представлении интеграла как о сумме бесконечно большого числа бесконечно малых слагаемых.

2. Схема (Метод дифференциала или Метод отбрасывания бесконечно малых высших порядков)

$dA \approx \Delta\, A$ при $\Delta\, x \to 0$

$$A(b) = A = \int_a^{b} f(x)\,dx$$

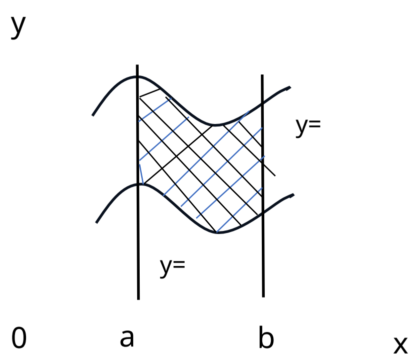
II. Вычисление площадей плоских фигур

1) Прямоугольные координаты

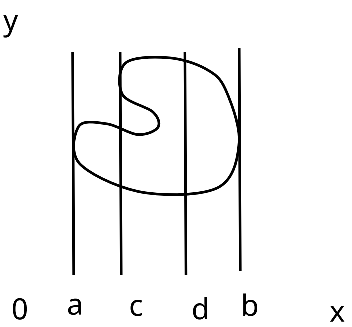
Криволинейная трапеция выше оси Ox S=$\int_a^b ydx$

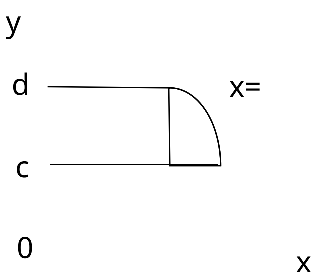
Криволинейная трапеция ниже оси Ox S= -$\int_a^b ydx$

$S=¿\int_a^b ydx \vee ¿$ - в общем случае



$$S=\int_a^b f_2(x)dx-\int_a^b f_1(x)dx$$





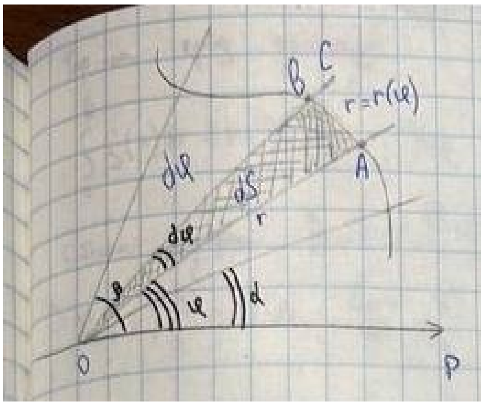
$$S=\int_c^d xdy$$

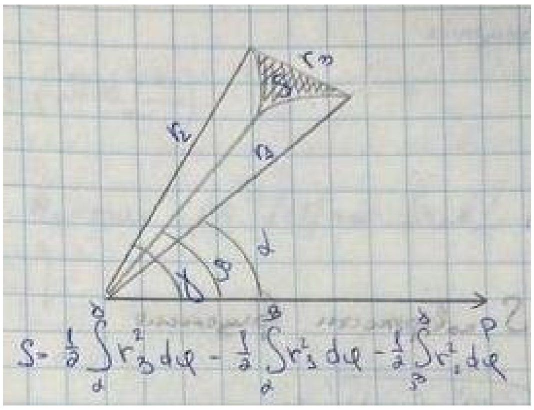
Если криволинейная трапеция ограничена кривой, заданной параметрически, ограничена прямыми x=a и x=b, и осью Ox, то площадь ищем: $S=\left|\int_\alpha^\beta y(t)*x\ (t)dt\right|$

$$\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \end{cases}, t\in[\alpha;\beta] \quad \begin{matrix} x(\alpha)=a \\ x(\beta)=b \end{matrix}$$

2) Полярные координаты

Площадь криволинейного сектора, то есть плоской фигуры, ограниченной непрерывной линией $r=r(\varphi)$ с двумя лучами *f=α и f=β,* где α<β, где r и φ полярные координаты.





$$S=\frac{1}{2}\int\limits_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi)\,d\varphi$$

35. Вычисление длины дуги плоской кривой. Вычисление объема тела.

I. Вычисление длины дуги плоской кривой

Под длиной дуги AB понимается предел, к которому стремится длина ломаной линии, вписанной в эту дугу, когда число звеньев ломаной неограниченно возрастает, а длина найденного звена стремится к нулю. AB имеет длину $l=\int\limits_a^b \sqrt{1+¿¿¿}$

Если кривая AB задана в параметрической форме $l=\int\limits_a^b \sqrt{¿¿¿¿}$

Равенство d$l=\sqrt{1+y'\,x^2}\,dx$ называется формулой дифференциала дуги в прямоуг. координатах

$$y'\,x=\frac{dy}{dx}$$

$$dl=\sqrt{¿¿}$$

$l=\int\limits_{\alpha}^{\beta}\sqrt{r^2+r'^2}\,d\varphi$ – полярные координаты

II. Вычисление объема тела

Формула объема тела по S паралл. сечений $V=\int\limits_a^b S(x)\,dx$

Объем тела вращения: $V_x=\pi\int\limits_a^b y^2\,dx$ (вдоль Ox); $V_y=\pi\int\limits_c^d x^2\,dy$(вдоль Oy)

36. Формула прямоугольников. Формула трапеций. Формула парабол.

I. Формула прямоугольников

II. Формула трапеции

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx\approx\frac{y_0+y_1}{d}h+\frac{y_1+y_2}{d}d+¿¿\ldots\frac{+y_{n-1}+y_n}{2}h$$

Или

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx\approx\frac{b-a}{n}\left(\frac{y_0+y_n}{2}+y_1+y_2+..+y_{n-1}\right)$$

$|R_n|\le\frac{(b-a)^3 M_2}{12n^2}$, где M_2=Max $|f''(x)\vee a\le x\le b$ – абсолютная погрешность

Формула параболы

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx\approx\frac{b}{3}¿¿\ldots+2y_{2n-2}+4y_{2n-3}+y_{2n}¿$$

Или

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{b_n} ¿¿ \ldots y_{2n-1} ¿+2 ¿ \ldots + y_{2n-2} ¿¿$$

$|R_n \vee \leq \frac{(b-a)^5}{180*(2n)^4} * M_4$, где $M_4 = Max \vee f^{IV}(x) \vee a \leq y \leq b$ – абсолютная погрешность

37. Основные понятия рядов. Ряд геометрической прогрессии.

I. <u>Основные понятия рядов</u>

Числовым рядом называется выражение вида $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = ¿¿$a1+a2+…+an+…, где: a1, a2, … an, … - члены ряда. An-общий член ряда

Сумма первых n членов ряда называется n-й частичной суммой ряда: $S_n = a1 + a2 + ¿ \ldots$+an

Частичные суммы: S1=a1; S2=a1+a2; S3=a1+a2+a3

Сумма ряда: S=$\lim_{n\to\infty} S_n$

- Если конечный предел последовательности частичных сумм ряда существует, то ряд сходится
- Если $\lim_{n\to\infty} S_n$ не существует или $\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$, то ряд называется расходящимся. Такой ряд суммы не имеет.

<u>Ряд геометрической прогрессии</u>

a+aq+aq^2+…+aq^{n-1}+…(a≠0) (4)

Сумма первых n членов прогрессии находится по формуле: $S_n = \frac{a(1-q^n)}{1-q} > q \neq 1$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a(1-q^n)}{1-q} = \frac{a}{1-q} - a \lim_{n\to\infty} \frac{q^n}{1-q}$$

- При |q| <1 сходится;
- При |q|≥1 расходится

1. Если |q| <1, то $q^n \to 0$ при $n \to \infty$. Поэтому $\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a}{1-q}$, ряд (4) сходится, его сумма равна $\frac{a}{1-q}$
2. Если |q|>1, то $q^n \to \infty$ при n→∞. Поэтому $\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$, ряд (4) расходится
3. Если |q|=1, то $\lim_{n\to\infty} S_n$ не существует и ряд расходится.

38. Необходимый признак сходимости числового ряда.

<u>Теорема (необходимый признак сходимости):</u> Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ сходится, то его общий член a_n стремится к нулю, т.е. $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

<u>Следствие (достаточное условие расходимости ряда):</u> Если $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ или этот предел не существует, то ряд расходится.

39. Гармонический ряд. Обобщенный гармонический ряд.

I. <u>Гармонический ряд</u>

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + .. + \frac{1}{n} + .. \ (5)$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

Однако ряд (5) расходится

II. <u>Обобщенный гармонический ряд.</u>

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} + .. + \frac{1}{n^p} + ..$, где p>0 – действительное число. (p>1 - сходится, иначе расх)

40. Признаки сравнения рядов. Признак Даламбера.

I. Признаки сравнения рядов

Теорема: пусть даны два знакоположительных ряда.

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n (6)$ и $\sum_{n=1}^{\infty} v_n (7)$

Если для всех n выполняется неравенство $u_n \leq v_n$, то из сходимости ряда (7) следует сходимость ряда (6), из расходимости ряда (6) следует расходимость ряда (7).

Теорема (предельный признак сравнения): пусть даны два знакоположительных ряда (6) и (7).

Если существует конечный, отличный от 0 предел $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = A\left(0 < A < \infty\right)$, то ряды (6) и (7) сходятся и расходятся одновременно.

II. Признак Даламбера

Пусть дан ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + ... + a_n + ...$ (1) с положительными членами и существует конечный или бесконечный предел $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n + 1}{a_n} = d$. Тогда ряд сходится при d<1 и расходится при d>1

Замечания

1. Если d=1, то ряд (1) может быть как сходящимся, так и расходящимся
2. Признак Даламбера целесообразно применять, когда общий член ряда содержит выражение вида n! или u^n

41. Радикальный признак Коши. Интегральный признак Коши.

I. Радикальный признак Коши.

Пусть дан ряд (1) с положительными членами и существует конечный и бесконечный предел $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$=k. Тогда ряд сходится при k<1 и расходится при k>1.

II. Интегральный признак Коши.

Если члены знакоположительного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ могут быть представлены как числовые значения некоторой непрерывной монотонно убывающей на промежутке [1; +∞) функции $f\left(x\right)$ так что a1=$f\left(1\right)$, a2=$f\left(2\right)$…, an=$f\left(n\right)$,…, то:

1. Если $\int_1^{+\infty} f\left(x\right)dx$ сходится, то сходится и ряд (1)
2. Если $\int_1^{+\infty} f\left(x\right)dx$ расходится, то расходится также ряд (1)

Замечания:

Вместо интеграла $\int_1^{+\infty} f\left(x\right)dx$ можно брать интеграл $\int_k^{+\infty} f\left(x\right)dx$, где $k \in N$, k>1

42. Знакочередующиеся ряды. Признак Лейбница.

Знакочередующимся рядом называется ряд вида U1-U2+U3-U4+…+$\left(-1\right)^{n+1}$Un+…+= =$\sum_{n=1}^{\infty} \left(-1\right)^{n+1}$ Un, где Un>0, $n \in N$ (1)

Теорема (Достаточный признак сходимости. Признак Лейбница)

Знакочередующийся ряд сходится если:

1) Условие: Последовательность абсолютных величин членов ряда монотонно убывает U1>U2>U3>…>Un>…;

2) Условие: Общий член ряда стремится к 0. $\lim\limits_{n\to\infty} Un = 0$. При этом сумма ряда удовлетворяет неравенствам 0<S<U1. S-сумма.

Замечания

1. Исследование знакочередующегося ряда вида -U1+U2-U3+U4-… сводится путем умножения всех его членов на -1 к исследованию ряда (1). Ряды, для которых выполняется условие теоремы Лейбница называются рядами Лейбница.

2. Соотношение 0<S<U1 позволяет получить оценку ошибки, которую мы допускаем, заменяя сумму данного ряда его частичной суммы Sn.

43. Общий достаточный признак сходимости знакопеременных рядов. Свойства абсолютно сходящихся рядов.

I. Общий достаточный признак сходимости знакопеременных рядов.

Числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} Un$, содержащий бесконечное множество положительных и бесконечное множество отрицательных членов, называется знакопеременным.

Теорема (общий достаточный признак сходимости):

Пусть дан знакопеременный ряд U1+U2+…+Un+…. Если сходится ряд |U1|+|U2|+…+|Un|+…, составленный из модулей членов данного ряда, то сходится и сам знакопеременный ряд. Обратное утверждение не справедливо!

II. Свойства абсолютно сходящихся рядов.

Знакопеременный ряд называется абсолютно сходящимся, если ряд, составленный из модулей его членов, сходится.

Знакопеременный ряд называется условно сходящимся, если сам он сходится, а ряд, составленный из модулей его членов, расходится.

Основные св-ва абс:

1. Если ряд абсолютно сходится и имеет сумму S, то ряд, полученный из него перестановкой членов, также сходится, и имеет ту же сумму S, что и исходный ряд (относится к теореме Дирихле)

2. Абсолютно сходящиеся ряды с суммами S1 и S2 можно почленно складывать (вычитать). В результате получится абсолютно сходящийся ряд, сумма которого равна S1+S2 (S1-S2)

3. Под произведением двух рядов u1+u2+… и v1+v2+… понимают ряд вида (U1V1)+(U1V2+U2V1)+(U1V3+U2V2+U3V1)+…+(U1Vn+U2Vn-1+…+UnV1)+… . Произведение двух абсолютно сходящихся рядов с суммами S1 и S2 есть абсолютно сходящийся ряд, сумма которого равна S1*S2

Действия над знакопеременными рядами нельзя производить, не убедившись в их абсолютной сходимости.

44. Абсолютная и условная сходимости числовых рядов.

- Знакопеременный ряд называется абсолютно сходящимся, если ряд, составленный из модулей его членов, сходится.
- Знакопеременный ряд называется условно сходящимся, если сам он сходится, а ряд, составленный из модулей его членов, расходится.

Основные свойства

4. Если ряд абсолютно сходится и имеет сумму S, то ряд, полученный, из него перестановкой членов, также сходится, и имеет туже сумм S, что и исходный ряд (относится к теореме Дрихле)

5. Абсолютно сходящиеся ряды с суммами S1 и S2 можно почленно складывать (вычитать). В результате получится абсолютно сходящийся ряд, сумма которого равна S1+S2 (S1-S2)

6. Под произведением двух рядов u1+u2+… и v1+v2+… понимают ряд вида (U1V1)+(U1V2+U2V1)+(U1V3+U2V2+U3V1)+…+(U1Vn+U2Vn-1+…+UnV1)+… . Произведение двух абсолютно сходящихся рядов с суммами S1 и S2 есть абсолютно сходящийся ряд, сумма которого равна S1*S2

Действия над знакопеременными рядами нельзя производить, не убедившись в их абсолютной сходимости.

45. Основные понятия для функционального ряда. Сходимость степенных рядов. Теорема Н. Абеля.

Функциональные ряды:

- ✓ Ряд, членами которого является функция от х, называется функциональным:

$$\sum_{n=1}^{\infty} U_n(x) = U_1(x) + U_2(x) + \ldots + U_n(x) + \ldots$$

- ✓ Придавая х определенное значение x_0, мы получим числовой ряд $U_1(x_0) + U_2(x_o) + \ldots + U_2(x_0) + \ldots$, может быть как сходящимся, так и расходящимся
- ✓ Если полученный числовой ряд сходится, то точка x_0 называется точкой сходимости ряда, если же ряд расходится – точка расходимости функционального ряда.
- ✓ Совокупность числовых значений аргумента *x* при которых функциональный ряд сходится, называется его областью сходимости.
- ✓ В области сходимости функционального ряда, его сумма является некоторой функцией от х, то есть S=S(x). Определяется в области сходимости равенством:

$$S(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x),\ где\ S_n(x) = U_1(x) + U_2(x) + \ldots + U_n(x)$$

- ✓ Степенной ряд – это ряд, членами которого является степенные функции аргумента х

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^2 = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots$$

- ✓ Действительные (или комплексные) числа $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, x \in R$, называются коэффициентами ряда
- ✓ Степенной ряд, разложенный (расположенный) по степеням $(x - x_0)$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \ldots + a_n(x - x_0)^n + \ldots$$

- Область сходимости степенного ряда содержит, по крайне мере, одну точку x=0

Теорема Абеля:

Если степенной ряд сходится при $x = x_0 \neq 0$, то он абсолютно сходится при всех значениях х, удовлетворяющих неравенству $|x| < |x_0|$

Следствие: Если ряд расходится при $x = x_1$, то он расходится и при всех Х, удовлетворяющих неравенству $|x| > |x_1|$

46. Интервал и радиус сходимости степенного ряда. Свойства степенных рядов.

- ✓ Интервал $(-|x_0|; |x_0|)$, называется интервал сходимости степенного ряда. Пусть $|x_0| = R - радиус$ сходимости степенного ряда. $R > 0;\ if\ |x| < R$, то ряд абсолютно сходится, $|x| > R$, то ряд расходится
- ✓ Радиус абсолютной сходимости: $R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ -(Признак Даламбера)
- ✓ $R = \dfrac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$ – (радикальный признак Коши)

Замечание:

1. Если $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$=0, то ряд абсолютно сходится на всей числовой оси $(R = \infty)$.

Если $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \infty,\ то\ радиус\ будет\ равен\ 0$

2. Интервал сходимости степенного ряда, разложенного по степеням $x - x_0$, находят из неравенства $|x - x_0| < R$, $(x_0 - R; x_0 + R)$ – интервал сходимости

3. Если степенной ряд содержит не все степени x, то есть задан неполный степенной ряд, то интервал сходимости ряда находят без определения радиуса сходимости, а непосредственно применяя признак Даламбера или Коши для ряда, составленного из модулей членов данного ряда.

Основные свойства степенных рядов:

1) Сумма S(x) степенного ряда является непрерывной функцией в интервале сходимости от (-R;R)

2) Степенные ряды $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ и $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$, *имеющие ряды сходимости* R_1 и R_2, можно почленно складывать, вычитать и умножать.

3) Степенной ряд, внутри интервала сходимости, можно почленно дифференц., при этом для ряда $S(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\ldots+a_nx^n+\ldots$ *при* $-R<x<R$ выполняется равенство:
$S'(x)=a_1+2a_2x+3a_3x^2+\ldots+n\cdot a_nx^{n-1}+\ldots$

4) Степенной ряд можно почленно интегрировать на каждом отрезке, расположенном внутри интервала сходимости при -R<a<x<R выполняется равенство:

$$\int_a^x S(t)\,dt=\int_a^x a_0\,dt+\int_a^x a_1t\,dt+\int_a^x a_2t^2\,dt+\ldots+\int_a^x a_nt^n\,dt+\ldots+¿$$

✓ Ряды, полученные путем дифференцирования и интегрирования, имеют тот же радиус сходимости, что и исходный степенной ряд

47. Разложение функций в степенные ряды. Приложения степенных рядов.

Ряды Тейлора и Макларена.

- Формула Тейлора:

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_o)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x),$$

где $R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}, C\in(x_0;x)$ остаточный член в форме Лагранжа

$$f(x)=P_n(x)+R_n(x)$$

- Если функция f(x) имеет производные любых порядков (то есть бесконечно дифференц.) в окрестности точки x_0 и остаточный член $R_n(x)\to 0$ *при* $n\to\infty$ $(\lim_{n\to\infty} R_n(x)=0)$, то из формулы Тейлора получается разложение функции f(x) по степеням $x-x_0$, называемое рядом Тейлора

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\cdots=\sum_{n=0}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

- Если в ряде Тейлора
$x_0=0$, *то получим разложение фукнции по степеням X в так называемый* ряд Макларена:

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

Условие:

Пусть для функции f(x) составлен соответствующий ей ряд Тейлора.

Теорема:

Для того, чтобы ряд Тейлора функции f(x) сходился к f(x) в точке x, необходимо и достаточно, чтобы в этой точке остаточный член формулы Тейлора стремится к 0 при $n\to\infty$, то есть, чтобы
$\lim_{n\to\infty} R_n(x)=0$

Замечание:

Если ряд Тейлора сходится к порождающей функции *f(x),* то остаточный член формулы Тейлора равен остатку ряда Тейлора: (т. е. $R_n(x)=r_n(x)$); $R_n(x)=f(x)-S_n(x); r_n(x)=S(x)-S_n(x)$.

Теорема: Если модули всех производных функций *f(x)* ограничены в окрестности точки x_0 одним и тем же числом M>0, то для любого *x* из этой окрестности ряд Тейлора ф-ии *f(x)* сходится к функции *f(x)*.

Разложение некоторых элементарных функций в ряд Тейлора (Макларена)

1) Найти производные $f'(x), f''(x), \ldots, f^{(n)}(x)$
2) Вычислить значение производных в точке $x_0=0$
3) Написать ряд для заданной функции и найти его интервал сходимости
4) Найти интервал (-R;R) в котором остаточный член ряда Макларена $R_n(x) \to o\ при\ n \to \infty$

48. Приближенное вычисление значения функции и определенного интеграла.

- Пусть требуется вычислить значение f(x) при x=x_1, заданной точностью $\varepsilon > 0$

Если ряд f(x) в интервале (-R;R) можно разложить в степенной ряд

$f(x_1)=a_0+a_1x_1+a_2x_1^2+..+a_nx_1^n+..\ и\ x_1 \in (-R;R)$,

то точное значение $f(x_1)\ при\ x=x_1,\ а\ прибл\acute{и}женное\ значение = част.\ сумме\ S_n(x_1)$:

$f(x_1) \approx S_n(x_1)=a_0+a_1x_{1+¿a_2x_1^2+\ldots+a_nx_1^n,\ точность\ этого\ равенства\ возрастает\ с\ ростом\ n¿}$, абсолютная погрешность равна модулю остатка ряда

$$|f(x_1)-S_n(x_1)|=|r_n(x_1)|(-ошибка),\ где\ r_n(x_1)=a_{n+1}\cdot x_1^{n+1}+a_{n+2}\cdot x_1^{n+2}+\ldots$$

- Пусть требуется вычислить определенный интеграл от a до b с точностью до $\varepsilon > 0$.

Если подынтегральную функцию f(x) можно разложить в ряд по степеням X и интервал сходимости (-R;R) включит в себя отрезок от [a;b], то для вычисления заданного интеграла можно воспользоваться свойством почленного интегрирования этого ряда. Ошибка вычислений определяет так же, как и при вычислении значений функций.

49. Основные понятия дифференциальных уравнений. Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям.

ДУ — это уравнение, в которое входит независимая переменная, искомая функция и ее производная

Решением ДУ – называется функция, которая при постановке в уравнение обращает его в тождество

Если искомая (неизвестная) функция зависит от одной переменной, дифференциальное уравнение называют обыкновенным, в противном случае - ДУ в частных производных

Наивысший порядок производной, входящей в ДУ называется порядком этого уравнения

Пр. y’’’-3y’’+y=0 (3й порядок), x^2y’+5xy=$y^2(1\ й\ порядок)$, yz’x=xzy’(1й порядок в част. произв.)

Задача. Материальная точка массой m замедляет свое движение под действием силы сопротивления среды, пропорциональной квадрату скорости V. Найти зависимость скорости от времени. Найти скорость точки через 3 секунды после начала замедления, если V(0)=100 м/с, V(1)=50 м/с.

$V=V(t),\ m\cdot a=F$, a=V’(t) , F=-k*v^2 , k>0 – коэф. Пропорц. Следовательно функция V=V(t) является решением ДУ. m*V’=-k*v^2 или $V'=\frac{-k}{m}\cdot v^2$

Решение: $V=\dfrac{1}{\frac{k}{m}\cdot t+c}$, где c=const

$V(0)=\frac{1}{c}=100 \Rightarrow c=100$

$V(1)=\dfrac{1}{\frac{k}{m}+c}=50 \Rightarrow \frac{k}{m}=\frac{1}{100}$

$v=\frac{100}{t+1} \Rightarrow v(3)=\frac{100}{3+1} \Rightarrow v(3)=25$ м/с

ДУ 1 порядка

Геом смысл

Изоклин

Общее решение ДУ 1 порядка

Частное решение ДУ

Задача Коши

50. Уравнения с разделяющимися переменными.

Уравнение вида $P(x)dx+Q(y)dy=0$ называют ДУ с разделяющимися переменными. Проинтегрировав почленно это уравнение, получаем $\int P(x)\,dx+\int Q(y)\,dy=C$ – его общий интеграл.

$P_1(x)\cdot Q_1(y)dx+P_2(x)\cdot Q_2(y)dy=0$, $разделим\,на\,Q_1(y)P_2(x)\neq 0 \Rightarrow Получим\,\frac{P_1(x)}{P_2(x)}dx+\frac{Q_2(y)}{Q_1(y)}\cdot dy=0$, $\int\frac{P_1(x}{P_2(x}$

Замечание:

1) При проведении почленного деления ДУ на $Q_1(y)P_2(x)$ могут быть потеряны некоторые решения, поэтому следует отдельно решить уравнение $Q_1(y)\cdot P_2(x)=0-особые\,решения$

2) Уравнение $y'=f_1(x)\cdot f_2(y)$ также сводится к уравнению с разделяющимися переменными. Для этого достаточно представить $y'=\frac{dy}{dx}$ и разделить переменные

3) Уравнение $y'=f(ax+by+c)$, где a,b,c – числа, путем замены ax+by+c=U сводится к ДУ с разделяющимися переменными. $\frac{du}{dx}=a+b\frac{dy}{dx}, то\,есть\,\frac{du}{dx}=a+b\cdot f(u)\Rightarrow\frac{du}{a+b\cdot f(u)}=dx$

51. Однородные дифференциальные у равнения.

Функция $f(x;y)$ называется однородной функцией n-го порядка (измерения), если при умножении каждого аргумента на произвольный множитель λ, -вся функция умножится на λ^n

$f(\lambda x;\lambda\cdot y)=\lambda^n\cdot f(x;y)$.

ДУ $y'=f(x;y)$ называется однородным, если функция f(x;y) есть однородная функция 0-го порядка. $y'=\varphi\left(\frac{y}{x}\right),\frac{y}{x}=u\Rightarrow однородное\,уравнение\,в\,дифференциальной\,форме$

$P(x;y)\cdot dx+Q(x;y)\cdot dy=0$ (однородные функции одного порядка)

52. Линейные дифференциальные уравнения. Метод И. Бернулли.

ДУ 1-го порядка называется линейным, если его можно записать в виде:
$y'+p(x)\cdot y=g(x),\ p(x)\,и\,g(x)\,заданные\,фукнции$

Особенность: $y\,и\,y'$ входят в уравнение в 1-й степени, не перемножаясь между собой.

Метод Бернулли: $y=u\cdot v=(\int g(x)\cdot e^{\int p(x)dx}\cdot dx+c)e^{-\int p(x)dx}$

53. Метод Лагранжа. Уравнение Я. Бернулли.

$$y'+p(x)y=g(x). Рассмотрим\,уравнение\,без\,правой\,части:$$
$$y'+p(x)y=0,\frac{dy}{y}=-p(x)dx\,и$$

$\ln|y|=-\int p(x)dx+\ln|C_1|$.

$$\left|\frac{y}{c_1}\right|=e^{-\int p(x)dx}\Rightarrow y=\pm c_1\cdot e^{-\int p(x)dx}\,или\,y=c\cdot e^{-\int p(x)dx}, где\,заменяем\,C=C(x)$$

$y=C(x)\cdot e^{-\int p(x)dx}$, $y'=c'(x)e^{-\int p(x)dx}+c(x)e^{-\int p(x)dx}*(-p(x))$

Полученные $y\,и\,y'$ в исходное:

$$c'(x)\cdot e^{-\int p(x)dx}-c(x)p(x)\cdot e^{-\int p(x)dx}+c(x)p(x)\cdot e^{-\int p(x)dx}=g(x)$$
$$c'(x)\cdot e^{-\int p(x)dx}=g(x)$$
$$dc(x)=g(x)\cdot e^{\int p(x)dx}\cdot dx$$
$$c(x)=\int g(x)e^{\int p(x)dx}\cdot dx+c$$
$$\Rightarrow y=[\int g(x)\cdot e^{\int p(x)dx}dx+c]e^{-\int p(x)dx}$$

54. Уравнение в полных дифференциалах. Интегрирующий множитель.

Уравнение P(x;y)dx+ Q(x;y)dy=0 называется уравнением в полных дифференциалах, если его левая часть есть полный дифференциал некоторой функции U(x;y)

$$P(x;y)dx+Q(x;y)dy=du(x;y);du(x;y)=0;u(x;y)=c$$

Для того, чтобы выражение $\Delta=P(x;y)dx+Q(x;y)dy$*, где функции P(x;y) и Q(x;y) и их частные производные* $\frac{\partial P}{\partial y}$ *и* $\frac{\partial Q}{\partial x}$ *непрерывны в некоторой области D на плоскости Oxy, было полным дифференциалом, необходимо и достаточно выполнения условия* $\frac{\partial P}{\partial Q}=\frac{\partial Q}{\partial x}$.

55. Уравнения Лагранжа и Клеро.

$y=x\cdot\varphi(y')+\psi(y')$*, где* φ *и* ψ *− известные фукнции от* $y'=\frac{dy}{dx}$ – Уравнение Лагранжа

- y'=p; $y=x\cdot\varphi(p)+\psi(p)$
- $\frac{dy}{dx}=\varphi(p)+x\cdot\varphi'(p)\cdot\frac{dp}{dx}+\psi'(p)\cdot\frac{dp}{dx}$, то есть $p-\varphi(p)=(x\cdot\varphi'(p)+\psi'(p))\cdot\frac{\partial p}{dx}$
- $(p-\varphi(p))\cdot\frac{dx}{dp}-x\cdot\varphi'(p)=\psi'(p),x=x(p),x=\lambda(p;c)$

Уравнение Клеро - $y=x\cdot\varphi(y')+\psi(y'),\varphi(y')\equiv y'\Rightarrow y=x\cdot y'+\psi(y')$, *ДУ* $y=xc+\psi(C)$

56. Основные понятия. Уравнения, допускающие понижение порядка.

ДУ высших порядков, ДУ 2 порядка, Решение, общее решение, частное решение

Метод понижения порядка: с помощью замены переменной ДУ сводится к уравнению, порядок которого ниже.

1) Пусть дано уравнение: y''= f(x); введем p(x)=y', тогда y''=p'(x) следовательно p'(x)=f(x) сводится к виду y'=p(x)

2) Пусть дано уравнение y''=f(x,y') не содержащая явно искомой функции y

1. y'=p, где p=p(x)
2. y''=p' и p'=f(x,p)
3. p=φ(x, C_1) – общее решение ДУ 1-го порядка
4. p→y'; y'= $\varphi(x,c_1)$
5. Общее решение ДУ $y=\int\varphi(x,C_1)dx+C_2$

Частный случай y''=f(y'),

y'=p(x), y''=p'=$\frac{dp}{dx}$ ⇒получаем уравнение p'=f(p) с разделяющимися переменными

… еще есть…

57. Линейные дифференциальные уравнения высших порядков.

Уравнение вида $b_0(x)y^{(n)}+b_1(x)y^{(n-1)}+\ldots+b_n(x)y=g_{(x)}$, *где* $b_0(x)\neq0$

$b_1(x),\ldots,b_n(x),g(x)$— это заданные функции (от x), называется линейным ДУ n-го порядка

b_0,b_1,b_n *− коэффициенты уравнения*, $g(x)$- свободный член

Разделим уравнение на $b_0(x)$ и обозначим $\frac{b_1(x)}{b_0(x)}=A_1(x)$;…; $\frac{b_n(x)}{b_0(x)}=A_n(x)$, $\frac{g(x)}{b_0(x)}=f(x)$

$$y^{(n)}+A_1(x)y^{(n-1)}+A_2(x)y^{(n-2)}+\ldots+a_n(x)y=f(x)$$

58. Интегрирование линейных однородных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами.

Пусть дано ЛОДУ 2-го порядка $y''+p\cdot y'+q\cdot y=0$, где p и q – постоянные. Для нахождения общего решения уравнения достаточно найти два его частных решения, образующих фундаментальную систему.

Частное решение в виде $y=e^{kx}$ (k- некоторое число). Дифференцируем функцию 2 раза и, подставляя найденные значения, получаем

$k^2 \cdot e^{kx}+p \cdot k \cdot e^{kx} \cdot q e^{kx}=0, \text{ то есть } e^{kx} \cdot (k^2+p \cdot k+q)=0 \text{ или } k^2+pk+q=0 \, (e^{kx} \neq 0)$ – характеристические уравнения

При решении характеристических уравнений возможны 3 случая:

- 1 случай: Корни $k_1 \text{ и } k_2$ уравнения действительные и различные ¿¿)

Частные решения: $y_1=e^{k_1 x}, y_2=e^{k_2 x}$

$W(x)=\begin{vmatrix} e^{k_1 x} & e^{k_2 x} \\ k_1 e^{k_1 x} & k_2 e^{k_2 x} \end{vmatrix} \neq 0$ – определитель Вронского

Общее решение: $y=c_1 e^{k_1 x}+c_2 e^{k_2 x}$

- 2 случай: $k_1=k_2=\frac{-p}{2}$ (D=0)

Частное решение: $y_1=e^{k_1 x}$

W(x)=$e^{2k_1 x} \neq 0$

Общее решение: $y=c_1 e^{k_1 x}+c_2 x e^{k_1 x}$

- 3 случай: корни $k_1 \text{ и } k_2$ комплексные: $k_1=\alpha+\beta i \text{ и } k_2=\alpha-\beta i \, (D<0)$

Частное решение: $y_1=e^{(\alpha+\beta i)x}$ и $y_2=e^{(\alpha-\beta i)x}$

Общее решение: $y=e^{\alpha x} \cdot (c_1 \cdot \cos \beta x+c_2 \sin \beta x)$

59. Интегрирование линейных однородных дифференциальных уравнений n-го порядка с постоянными коэффициентами.

Задача нахождения общего решения ЛОДУ (n>2) порядка с постоянными коэф. $y^{(n)}+p_1 \cdot y^{(n-1)}+\ldots+p_n \cdot y=0$, где $p_i \, (i=1, \ldots, n)$ – числа, решается аналогично случаю уравнению 2-го порядка с постоянным коэф.

Частное решение: $y=e^{kx}$, где k- постоянная

Характеристическое уравнение: $k^n+p_1 k^{n-1}+\ldots+p_{n-1} \cdot k+p_n=0, k_1, k_2, \ldots, k_n$ – корни хар-кого уравнения

Замечание: не все из корней уравнения обязаны быть различными.

Существует 3 случая.

1 случай: все корни уравнения действительны и просты (различны). Общее решение: $y=c_1 \cdot e^{k_1 x}+c_2 e^{k_2 x}+..+c_n \cdot e^{k_n x}$

2 случай: все корни действительные, но не все простые (есть корни, имеющие кратность $m_k>1$). Тогда каждому простому корню k соответствует одно частное решение вида e^{kx}, а каждому корню k кратности $m_k>1$ соответствует m частных решений $e^{kx}, x \cdot e^{kx}, x^2 \cdot e^{kx}, \ldots, x^{m-1} \cdot e^{kx}$

3 случай: среди корней уравнения, есть комплексно-сопряженные. Тогда каждой паре $\alpha \pm \beta i$ простых комплексно-сопряженных корней, соответствует 2 частных решения:

Частное решение: $e^{\alpha x} \cdot \cos \beta x \text{ и } e^{\alpha x} \cdot \sin \beta x$, а каждой паре $\alpha \pm \beta_i$, корней кратности $m_k>1$ соответствуют 2m частных решений вида:

$e^{\alpha x} \cdot \cos \beta x, x \cdot e^{\alpha x} \cdot \cos \beta x, \ldots, x^{m-1} \cdot e^{2x} \cdot \cos \beta x$ или

$e^{\alpha x} \cdot \sin \beta x, x \cdot e^{\alpha x} \cdot \sin \beta x, \ldots, x^{m-1} \cdot e^{\alpha x} \cdot \sin \beta x$

60. Структура общего решения ЛНДУ второго порядка. Метод вариации произвольных постоянных.

y’’+$a_1(x) \cdot y'+a_2(x) y=f(x) (1), \text{ где } a_1(x), a_2(x), f(x)$ – заданная непрерывная на (a,b) функция.

Уравнение $y''+a_1(x) y'+a_2(x) y=0$ (2), левая часть которого совпадает с левой частью ЛНДУ называется соответствующим ему однородном уравнениям.

Теорема: (структура общего решения ЛНДУ).

Общим решением у уравнения (1) является сумма его произвольного частного решения $y^{¿}$ и общего решения $\hat{y}=c_1 \cdot y_1+C_2 y_2$ соответствующего однородного уравнения (2), то есть $y=y^{¿}+\hat{y}$

Метод вариации произвольных постоянных:

Частное решение $y^{¿}$ можно найти из $\hat{y}$ методом вариации произвольных постоянных (метод Лагранжа)

Пусть $\hat{y}=c_1 \cdot y_1(x)+c_2 \cdot y_2(x)$ – общее решение уравнения, постоянные $C_1=c_1(x)$,

$c_2=c_2(x)-¿$ *заменяем на неизвестные функции и подбираем их так, чтобы функция* $y^{¿}=c_1(x)\cdot y_1(x)+c_2(x)\cdot y_2(x)(3)$ *была решением уравнения* (1)

Найдем производную частного решения:

- $(y^{¿})'=C_1'(x)\cdot y_1(x)+C_1(x)\cdot y_1'(x)+c_2'(x)\cdot y_2(x)+C_2(x)\cdot y_2'(x)$
- *Подберем* $c_1(x)$ *и* $c_2(x)$ *так, чтобы* $c_1'(x)\cdot y(x)+c_2'(x)\cdot y_2(x)=0$ *(4)*
- *Тогда* $(y^{¿})'=c_1(x)\cdot y_1'(x)+c_2(x)\cdot y_2'(x)$
- $(y^{¿})''=c_1'(x)\cdot y_1'(x)+c_1(x)\cdot y_1''(x)+C_2'(x)\cdot y_2'(x)+C_2(x)\cdot y_2''(x)$
- *Подставляем* $y^{¿}, (y^{¿})', (y^{¿})''$ *в* (1)
-

$c_1(x)\cdot\left[y_1''(x)+a_1(x)\cdot y_1'(x)+a_2(x)\cdot y_1(x)\right]+c_2(x)\left[y_2''(x)+a_1(x)\cdot y_2'(x)+a_2(x)\cdot y_2(x)\right]+C_1'(x)\cdot y_1'(x)+C_2'(x$

- *Т.к.*

$y_1(x)$ *и* $y_2(x)-$ *решения уравнения* (2)*, то выражения в квадратных скобках* $=0$*, тогда*

- $C_1'(x)\cdot y_1'(x)+C_2'(x)\cdot y_2'(x)=f(x)$ *(5)*
- $\begin{cases} c_1'(x)\cdot y_1(x)+c_2'(x)\cdot y_2(x)=0 \\ c_1'(x)\cdot y_1'(x)+c_2'(x)\cdot y_2'(x)\cdot y_2'(x)=f(x) \end{cases}$ *(6)*
- $\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} \neq 0$ *т.к это определитель Вронского для фундаментальной системы*

частных решений $y_1(x)$ *и* $y_2(x)$ *уравнения (2). Поэтому система (6) имеет единственное решение:*

$c_1'(x)=\varphi_1(x)$ и $c_2'(x)=\varphi_2(x)$, где $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ *– некоторые функции от x.*

Интегрируя эти функции, находим $c_1(x)$ и $c_2(x)$, *а затем по формуле (3) составляем частное решение уравнения (1).*