Контрольная работа
по математике

Вариант 3

Задача 1. Решите уравнение: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & n \\ 1 & 2 & 3 & n \\ 2 & 3 & 6 & 2n \\ 0 & 1 & 0 & x \end{vmatrix} = n$

Решение

Применим метод алгебраических дополнений.

Получим нули в столбце 1.

Из строки 2 вычтем почленно строку 1:

1	2	3	n
1	1	2	n
0	1	1	0

Затем из строки 3 вычтем строку 1, предварительно умножив строку 1 на 2.

2	3	6	2n
2	2	4	2n
0	1	2	0

Строку 4 перепишем, так как в ней есть 0.

В результате получим определитель, равный исходному:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & n \\ 1 & 2 & 3 & n \\ 2 & 3 & 6 & 2n \\ 0 & 1 & 0 & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & n \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & x \end{vmatrix} = \left| \begin{matrix} \textit{разложим} & \text{по элементам} \\ \textit{столбца } 1 & \end{matrix} \right| =$$

$$= 1 \cdot A_{11} + 0 \cdot A_{21} + 0 \cdot A_{31} + 0 \cdot A_{41} = A_{11}$$

Вычислив алгебраическое дополнение A_{11}:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = M_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & x \end{vmatrix} = |\textit{правило.треугольника}| = 2x + 0 + 0 - 0 - x - 0 = x = n = 3$$

Ответ: x=3

Задача 2. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} n & 0 \\ n & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ и вектор $\vec{X} = \begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix}$.

Найдите: BA, AX, XA, A^{-1}, A^T , rangA, $D=n(A^T)^T - AE$.

Решение

$$BA = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n & 0 \\ n & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \cdot n + 2 \cdot n & -1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 \\ 3 \cdot n + 4 \cdot n & 3 \cdot 0 + 4 \cdot 1 \\ 0 \cdot n + 5 \cdot n & 0 \cdot 0 + 5 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n & 2 \\ 7n & 4 \\ 5n & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 21 & 4 \\ 15 & 5 \end{pmatrix}$$

$$AX = A = \begin{pmatrix} n & 0 \\ n & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \cdot n + 0 \cdot 1 \\ n \cdot n + 1 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n^2 \\ n^2 + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Произведение $X \cdot A$ не определено, так число столбцов в X неравно числу строк A.

Обратная матрица.

Если $A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} a_{22} & -a_{21} \\ -a_{12} & a_{11} \end{pmatrix}$, то $A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$

Определитель матрицы $|A| = \begin{vmatrix} n & 0 \\ n & 1 \end{vmatrix} = n \cdot 1 - 0 \cdot 1 = n = 3$.

Тогда $A^{-1} = \frac{1}{n}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -n & n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/n & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

Транспонирование матрицы:

$A = \begin{pmatrix} n & 0 \\ n & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} n & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Ранг А равен 2, так как $|A| = n \neq 0$

Применим свойства матриц: $D=n(A^T)^T - AE = n \cdot A - A = (n-1)A =$

$=(n-1)\begin{pmatrix} n & 0 \\ n & 1 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$

Задача 3. Исследуйте систему линейных уравнений с помощью определителей, решите методами Крамера, матричным, Гаусса.

а) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + nx_3 = 4 \\ 4x_1 + nx_2 = 2n + 4 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$

б) $\begin{cases} x_1 + x_2 + nx_3 = 0 \\ x_1 + nx_2 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$

Решение

Найдем определитель системы:

$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & n \\ 4 & n & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2n - 4n + 0 - 3n^2 - 4 - 0 = -4 - 2n - 3n^2 = -4-6-27 = -37 \neq 0 \Rightarrow$

Система имеет единственное решение.

1) Метод Крамера.

$x_j = \frac{\Delta_{x_j}}{\Delta}$,

где Δ – определитель системы,

Δ_{xj} - вспомогательные определители, каждый из которых получается из определителя Δ заменой столбца j столбцом свободных членов $в_i$.

Найдем вспомогательные определители:

$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 4 & 1 & n \\ 2n+4 & n & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 4n - 2n^2 - 4n + 0 - n^2 - 2n - 4 - 0 = -4 - 2n - 3n^2 = -37$

$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 4 & n \\ 4 & 2n+4 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 4n + 8 + 4n + 0 - 6n^2 - 12n - 16 - 0 = -8 - 4n - 6n^2 = -74$

$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 4 & n & 2n+4 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2n - 16 + 6n + 12 - 12n - 4 + 4n + 8 = 0$

Найдем значения неизвестных:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-37}{-37} = 1,\ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-74}{-37} = 2\ \ x_3 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{0}{-37} = 0$$

2) Матричный метод: $X = A^{-1}B$.

Матрицы системы:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & n \\ 4 & n & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix},\quad \mathrm{B} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2\mathrm{n}+4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Найдем обратную матрицу:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$$

Определитель системы: $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & n \\ 4 & n & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2n - 4n + 0 - 3n^2 - 4 - 0 = -4 - 2n - 3n^2 = -37$

Найдем алгебраические дополнения: $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$

$A_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = +M_{11} = \begin{vmatrix} n & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = n - 0 = n = 3.$

$A_{21} = (-1)^{2+1} M_{21} = -M_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & n \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -(1-(-n)) = -n - 1$

Аналогично находим остальные дополнения.

Получим:

$$A^{-1} = \frac{1}{-4-2n-3n^2}\begin{pmatrix} n & -n-1 & -n^2 \\ -4 & 2-3n & 4n \\ -4-3n & 5 & 2n-4 \end{pmatrix}$$

Найдем матрицу неизвестных:

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{-4-2n-3n^2}\begin{pmatrix} n & -n-1 & -n^2 \\ -4 & 2-3n & 4n \\ -4-3n & 5 & 2n-4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2\mathrm{n}+4 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{-4-2n-3n^2}\begin{pmatrix} 4n - 2n^2 - 2n - 4n - 4 - n^2 \\ -16 + 4n - 6n^2 + 8 - 12n + 4n \\ -16 - 12n + 10n + 20 + 2n - 4 \end{pmatrix} = = \frac{1}{-4-2n-3n^2}\begin{pmatrix} -4-2n-3n^2 \\ -8-4n-6n^2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

3) Метод Гаусса

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + nx_3 = 4 \\ 4x_1 + nx_2 = 2n + 4 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

Приведем систему с помощью элементарных преобразований к равносильной системе ступенчатого вида.

Исключим неизвестную x_1

Первое уравнение поделим на 2, получим: $x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{n}{2}x_3 = 2$

Из второго уравнения вычтем почленно новое первое уравнение, умноженное на 4:

$$4x_1 + nx_2 = 2n + 4$$

$$4x_1 + 2x_2 + 2nx_3 = 8$$

$$(n-2)x_2 - 2nx_3 = 2n-4$$

Из третьего уравнения вычтем почленно новое первое уравнение, умноженное на 3:

$$3x_1 - x_2 + x_3 = 1$$

$$3x_1 + \frac{3}{2}x_2 + \frac{3n}{2}x_3 = 6$$

$$-\frac{5}{2}x_2 + (1 - \frac{3n}{2})x_3 = -5$$

В результате получим равносильную систему:

$$\begin{cases} x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{n}{2}x_3 = 2 \\ (n-2)x_2 - 2nx_3 = 2n-4 \\ -\frac{5}{2}x_2 + (1-\frac{3n}{2})x_3 = -5 \end{cases}$$

Исключим неизвестную x_2

Поменяем местами второе и третье уравнения:

$$\begin{cases} x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{n}{2}x_3 = 2 \\ -\frac{5}{2}x_2 + (1-\frac{3n}{2})x_3 = -5 \\ (n-2)x_2 - 2nx_3 = 2n-4 \end{cases}$$

Поделим второе уравнение на (-5/2): $x_2 + \frac{3n-2}{5}x_3 = 2$

Из третьего уравнения вычтем второе, умноженное на (n-2):

$$(n-2)x_2 - 2nx_3 = 2n - 4$$

$$(n-2)x_2 + \frac{(3n-2)(n-2)}{5}x_3 = 2n - 4$$

$$\frac{-4-2n-3n^2}{5}x_3 = 0 \Rightarrow x_3 = 0$$

В результате получим равносильную систему:

$$\begin{cases} x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{n}{2}x_3 = 2 \\ x_2 + \frac{3n-2}{5}x_3 = 2 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

Из второго уравнения при $x_3=0$ получим $x_2=2$.

Из первого уравнения:

$$x_1 = -\frac{1}{2}\cdot 2 + \frac{n}{2}\cdot 0 + 2 = 1$$

Проверка:

$$\begin{cases} 2\cdot 1 + 2 + n\cdot 0 = 4 \Rightarrow 4 = 4 \\ 4\cdot 1 + n\cdot 2 = 2n + 4 \Rightarrow 2n + 4 = 2n + 4 \\ 3\cdot 1 - 2 + 0 = 1 \Rightarrow 1 = 1 \end{cases}$$

Система решена правильно

Ответ: $x_1=1$, $x_2=2$, $x_3=0$.

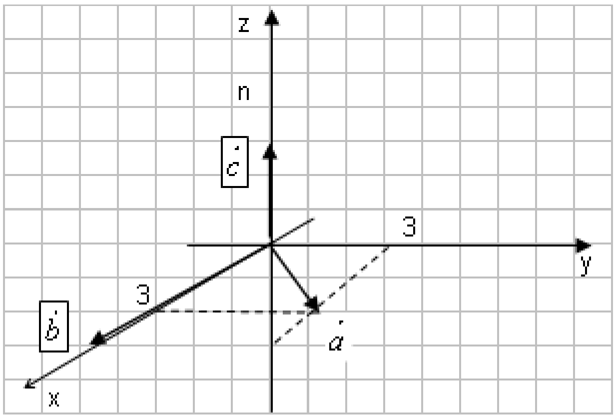
Задача 4. Постройте векторы $\vec{a} = (n, n, 0)$, $\vec{в} = (5, 0, 0)$, $\vec{c} = (0, 0, n)$. Найдите:

а) площадь треугольника, построенного на $\vec{a}, \vec{в}$,

б) объем пирамиды, построенной на векторах $\vec{a}, \vec{в}, \vec{c}$.

Решение

Построим векторы.



а) площадь треугольника, построенного на $\vec{a}, \vec{в}$,

Используем геометрический векторного произведения:

$$S = \frac{1}{2} | \overrightarrow{M_1M_2} \times \overrightarrow{M_1M_3} | .$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ n & n & 0 \\ 5 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \cdot \vec{i} - 0 \cdot \vec{j} - 5n\vec{k}.$$

Модуль вектора $| \vec{a} \times \vec{b} | = \sqrt{0^2 + 0^2 + (-5n)^2} = 5n = 15$

Тогда $S = \frac{1}{2} \cdot 5n = 2{,}5n = 7{,}5.$

б) Объем пирамиды

Используем геометрический смысл смешанного произведения:

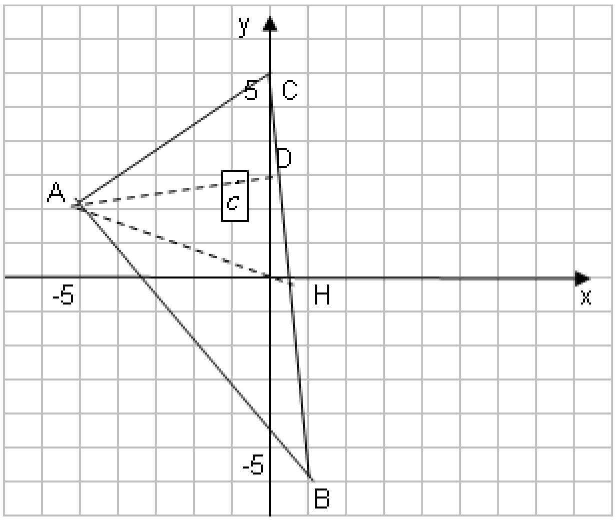
$$V = \frac{1}{6} | \vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c} |$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} n & n & 0 \\ 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n \end{vmatrix} = 0 + 0 + 0 - 0 - 0 - 5n^2 = -5n^2 .$$

Тогда $V = \frac{1}{6} | -5n^2 | = \frac{5}{6} \cdot n^2 = 7{,}5$

Задача 5. Даны координаты вершин треугольника ABC: A(n-10,2), B(1,n-10), C(0,5)
Сделайте чертеж. Найдите:
1) длину и уравнение медианы AH;
2) длину и уравнение высоты AD.

Решение
Сделаем чертеж.



1) Длина и уравнение медианы AH

Сначала найдем координаты точки М как середины отрезка BC:

$x = \frac{1+0}{2} = 0{,}5, \; y = \frac{-7+5}{2} = -1$ M(0,5; -1)

Подставляя координаты точек A и M в уравнение:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

Получим: $\frac{x-(-7)}{0{,}5-(-7)} = \frac{y-2}{-1-2} \Rightarrow \frac{x+7}{7{,}5} = \frac{y-2}{-3} \Rightarrow 3x + 7{,}5y + 6 = 0$.

Длина AM:

$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(0{,}5-(-7))^2 + (-1-2)^2} \approx 8{,}1$

2) Длина и уравнение высоты AD

Прямые AD и BC перпендикулярны, поэтому их угловые коэффициенты $1 + k_{AD}k_{BC} = 0 \Rightarrow$ $k_{AD} = -\frac{1}{k_{BC}}$.

Уравнение BC:

$\frac{x-1}{0-1} = \frac{y+7}{5+7} \Rightarrow \frac{x-1}{-1} = \frac{y+7}{12} \Rightarrow 12x + y - 5 = 0 \Rightarrow y = -12x + 5 \Rightarrow k_{BC} = -12$

$k_{AD} = -\frac{1}{-12} = \frac{1}{12}$

Тогда:

$y - y_o = k(x - x_o) \Rightarrow y - 2 = \frac{1}{12}(x+7) \Rightarrow x - 12y + 31 = 0$

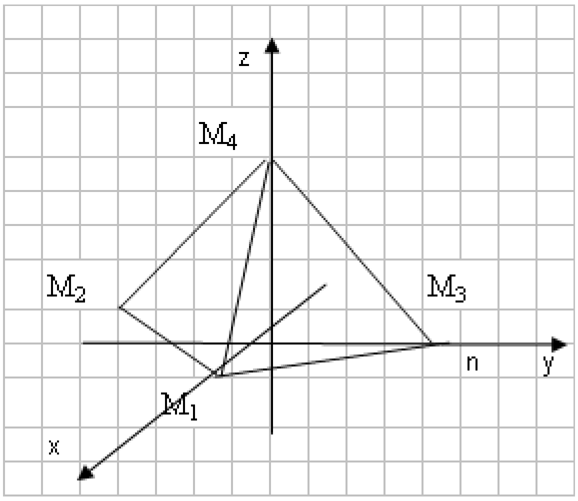
$d = \frac{|ax_o + вy_o + c|}{\sqrt{a^2 + в^2}} = \frac{|12 \cdot (-7) + 2 - 5|}{\sqrt{12^2 + 1^2}} = \frac{87}{\sqrt{145}} \approx 7{,}2$

Задача 6. Даны координаты вершин пирамиды $M_1M_2M_3M_4$:
$M_1(2,0,0)$, $M_2(0,-4,2)$, $M_3(0,n,0)$, $M_4(0,0,4)$. Сделайте чертеж. Найдите:
1) уравнение и длину ребра M_1M_2;
2) угол между рёбрами M_1M_2 и M_1M_4;

3) уравнение грани $M_1M_2M_3$;
4) площадь грани $M_1M_2M_3$;
5) объём пирамиды.

Решение

Сделаем чертеж.



1) уравнение и длина ребра M_1M_2;

Уравнения ребра M_1M_2 найдем как уравнения прямой, проходящей через две точки.

Подставляя координаты точек в уравнения $\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$,

получим: $\frac{x-2}{0-2}=\frac{y-0}{-4-0}=\frac{z-0}{2-0}\Rightarrow$

$\frac{x-2}{-2}=\frac{y}{-4}=\frac{z}{2}$ - канонические уравнения ребра M_1M_2.

Длина ребра M_1M_2 равна расстоянию между точками M_1и M_2 или длине вектора: $|M_1M_2|=\sqrt{(0-2)^2+(-4-0)^2+(2-0)^2}=\sqrt{24}$.

2) угол между рёбрами M_1M_2 и M_1M_4

Определим угол φ между сторонами M_1M_2 и M_1M_4 как угол между соответствующими векторами. Найдем координаты векторов:

$\overrightarrow{M_1M_2}=(x_2-x_1;y_2-y_1;z_2-z_1)=(-2;-4;2)$, длина вектора $|M_1M_2|=\sqrt{24}$

$\overrightarrow{M_1M_4}=(-2;0;4)$, длина вектора $|M_1M_4|=\sqrt{20}$

$\cos\varphi=\frac{-2\cdot(-2)-4\cdot 0+2\cdot 4}{\sqrt{24}\cdot\sqrt{20}}=\frac{12}{\sqrt{480}}$

3) уравнение грани $M_1M_2M_3$

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-x_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} x-2 & y & z \\ -2 & -4 & 2 \\ -2 & n & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

0-2nz-4y-8z-0-2n(x-2)=0 ⇒ -2nx-4y-(8+2n)z+4n=0 ⇒ nx+2y+(4+n)z-2n=0

Нормальный вектор плоскости $\vec{n} = (n;2;4+n)$

4) площадь грани $M_1M_2M_3$

$$S = \frac{1}{2}|\vec{n}| = \frac{1}{2}\sqrt{n^2+2^2+(n+4)^2} = \sqrt{2n^2+8n+20} = \sqrt{62}$$

5) объём пирамиды.

Используем геометрический смысл смешанного произведения:

$$\mathrm{V} = \frac{1}{6}|\overrightarrow{\mathrm{M_1M_2}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{M_1M_3}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{M_1M_4}}|$$

Координаты векторов:

$\overrightarrow{M_1M_2} = (-2;-4;2)$, $\overrightarrow{M_1M_3} = (-2;n;0)$, $\overrightarrow{M_1M_4} = (-2;0;4)$

Найдем смешанное произведение

$$\overrightarrow{M_1M_2} \cdot \overrightarrow{M_1M_3} \cdot \overrightarrow{M_1M_4} = \begin{vmatrix} -2 & -4 & 2 \\ -2 & n & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{vmatrix} = -8n+0+0+4n-0-32 = -4n-32.$$

Тогда $V = \frac{1}{6}|-4n-32| = \frac{1}{6}|4n+32| = 44/3$

Задача 7. Найдите пределы: а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^k-nx+n}{1-\mathrm{n}x^2}$ при k=0; 2 б) $\lim\limits_{x\to n}\frac{x^2+nx-2n^2}{x(nx-x^2)}$,

в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{nx}{1-\sqrt{1-n\sin 2\mathrm{x}}}$ г) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+tg\,nx)}{\arcsin\,5x}$

Решение

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^k-nx+n}{1-\mathrm{n}x^2}$ при k=0; 2

при k=0

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1-nx+n}{1-\mathrm{n}x^2} = \frac{\infty}{\infty} = |\text{делим.на.}x^2| = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x^2}-\frac{n}{x}+\frac{n}{x^2}}{\frac{1}{x^2}-n} = \frac{\frac{1}{\infty^2}-\frac{n}{\infty}+\frac{n}{\infty^2}}{\frac{1}{\infty^2}-n} = \frac{0-0+0}{0-n} = 0$$

при k=2

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-nx+n}{1-\mathrm{n}x^2} = \frac{\infty}{\infty} = |\text{делим.на.}x^2| = \lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{n}{x}+\frac{n}{x^2}}{\frac{1}{x^2}-n} = \frac{1-\frac{n}{\infty}+\frac{n}{\infty^2}}{\frac{1}{\infty^2}-n} = \frac{1-0+0}{0-n} = -\frac{1}{n} = -\frac{1}{3}$$

б) $\lim\limits_{x\to n}\dfrac{x^2+nx-2n^2}{x(nx-x^2)}=\dfrac{0}{0}=\lim\limits_{x\to n}\dfrac{(x-n)(x+2n)}{x^2(n-x)}=\lim\limits_{x\to n}\dfrac{-(x+2n)}{x^2}=-\dfrac{n+2n}{n^2}=-1$

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{nx}{1-\sqrt{1-n\sin 2x}}=\dfrac{0}{0}=|\sin 2x\sim 2x|=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{nx}{1-\sqrt{1-2nx}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{nx(1+\sqrt{1-2nx})}{(1-\sqrt{1-2nx})(1+\sqrt{1-2nx})}=$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{nx(1+\sqrt{1-2nx})}{1^2-(\sqrt{1-2nx})^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{nx(1+\sqrt{1-2nx})}{2nx}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}(1+\sqrt{1-2nx})=\dfrac{1}{2}(1+\sqrt{1-2n\cdot 0})=1$

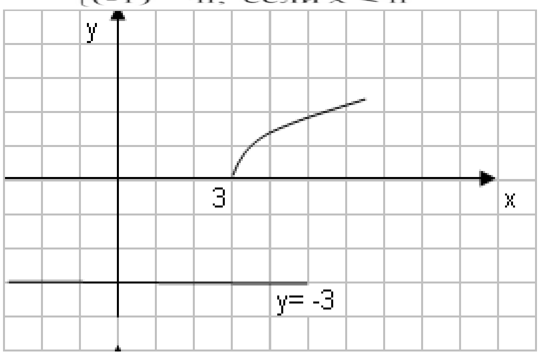
г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+tg\,nx)}{\arcsin 5x}=|tgnx\sim nx;\;\; \ln(1+nx)\sim nx;\;\; \arcsin 5x\sim 5x|=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{nx}{5x}=\dfrac{n}{5}=\dfrac{3}{5}$

Задача 8. Исследуйте функцию на непрерывность графически. Определите характер точек разрыва с помощью односторонних пределов.

Варианты 1-15. $y=\begin{cases}\sqrt{x-n}, & \text{если } x\ge n,\\ (-1)^n\cdot n, & \text{если } x<n\end{cases}$

Решение

$y=\begin{cases}\sqrt{x-n}, & \text{если } x\ge n,\\ (-1)^n\cdot n, & \text{если } x<n\end{cases}$



$\lim\limits_{x\to n+0}\sqrt{x-n}=\sqrt{n-n}=0$

$\lim\limits_{x\to n-0}(-1)^n\cdot n=-3\ne 0\Rightarrow$

Односторонние пределы конечны и не равны, поэтому x=n=3 – точка разрыва 1 рода.

Задача9*. Запишите комплексное число в алгебраической, тригонометрической.

Варианты 1-15. $z=\dfrac{1-i}{1+i}$

Решение

Алгебраическая форма:

$z=\dfrac{1-i}{1+i}=\dfrac{(1-i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\dfrac{1-2i+i^2}{1^2-i^2}=|i^2=-1|=\dfrac{1-2i-1}{1-(-1)}=\dfrac{-2i}{2}=-i\Rightarrow z=0-1\cdot i$

Тригонометрическая форма:

$r=|z|=\sqrt{0^2+(-1)^2}=1$

$\varphi=arctg\dfrac{-1}{0}=arctg(-\infty)=-90^o$

z=1(cos(-90º)+i · sin(-90º)) ⇒ z=cos90º - i · sin90º

Задача 10. Найдите производные и дифференциалы 1 порядка.

Варианты 1-5, 11-20. а) y = (n-2x)e $^{n-x}$, б) y = ln$\frac{n+x}{n-x}$

Решение

а) Применим правила дифференцирования произведения и сложной функции:

y $'$ = (n-2x)$'$ e $^{n-x}$ + (n-2x) (e $^{n-x}$) $'$ = -2 e $^{n-x}$ + (n-2x) e $^{n-x}$ (n-x)$'$ =

= -2 e $^{n-x}$ + (n-2x) e $^{n-x}$ (-1) =(2x-n-2) e $^{n-x}$ = (2x-5) e $^{3-x}$

dy=f $'$(x)dx= (2x-5) e $^{3-x}$ dx

б) Применим правила дифференцирования частного и сложной функции:

$$y' = (\ln\frac{n+x}{n-x})' = \frac{1}{\frac{n+x}{n-x}}(\frac{n+x}{n-x})' = \frac{n-x}{n+x}\cdot\frac{(n+x)'(n-x)-(n-x)'(n+x)}{(n-x)^2} =$$

$$= \frac{n-x}{n+x}\cdot\frac{1\cdot(n-x)-(-1)(n+x)}{(n-x)^2} = \frac{1}{n+x}\cdot\frac{2n}{(n-x)} = \frac{2n}{n^2-x^2} = \frac{6}{9-x^2}$$

dy=f $'$(x)dx= $\frac{6}{9-x^2}$ dx

Задача 11. Найдите пределы по правилу Лопиталя:

Варианты 1-5 а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3-nx+n}{1-\mathrm{nx}^2}$, б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{5nx}{1-\sqrt{1-\sin 2x}}$

Решение

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \left|\frac{0}{0};\frac{\infty}{\infty}\right| = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

а) $$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-nx+n}{1-\mathrm{nx}^2} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x\to\infty}\frac{(x^3-nx+n)'}{(1-\mathrm{nx}^2)'} = \lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-n}{-2\mathrm{nx}} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x\to\infty}\frac{(3x^2-n)'}{(-2\mathrm{nx})'} =$$

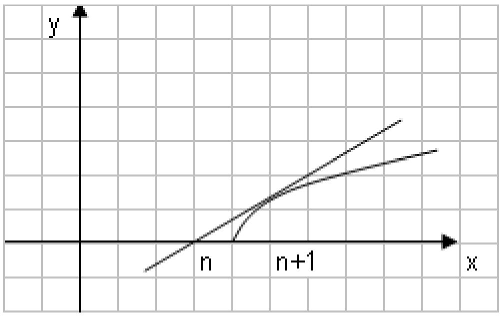
$$\lim_{x\to\infty}\frac{6x'}{-2\mathrm{n}'} = \frac{6\cdot\infty}{-2n} = \infty$$

б) $$\lim_{x\to 0}\frac{5nx}{1-\sqrt{1-\sin 2x}} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 0}\frac{(5nx)'}{(1-\sqrt{1-\sin 2x})'} = \lim_{x\to 0}\frac{5n}{0-\frac{-2\cos 2x}{2\sqrt{1-\sin 2x}}} = \frac{5n}{\frac{\cos 0}{\sqrt{1-\sin 0}}} = 5n \quad =15$$

Задача 12. Найдите уравнение касательной к графику функции $y=\sqrt{x-n}$ в точке xo=n+1.
Сделайте чертеж.

Решение

Сделаем чертеж



Уравнение касательной к графику функции y=f(x) в точке $M_o(x_o,y_o)$ имеет вид:
$y-f(x_o)= f'(xo)(x-x_o)$.

$f(x_o)= \sqrt{n+1-n} = 1$

$f'(xo) = (\sqrt{x-n})' = \frac{1}{2\sqrt{x-n}} = \frac{1}{2\sqrt{n+1-n}} = \frac{1}{2}$

Уравнение касательной:
y-1= 0,5(x-n) ⇒ y=0,5x+1-0,5n = 0,5x-0,5

Задача 13. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y = \frac{x-n}{x+1}$ на отрезке [0,n].

Решение
Найдем производную функции:

$$y' = \left(\frac{x-n}{x+1}\right)' = \frac{(x-n)'(x+1)-(x+1)'(x-n)}{(x+1)^2} = \frac{1(x+1)-1(x-n)}{(x+1)^2} = \frac{1+n}{(x+1)^2} \neq 0$$

Производная не обращается в 0.
Производная не определена при x+1=0, откуда x=-1 – критическая точка вне отрезка [0,n].
Таким образом, наибольшее и наименьшее значения функции могут быть только на концах отрезка:

$f(0) = \frac{0-n}{0+1} = -n = -3$

$f(n) = \frac{n-n}{n+1} = 0$

Наибольшее значение равно f(n)=0.
Наименьшее значение равно f(0)= -3.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бугров Я.С., Никольский С.М. Дифференциальное и интегральное исчисление, М., 1988
2. Ефимов А.В., Демидович Б.П. Сборник задач по математике для втузов, ч.1, М.,1986
3. Кремер Н.Ш., Путко Б.А., Тришин И.М., Фридман М.Н. Высшая математика для экономистов: учебн. пособие для вузов. – М.: ЮНИТИ , 2004. – 474 с.
4. Черненко В. Д. Высшая математика в примерах и задачах: учебное пособие для вузов. В 3 т.: Т. 1. – СПб.: Политехника, 2003. – 703 с.