Задача 1. Рассчитать наибольшее и наименьшее значения функции на заданном отрезке:

$$f(x)=x^5-\frac{5}{3}x^3+2,[0;2]$$

Решение.

Находим первую производную функции:

$$y'=\left(x^5-\frac{5}{3}x^3+2\right)'=5x^4-5x^2$$

Приравниваем ее к нулю:

$$5x^4-5x^2=0$$
$$5x^2(x^2-1)=0$$
$$5x^2=0$$
$$x_1=0$$
$$x^2-1=0$$
$$x_2=1;x_3=-1$$

Третий корень во внимание не берем, так как он не входит в указанный отрезок.

Вычисляем значения функции на концах отрезка

$$x=0$$
$$y(0)=0^5-\frac{5}{3}*0^3+2=2$$
$$x=2$$
$$y(2)=2^5-\frac{5}{3}*2^3+2=\frac{62}{3}$$
$$x=1$$
$$y(1)=1^5-\frac{5}{3}*1^3+2=\frac{4}{3}$$

Ответ:

$$y_{min}=y(1)=\frac{4}{3}$$
$$y_{max}=y(2)=\frac{62}{3}$$

Задача 2. Провести полное исследование и построить графики данных функций:

$$a¿\ y=\frac{(1+x)^2}{(x-1)^2}$$
$$б¿\ y=\ln(2x^2+3)$$

Решение.

$a¿\ y=\frac{(1+x)^2}{(x-1)^2}$

1) Найти область определения функции, исследовать её поведение на границах этой области:

Область определения функции $x\neq 1$, то есть $D(y)=(-\infty;1)\cup(1;+\infty)$

2) Найти точки разрыва и классифицировать их с помощью односторонних пределов:

Точка разрыва $x=1$.

Вычислим односторонние пределы:

$$\lim_{x\to 1-0}\frac{(1+x)^2}{(x-1)^2}=+\infty$$

$$\lim_{x\to 1+0}\frac{(1+x)^2}{(x-1)^2}=+\infty$$

$x=1$ является точкой разрыва второго рода

3) Исследовать периодичность, чётность (нечётность):

Функция ни чётная, ни нечётная. Симметрии относительно оси ординат нет. Симметрии относительно начала координат тоже нет. Так как

$$y(-x)=\frac{(1+(-x))^2}{((-x)-1)^2}=\frac{(1-x)^2}{(-x-1)^2}$$

Видим, что

$$y(-x)\neq -y(x)\,и\,y(-x)\neq y(x)$$

4) Найти точки пересечения графика с осями координат и интервалы знакопостоянства функции:

Точки пересечения с осями координат:

$$Ox: y=\frac{(1+x)^2}{(x-1)^2}=0=\text{¿}\,x=-1$$

$$Oy: x=0=\text{¿}\,y=1\,;\,точка\,(0\,;1)$$

5) Найти асимптоты:

Вычислим односторонние пределы:

$$\lim_{x\to 1-0}\frac{(1+x)^2}{(x-1)^2}=+\infty$$

$$\lim_{x\to 1+0}\frac{(1+x)^2}{(x-1)^2}=+\infty$$

Получаем, что $x=1-\text{¿}$ вертикальная асимптота

Наклонные асимптоты вида $y=kx+b$

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{(1+x)^2}{x(x-1)^2}=0$$

$$b=\lim_{x\to\infty}(y-kx)=\lim_{x\to\infty}\frac{(1+x)^2}{(x-1)^2}=1$$

Наклонная асимптота $y=1$

6) Найти точки экстремума и интервалы монотонности:

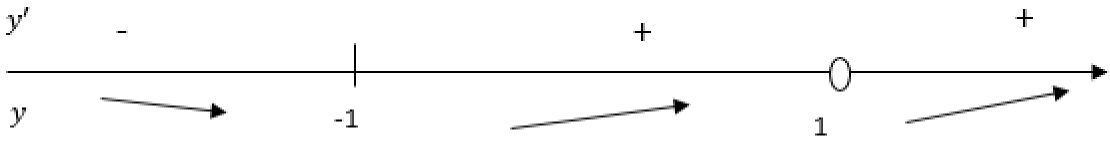
Вычисляем первую производную

$$y'=\left(\frac{(1+x)^2}{(x-1)^2}\right)'=\frac{((1+x)^2)'((x-1)^2)-((1+x)^2)((x-1)^2)'}{((x-1)^2)^2}=\frac{2(x+1)(x-1)^2-(1+x^2)^2*2(x-1)}{(x-1)^4}=\frac{(2(x-1)-(x+1)*}{(x-}$$

Находим критические точки, т.е. приравниваем производную к нулю:

$$y'=0\,;-4(x+1)=0\,;x_1=-1$$

Исследуем знак производной на интервале, на котором критические точки делят область определения функции.



Функция убывает на интервале $(-\infty; -1]$ и возрастает на интервале $[-1; 1) \cup (1; +\infty)$. Функция имеет минимум в точке

$$x=-1$$
$$y(-1)=0$$

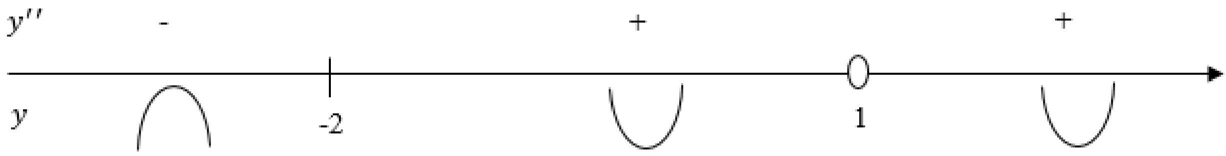
7) Найти точки перегиба и интервалы выпуклости и вогнутости:
Вычисляем вторую производную

$$y''=\left(\frac{-4(x+1)}{(x-1)^3}\right)'=\left(\frac{-4x-4}{(x-1)^3}\right)'=\frac{(-4x-4)'\left((x-1)^3\right)-(-4x-4)\left((x-1)^3\right)'}{\left((x-1)^3\right)^2}=\frac{-4(x-1)^3-(-4x-4)*3(x-1)^2}{(x-1)^6}$$

Находим критические точки, т.е. приравниваем вторую производную к нулю:

$$y''=0;\ 8x+16=0;\ x=-2$$

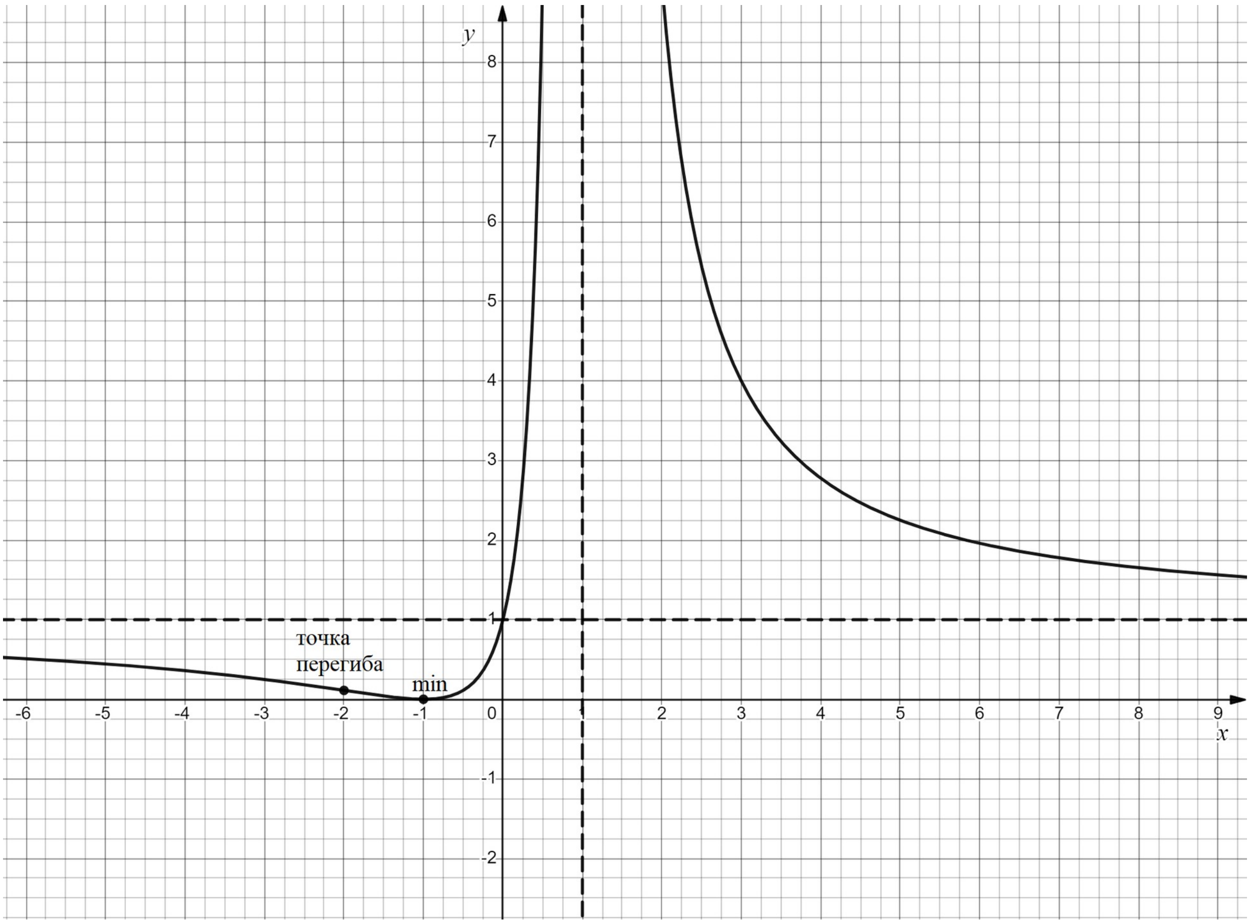
Исследуем знак производной на интервале, на которые критическая точка делит область определения функции:



Функция выпукла вверх на интервале $(-\infty; -2]$, выпукла вниз на интервале $[-2; 1) \cup (1; +\infty)$.
Точка перегиба:

$$x=-2$$
$$y(-2)=\frac{1}{9}$$

8) Построить график, используя полученные результаты



б ¿ $y=\ln\left(2x^2+3\right)$

1) Найти область определения функции, исследовать её поведение на границах этой области:

Область определения функции $2x^2+3>0=¿x^2>\frac{-3}{2}$, то есть $D(y)=(-\infty;+\infty)$.

Область значений функции$E(y)=[\ln(3);+\infty)$

2) Найти точки разрыва и классифицировать их с помощью односторонних пределов:

Точек разрыва нет.

3) Исследовать периодичность, чётность (нечётность):

Функция является четной. Так как

$$y(-x)=\ln\left(2*(-x)^2+3\right)=\ln\left(2*x^2+3\right)$$

Видим, что

$$y(-x)\neq -y(x)\, и\, y(-x)=y(x)$$

4) Найти точки пересечения графика с осями координат и интервалы знакопостоянства функции:

Точки пересечения с осями координат:

$$Ox: y=\ln(2x^2+3)=0=\text{¿}\, точек\ нет$$

$$Oy: x=0=\text{¿}\, y=\ln(3)\,;\, точка\,(0\,;\ln(3))$$

5) Найти асимптоты:

вертикальных асимптот нет

Наклонные асимптоты вида $y=kx+b$

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(2x^2+3)}{x}=0$$

$$b=\lim_{x\to\infty}(y-kx)=\lim_{x\to\infty}(\ln(2x^2+3))=\infty$$

Наклонных асимптот нет.

6) Найти точки экстремума и интервалы монотонности:

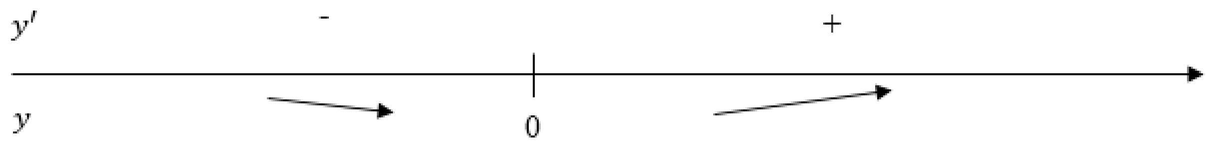
Вычисляем первую производную

$$y'=(\ln(2x^2+3))'=\frac{1}{2x^2+3}*(2x^2+3)'=\frac{4x}{2x^2+3}$$

Находим критические точки, т.е. приравниваем производную к нулю:

$$y'=0\,;\frac{4x}{2x^2+3}=0\,;x_1=0$$

Исследуем знак производной на интервале, на котором критические точки делят область определения функции.



Функция убывает на интервале $(-\infty\,;0]$ и возрастает на интервале $[0\,;+\infty)$. Функция имеет минимум в точке

$$x=0$$

$$y(0)=\ln(3)$$

7) Найти точки перегиба и интервалы выпуклости и вогнутости:

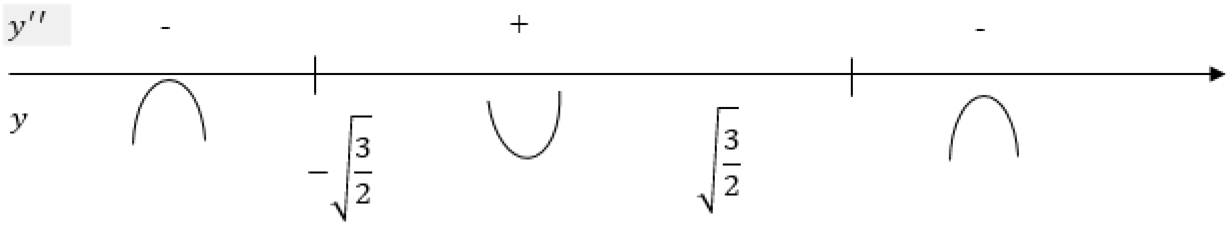
Вычисляем вторую производную

$$y''=\left(\frac{4x}{2x^2+3}\right)'=\frac{(4x)'(2x^2+3)-(4x)(2x^2+3)'}{(2x^2+3)^2}=\frac{4(2x^2+3)-(4x)*4x}{(2x^2+3)^2}=\frac{8x^2+12-16x^2}{(2x^2+3)^2}=\frac{12-8x^2}{(2x^2+3)^2}$$

Находим критические точки, т.е. приравниваем вторую производную к нулю:

$$y''=0\,;12-8x^2=0\,;x_1=\sqrt{\frac{3}{2}}\,;x_2=-\sqrt{\frac{3}{2}}$$

Исследуем знак производной на интервале, на которые критическая точка делит область определения функции:



Функция выпукла вверх на интервале $\left(-\infty;-\sqrt{\frac{3}{2}}\right] \cup \left[\sqrt{\frac{3}{2}};+\infty\right)$, выпукла вниз на интервале $\left[-\sqrt{\frac{3}{2}};\sqrt{\frac{3}{2}}\right]$. Точка перегиба:

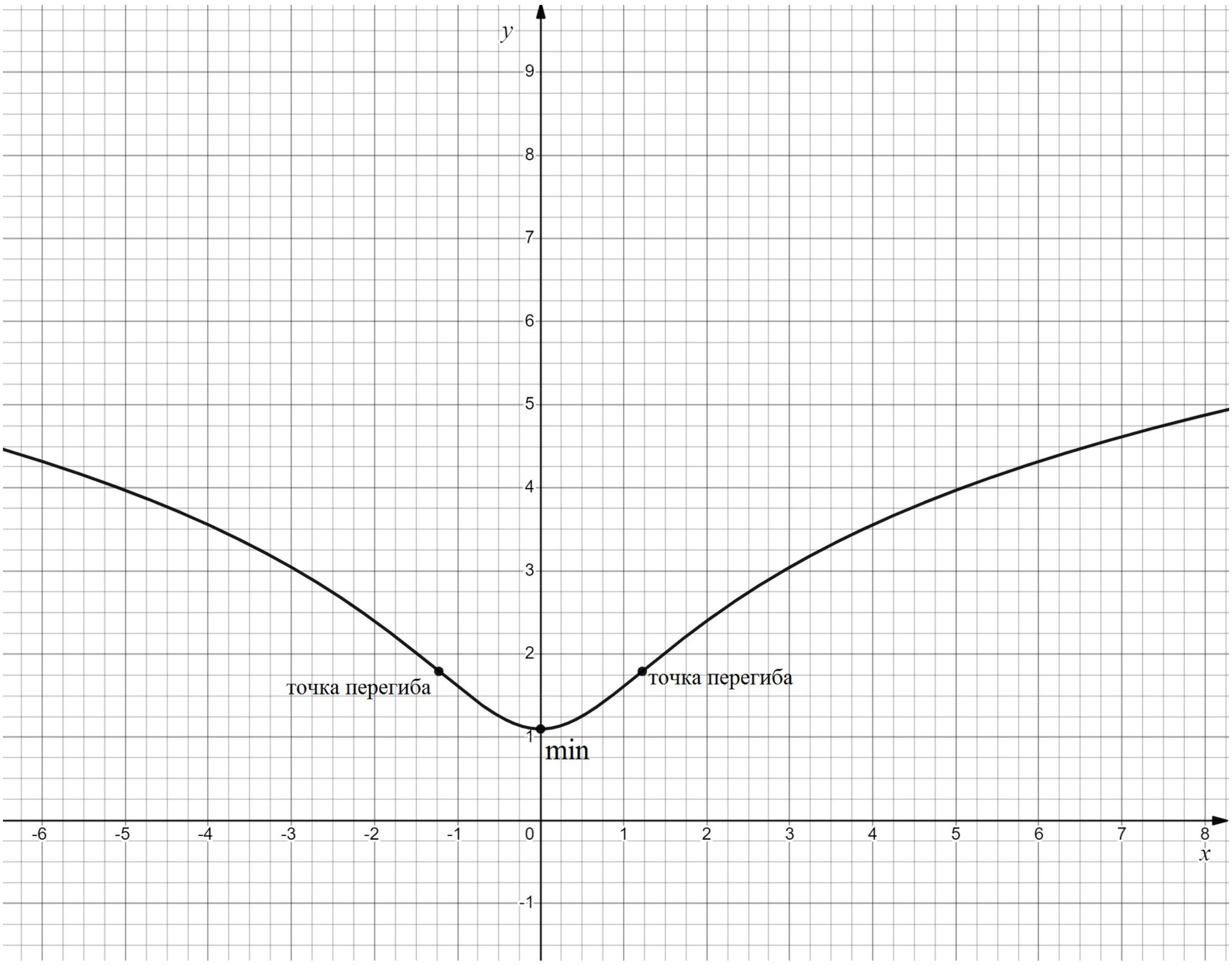
$$x=-\sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$y\left(-\sqrt{\frac{3}{2}}\right)=\ln(6)$$

$$x=\sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$y\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)=\ln(6)$$

8) Построить график, используя полученные результаты


y
x
точка перегиба
точка перегиба
min