Кратные интегралы: задача 8.

Ответы: 8) 6.

Векторный анализ: задача 1, задача 2, задача 4, задача 5, задача 7, задача 10

Ответы: 1)0; 2) $\frac{3\pi}{4}$; 4) 0; 5) 7; 7) 78π; 10) -2π.

Кратные интегралы

Задача 8. Пластинка D задана ограничивающими ее кривыми, μ -поверхностная плотность. Найти массу пластинки.

12. $D: x^2+y^2=9, x^2+y^2=25, x=0, y=0 (x\le 0, y\ge 0); \mu=\frac{2y-x}{x^2+y^2}$.

Решение:

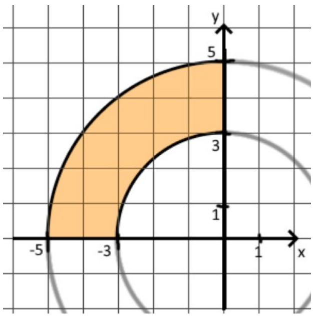

Рисунок 1 – Ограниченная область

Масса пластинки:

$$\iint_D \frac{2y-x}{x^2+y^2}dxdy$$

Пусть $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$. Тогда $dxdy=rdrd\varphi$, $x^2+y^2=r^2$

$$\begin{cases} x^2+y^2=r^2 \\ x^2+y^2=9 \\ x^2+y^2=25 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r=3 \\ r=5 \end{cases}$$

Следовательно,

$$D^*: \begin{cases} \frac{\pi}{2}\le\varphi\le\pi \\ 3\le r\le 5 \end{cases}$$

Масса пластинки:

$$\iint_D \frac{2y-x}{x^2+y^2}dxdy=\iint_{D^*}\frac{2r\sin\varphi-r\cos\varphi}{r^2}rdrd\varphi=\int_{\pi/2}^{\pi}d\varphi\int_3^5\frac{2r\sin\varphi-r\cos\varphi}{r^2}rdr=$$

$$=\int_{\pi/2}^{\pi}d\varphi\int_3^5(2\sin\varphi-\cos\varphi)dr=\int_{\pi/2}^{\pi}(2\sin\varphi-\cos\varphi)d\varphi\int_3^5 dr=$$

$$=(-2\cos\varphi-\sin\varphi)\Big|_{\pi/2}^{\pi}\cdot r\Big|_3^5=-(2\cos\varphi+\sin\varphi)\Big|_{\pi/2}^{\pi}\cdot(5-3)=$$

$$=-2\left(2\cos\pi+\sin\pi-2\cos\frac{\pi}{2}-\sin\frac{\pi}{2}\right)=-2(-2+0-0-1)=6$$

Ответ: 6.

Векторный анализ

Задача 1. Найти производную скалярного поля $u(x, y, z)$ в точке M по направлению проходящей через эту точку нормали к поверхности S, образующей острый угол с положительным направлением оси Oz.

12. $u = \sqrt{xy} - \sqrt{4 - z^2}, S: z = x^2 - y^2, M(1,1,0).$

Решение:

Уравнение поверхности $S: x^2 - y^2 - z = 0$

Нормальный вектор S имеет вид $\vec{n} = \left\{ \frac{dS}{dx}; \frac{dS}{dy}; \frac{dS}{dz} \right\}$

Найдем частные производные функции S:

$$\frac{dS}{dx} = 2x; \quad \frac{dS}{dy} = -2y; \quad \frac{dS}{dz} = -1$$

Частные производные функции S в точке M:

$$\left.\frac{dS}{dx}\right|_M = 2; \quad \left.\frac{dS}{dy}\right|_M = -2; \quad \left.\frac{dS}{dz}\right|_M = -1$$

Тогда нормальный вектор S и его длина:

$$n = \{2; -2; -1\}$$

$$|\vec{n}| = \sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{4 + 4 + 1} = 3$$

Направляющие косинусы:

$$\cos\alpha = \frac{2}{3}; \quad \cos b = \frac{-2}{3}; \quad \cos\gamma = \frac{-1}{3};$$

Найдем частные производные поля u в точке M:

$$\left.\frac{dU}{dx}\right|_M = \left((xy)^{1/2}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{xy}} = \frac{1}{2\cdot\sqrt{1\cdot 1}} = \frac{1}{2};$$

$$\left.\frac{dU}{dy}\right|_M = \left((xy)^{1/2}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{xy}} = \frac{1}{2\cdot\sqrt{1\cdot 1}} = \frac{1}{2};$$

$$\left.\frac{dU}{dz}\right|_M = \left((4 - z^2)^{1/2}\right)' = \frac{(4 - z^2)'}{2\sqrt{4 - z^2}} = \frac{-2z}{2\sqrt{4 - z^2}} = \frac{-2\cdot 0}{2\cdot\sqrt{4 - 0}} = 0.$$

Следовательно,

$$\frac{dU}{d\vec{n}} = \frac{dU}{dx}\cos\alpha + \frac{dU}{dy}\cos\beta + \frac{dU}{dz}\cos\gamma = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3} + \frac{1}{2}\cdot\frac{-2}{3} + 0\frac{-1}{3} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + 0 = 0$$

Ответ: 0.

Задача 2. Найти угол между градиентами скалярных полей $u(x,y,z)$ и $v(x,y,z)$ в точке M.

12. $v=\frac{6}{x}+\frac{2}{y}-\frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{2}z}, u=\frac{x^2}{y^2z^3}, M\left(\sqrt{2},\sqrt{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$

Решение:

Найдем частные производные поля u в точке M:

$$\frac{dU}{dx}=\frac{2x}{y^2z^3};\quad \frac{dU}{dy}=\frac{x^2}{z^3}\cdot\frac{-2}{y^3}=\frac{-2x^2}{y^3z^3};\quad \frac{dU}{dz}=\frac{x^2}{y^2}\cdot\frac{-3}{z^4}=\frac{-3x^2}{y^2z^4};$$

$$\left.\frac{dU}{dx}\right|_M=\frac{2\sqrt{2}\cdot 8}{2\cdot 3\sqrt{3}}=\frac{8\sqrt{6}}{9};$$

$$\left.\frac{dU}{dy}\right|_M=\frac{-2\cdot 2\cdot 8}{2\sqrt{2}\cdot 3\sqrt{3}}=-\frac{16\sqrt{6}}{18}=-\frac{8\sqrt{6}}{9};$$

$$\left.\frac{dU}{dz}\right|_M=\frac{-3x^2}{y^2z^4}=\frac{-3\cdot 2\cdot 16}{2\cdot 9}=-\frac{16}{3};$$

Тогда:

$$\operatorname{grad}u=\left\{\frac{8\sqrt{6}}{9};-\frac{8\sqrt{6}}{9};-\frac{16}{3}\right\}$$

$$|\operatorname{grad}u|=\sqrt{\left(\frac{8\sqrt{6}}{9}\right)^2+\left(\frac{8\sqrt{6}}{9}\right)^2+\left(\frac{16}{3}\right)^2}=\sqrt{\frac{64\cdot 6}{81}+\frac{64\cdot 6}{81}+\frac{256}{9}}=\frac{\sqrt{2\cdot 64\cdot 6+9\cdot 256}}{9}=$$

$$=\frac{\sqrt{3(128\cdot 2+3\cdot 256)}}{9}=\frac{\sqrt{3\cdot 1024}}{9}=\frac{32\sqrt{3}}{9}$$

Найдем частные производные поля v в точке M:

$$\frac{dU}{dx}=\frac{-6}{x^2};\quad \frac{dU}{dy}=\frac{-2}{y^2};\quad \frac{dU}{dz}=\frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{2}z^2};$$

$$\left.\frac{dU}{dx}\right|_M=\frac{-6}{2}=-3;\quad \left.\frac{dU}{dy}\right|_M=\frac{-2}{2}=-1;\quad \left.\frac{dU}{dz}\right|_M=\frac{3\sqrt{3}\cdot 4}{2\sqrt{2}\cdot 3}=\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{6}}{2}=\sqrt{6};$$

Тогда:

$$\operatorname{grad}v=\left\{-3;-1;\sqrt{6}\right\}$$

$$|\operatorname{grad}v|=\sqrt{3^2+1^2+\sqrt{6}^2}=\sqrt{9+1+6}=\sqrt{16}=4$$

Так как

$$\operatorname{grad}u\cdot\operatorname{grad}v=|\operatorname{grad}u|\cdot|\operatorname{grad}v|\cdot\cos\phi$$

$$\operatorname{grad}u\cdot\operatorname{grad}v=-\frac{8\sqrt{6}}{9}\cdot 3+\frac{8\sqrt{6}}{9}\cdot 1-\frac{16}{3}\cdot\sqrt{6}=-\frac{8\sqrt{6}}{3}+\frac{8\sqrt{6}}{9}-\frac{16\sqrt{6}}{3}$$

То:

$$\cos\phi=\frac{-\frac{8\sqrt{6}}{3}+\frac{8\sqrt{6}}{9}-\frac{16\sqrt{6}}{3}}{\frac{32\sqrt{3}}{9}\cdot 4}\underset{:\sqrt{3}}{\overset{\cdot 9}{=}}\frac{-3\cdot 8\sqrt{2}+8\sqrt{2}-3\cdot 16\sqrt{2}}{32\cdot 4}\underset{:8}{=}\frac{-3\sqrt{2}+\sqrt{2}-6\sqrt{2}}{16}=\frac{-8\sqrt{2}}{16}=\frac{-\sqrt{2}}{2}$$

$$\phi=\arccos\frac{-\sqrt{2}}{2}=\frac{3\pi}{4}$$

Ответ: $\frac{3\pi}{4}$

Задача 4. Найти поток векторного поля a через поверхности S, вырезаемую плоскостью P (нормаль внешняя к замкнутой поверхности, образуемой данными поверхностями).

12. $a = yi - xj + k, S: x^2 + y^2 = z^2 (z \geq 0), P: z = 4.$

Решение:

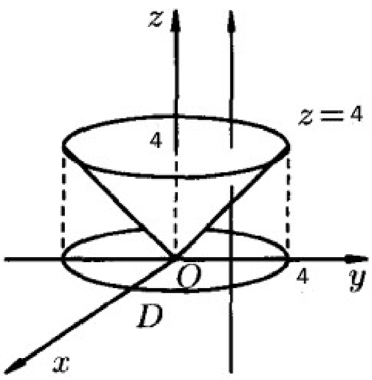

Рисунок 2 – Замкнутая поверхность (рисунок взят из учебника)

Для нахождения потока векторного поля через замкнутую поверхность в направлении внешней нормали воспользуемся формулой Остроградского-Гаусса. Для этого найдем дивергенцию векторного поля:

$$\operatorname{div} a = \frac{\partial}{\partial x} \cdot y + \frac{\partial}{\partial y} \cdot (-x) + \frac{\partial}{\partial z} \cdot 1 = 0$$

$$\iiint_V \operatorname{div} a dv = 0$$

Ответ: 0.

Задача 5. Найти поток векторного поля a через часть плоскости P, расположенную в первом октанте (нормаль образует острый угол с осью Oz.

12. $a = 2xi + 3yj + zk, P: \frac{x}{3} + y + \frac{z}{2} = 1.$

Решение:

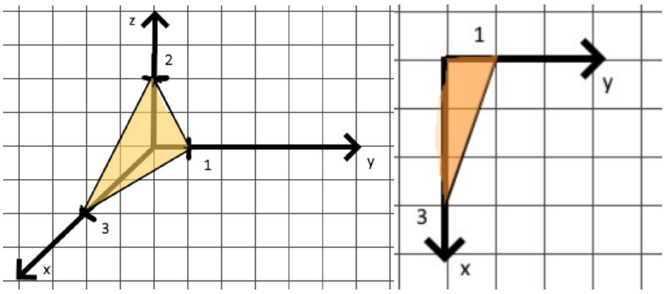

Рисунок 3 – Ограниченная плоскость и ее проекция

Поток векторного поля через плоскость – поверхностный интеграл:

$$K = \iint_S ands$$

Нормальный вектор плоскости $\frac{x}{3} + y + \frac{z}{2} = 1$:

$$\vec{N} = \left\{\frac{1}{3}; 1; \frac{1}{2}\right\}$$

Тогда

$$\left|\vec{N}\right| = \sqrt{\frac{1}{3}^2 + 1^2 + \frac{1}{2}^2} = \sqrt{\frac{1}{9} + 1 + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{4+36+9}{36}} = \sqrt{\frac{49}{36}} = \frac{7}{6}$$

$$\vec{n} = \left\{\frac{2}{7}; \frac{6}{7}; \frac{3}{7}\right\}$$

$$\vec{a}\vec{n} = 2x \cdot \frac{2}{7} + 3y \cdot \frac{6}{7} + z \cdot \frac{3}{7} = \frac{4x + 18y + 3z}{7}$$

Выразим уравнение плоскости через z и перепишем поверхностный интеграл в виде двойного:

$$\frac{x}{3} + y + \frac{z}{2} = 1 \Leftrightarrow z = 2\left(1 - \frac{x}{3} - y\right)$$

$$K = \iint_S \vec{a}\vec{n}\vec{d}\vec{s} = \iint_D an\sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2}dxdy$$

Вычислим частные производные z:

$$z_x' = 2 \cdot \frac{-1}{3} = \frac{-2}{3};$$

$$z_y' = 2 \cdot (-1) = -2;$$

$$\vec{a}\vec{n} = \frac{4x + 18y + 3z}{7} = \frac{1}{7} \cdot \left(4x + 18y + 3 \cdot 2\left(1 - \frac{x}{3} - y\right)\right) = \frac{1}{7} \cdot (4x + 18y + 6 - 2x - 6y) = \frac{1}{7} \cdot (2x + 12y + 6)$$

$$\sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + 2^2} = \sqrt{1 + \frac{4}{9} + 4} = \sqrt{\frac{9 + 4 + 36}{9}} = \frac{7}{3}$$

Уравнение проекции:

$$\frac{x}{3} + y = 1 \Rightarrow D: \begin{cases} 0 \le y \le 1 \\ 0 \le x \le 3 - 3y \end{cases}$$

Тогда:

$$K=\iint\limits_D \vec{a}\vec{n}\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}\,dxdy=\frac{1}{7}\cdot\frac{7}{3}\int_0^1 dy\int_0^{3-3y}(2x+12y+6)\,dx=\frac{1}{3}\int_0^1\left(x^2+12xy+6x\right)\Big|_0^{3-3y}dy=$$

$$=\frac{1}{3}\int_0^1\left((3-3y)^2+12\cdot(3-3y)y+6(3-3y)\right)dy=\frac{1}{3}\int_0^1\left(9-12y+9y^2+36y-36y^2+18-18y\right)dy=$$

$$=\frac{1}{3}\int_0^1\left(-27y^2+6y+27\right)dy=\frac{1}{3}\cdot\left(-9y^3+3y^2+27y\right)\Big|_0^1=\frac{1}{3}\cdot(-9+3+27)=\frac{21}{3}=7$$

Ответ: 7.

Задача 7. Найти поток векторного поля a через замкнутую поверхность S (нормаль внешняя).
12. $a = (\sqrt{z} - 2x)i + (e^x + 3y)j + \sqrt{y+x}k, S: x^2 + y^2 = z^2, z = 2, z = 5.$

Решение:

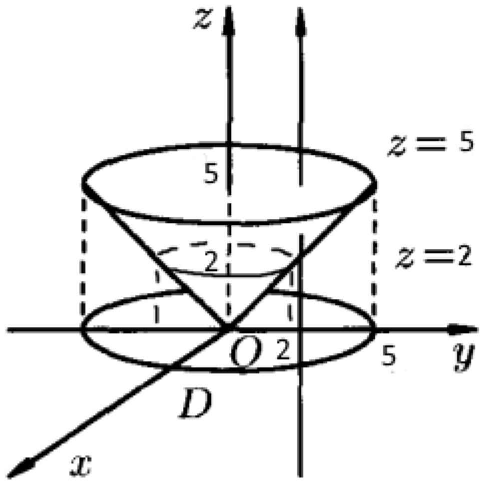

Рисунок 2 – Замкнутая поверхность (рисунок взят из учебника)

Для нахождения потока векторного поля через замкнутую поверхность в направлении внешней нормали воспользуемся формулой Остроградского-Гаусса. Для этого найдем дивергенцию векторного поля:

$$\operatorname{div} a = \frac{\partial}{\partial x}\cdot\left(\sqrt{z} - 2x\right) + \frac{\partial}{\partial y}\cdot\left(e^x + 3y\right) + \frac{\partial}{\partial z}\cdot\sqrt{y+x} = -2 + 3 + 0 = 1$$

$$\iiint_V \operatorname{div} a\,dv = \iiint_V 1\,dv = \iiint_V dv$$

Перейдем к цилиндрическим координатам:

$$x = r\cos\phi;\quad y = r\sin\phi;\quad z = z$$

$$dv = dxdydz = rdrd\phi dz$$

$$D: \begin{cases} 0 \le \phi \le 2\pi \\ 2 \le r \le 5 \\ 0 \le z \le r \end{cases}$$

Тогда

$$\iiint_V dv = \int_0^{2\pi} d\phi \int_2^5 dr \int_0^r rdz = \int_0^{2\pi} d\phi \int_2^5 r\,z\Big|_0^r dr = \int_0^{2\pi} d\phi \int_2^5 r^2 dr =$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{r^3}{3}\Big|_2^5 d\phi = \int_0^{2\pi} \frac{25-8}{3} d\phi = \int_0^{2\pi} \frac{117}{3} d\phi = 39\phi\Big|^{2\pi} = 78\pi$$

Ответ: 78π

Задача 10. Найти работу силы F при перемещении вдоль линии L от точки M к точке N.

12. $F = yi - xj, L : x^2 + y^2 = 2(y \geq 0), M(\sqrt{2},0), N(-\sqrt{2},0).$

Решение:

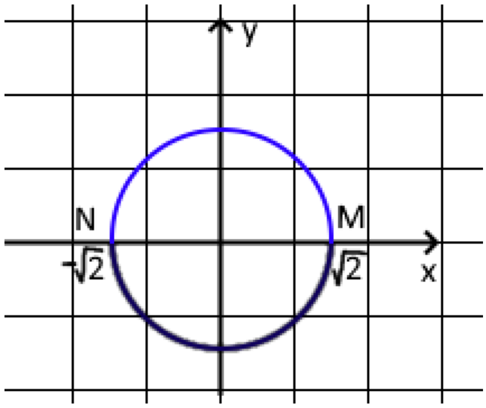

Рисунок 4 – График перемещения

Выразим y в уравнении прямой:

$$x^2 + y^2 = 2 \Rightarrow y = \sqrt{2 - x^2}$$

Посчитаем работу силы:

$$A = \int_L F dS = \int_L P dx + Q dy = \int_L y dx - x dy = \left[\begin{array}{l} y = \sqrt{2 - x^2} \\ dy = \dfrac{-x}{\sqrt{2 - x^2}} dx \end{array} \right] =$$

$$= \int_{\sqrt{2}}^{-\sqrt{2}} \left(\sqrt{2 - x^2} - \frac{-x^2}{\sqrt{2 - x^2}} \right) dx = - \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \frac{2 - x^2 + x^2}{\sqrt{2 - x^2}} dx = -2 \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \frac{dx}{\sqrt{2 - x^2}} =$$

$$= -2 \arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{2}} \right) \Bigg|_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} = -2\left(\arcsin 1 - \arcsin(-1) \right) = -2\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right) = -2\pi$$

Ответ: -2π