ИТОГОВАЯ КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА

**Задача 1.** Найти матрицу, обратную матрице $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}$.

Решение.

Находим определитель.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} -3 & 0 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} -3 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} =$$
$$= 1 \cdot (1 \cdot 1 - 0 \cdot 5) = 1$$

Определитель отличен от нуля, так что матрица $A$ обратима.

Найдем матрицу из алгебраических дополнений:

$$\|A_{ij}\| = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{12} & A_{22} & A_{23} \\ A_{13} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}$$

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = 1 \qquad A_{12} = -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad A_{13} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = 0$$
$$A_{21} = -\begin{vmatrix} -3 & 0 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = 3 \qquad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \qquad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = -5$$
$$A_{31} = \begin{vmatrix} -3 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

Поэтому:

$$\|A\| = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Выполним транспонирование матрицы из алгебраических дополнений:

$$\|A\|^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 1 \end{pmatrix}$$

Теперь находим обратную матрицу:

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \cdot \|A\|^T = \frac{1}{1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 1 \end{pmatrix}$$

**Задача 2.** Решить СЛАУ $\begin{cases} x + 2y - z = 3, \\ 3x - y + z = 2, \\ 2x - 3y + 2z = -1\,. \end{cases}$

Решение.

Решим систему методом Гаусса. Для этого запишем расширенную матрицу системы, а затем вычтем первое уравнение из второго и третьего, и второе из третьего.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 2 & -1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -7 & 4 & -7 \\ 0 & -7 & 4 & -7 \end{array}\right)$$

Так после преобразований второе и третье уравнения идентичны, то система сводится к двум уравнениям с тремя неизвестными. Найдем множество решений или докажем что их нет.

$$\begin{cases} x + 2y - z = 3 \\ -7y + 4z = -7 \end{cases} \to \begin{cases} x + 2y - z = 3 \\ 4z = 7y - 7 \end{cases} \to \begin{cases} x + 2y - (1.75y - 1.75) = 3 \\ z = 1.75y - 1.75 \end{cases}$$

$$\to \begin{cases} x = -0.25y - 1.75 \\ z = 1.75y - 1.75 \end{cases}$$

Неизвестная y может принимать любое числовое значение $a$. Таким образом множество решений системы:

$$\{(-0.25a - 1.75; a; 1.75a - 1.75) | a \in R\}$$

**Задача 3.** Вероятность того, что в результате проверки изделию будет присвоен «Знак высшего качества», равна 0,2. На контроль поступило 9 изделий. Какова вероятность того, что знак высшего качества будет присвоен:

а) ровно 6-ти изделиям;

б) более чем 7-ми изделиям;

в) хотя бы одному изделию;

г) указать наивероятнейшее число изделий, получивших знак высшего качества, и найти соответствующую ему вероятность.

Решение.

Имеем схему Бернулли с параметрами p=0,2 (вероятность того, что изделию будет присвоен «Знак высшего качества»), n=9 (количество изделий на контроле), q=1 – p = 1 – 0.2 = 0.8 (противоположная вероятность). Будем использовать формулу Бернулли:

$$P_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}$$

а) вероятность присвоения «Знак высшего качества» ровно 6-ти изделиям:

$$P_9(6) = C_9^6 \cdot 0{,}2^6 \cdot 0{,}8^{9-6} = \frac{9!}{6! \cdot (9-6)!} \cdot 0{,}2^6 \cdot 0{,}8^{9-6} = 0{,}00275$$

б) вероятность присвоения «Знак высшего качества» более чем 7-ми изделиям:

$$P_9(k > 7) = P_9(8) + P_9(9) = \\ = \frac{9!}{8! \cdot (9-8)!} \cdot 0{,}2^8 \cdot 0{,}8^{9-8} + \frac{9!}{9! \cdot (9-9)!} \cdot 0{,}2^9 \cdot 0{,}8^{9-9} = \\ = 0.00002$$

в) вероятность присвоения «Знак высшего качества» хотя бы одному изделию:

$$P_9(k \geq 1) = 1 - P_9(0) = 1 - \frac{9!}{0! \cdot (9-0)!} \cdot 0{,}2^0 \cdot 0{,}8^{9-0} = 0{,}86878$$

г) наивероятнейшее число изделий, получивших знак высшего качества, и соответствующая ему вероятность:

$$n \cdot p - q \leq H_0 \leq n \cdot p + q$$

$$9 \cdot 0.2 - 0.8 \leq H_0 \leq 9 \cdot 0.2 + 0.8$$

$$1 \leq H_0 \leq 2.6$$

Отсюда следует, что наивероятнейшие количество изделий это 1 и 2, их вероятности равны:

$$P_9(1) = C_9^1 \cdot 0{,}2^1 \cdot 0{,}8^{9-1} = \frac{9!}{1! \cdot (9-1)!} \cdot 0{,}2^1 \cdot 0{,}8^{9-1} = 0{,}30199$$

$$P_9(2) = C_9^2 \cdot 0{,}2^2 \cdot 0{,}8^{9-2} = \frac{9!}{2! \cdot (9-2)!} \cdot 0{,}2^2 \cdot 0{,}8^{9-2} = 0{,}60398$$

Наивероятнейшие количество изделий - 2, вероятность этого 0,60398